THE ROYAL SWEDISH ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUT MITTAG-LEFFLER
Auravägen 17, SE-182 60 Djursholm, Sweden
Tel. +46 8 622 05 60 Fax. +46 8 622 05 89
info@mittag-leffler.se www.mittag-leffler.se

Espaces des modules des courbes equivariantes et torseurs

S. Maugeais

REPORT No. 53, 2006/2007

ISSN 1103-467X
ISRN IML-R- -53-06/07- -SE

Espaces des modules des courbes équivariantes et torseurs

Sylvain Maugeais

Abstract

We construct tools to study equivariant deformations of smooth curves. For this, we study the sheaves $\mathrm{R}^1 f_* G$ where G is a solvable abstract group, and f is the complement of a relative Cartier divisor in a proper and smooth curve.

Résumé

Nous construisons des outils pour étudier les déformations équivariantes de courbes propres et lisses. Cela passe par l'étude de faisceaux $\mathrm{R}^1 f_* G$ où G est un groupe abstrait fini, et f est le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif dans une courbe propre et lisse.

Étant donné un corps k et une courbe propre et lisse $D \to \operatorname{Spec} k$ munie d'une action fidèle d'un groupe fini G, on peut construire fonctoriellement une extension galoisienne de $K(D)/K(D)^G$ de corps de degré de transcendance 1 sur k. On montre alors que ce foncteur est en fait une équivalence de catégorie. L'objet de ce travail est de généraliser cette équivalence pour des objets sur des bases plus complexes, le modèle étant un corollaire immédiat d'un résultat obtenu par Oort, Sekiguchi et Suwa dans [SOS89] Lemma IV.2.3 :

Lemme 0.1 *Soit $V \to \operatorname{Spec} R$ une courbe lisse et géométriquement intègre (non nécessairement propre). Supposons qu'il existe un R-morphisme génériquement fini $V \to X$ où $X \to \operatorname{Spec} R$ est une courbe propre et lisse. Si le genre de l'unique completion lisse des fibres de $V \to \operatorname{Spec} R$ est constant, alors la normalisation de X dans le corps de fractions de V est lisse sur R.*

La stratégie adoptée passe en fait par la construction d'un morphisme entre espaces de modules (voire la proposition 4.2 pour un énoncé technique du résultat principal). Étant donné un groupe fini G et deux entiers g et g', l'espace source de notre morphisme est l'espace des modules $\mathcal{M}_{g,g'}[G]$ classifiant les courbes propres et lisses de genre g munie d'une action de G fidèle dans chaque fibre et dont le quotient est de genre g'. Notons $n = (2g-2) - |G|(2g'-2)$ et considérons l'espace $\mathcal{M}_{g'}^{[n]}$ qui classifie les courbes propres et lisses de genre g' munie d'un diviseur de Cartier relatif de degré n (pour une introduction

Part of this work was done during a visit to the Institut Mittag-Leffler (Djursholm, Sweden)

détaillée de ces espaces, voir le chapitre 4). En associant à chaque courbe équivariante son quotient muni du diviseur de branchement, on obtient un morphisme $\Phi\colon \mathcal{M}_{g,g'}[G] \to \mathcal{M}_{g'}^{[n]}$. Notons $\mathcal{C}$ la courbe universelle au-dessus de $\mathcal{M}_{g'}$ et B le diviseur universel. Notons de plus $f\colon \mathcal{C} \setminus |B| \to \mathcal{M}_{g'}^{[n]}$. On peut alors, à tout morphisme $S \to \mathcal{M}_{g,g'}[G]$, associer un G-torseur au-dessus de $(\mathcal{C} \setminus |B|) \times_{\mathcal{M}_{g'}} S$. Pour compléter notre morphisme, nous définissons l'espace but $[\mathrm{R}^1 f_* G]$ comme un analogue champêtre du faisceau étale $\mathrm{R}^1 f_* G$ définit lorsque f est un morphisme de schémas. L'équivalence entre les G-torseurs au-dessus d'un schéma X et les éléments de $\mathrm{H}^1_{et}(X, G)$ permet alors de définir un morphisme $\mathcal{M}_{g,g'}[G] \to [\mathrm{R}^1 f_* G]$ qui est analogue du foncteur décrit en début d'introduction.

Le problème technique principal vient alors du fait que l'espace $[\mathrm{R}^1 f_* G]$ est très rarement représentable : il le sera essentiellement dans le cas où le cardinal de G est premier à toute les caractéristiques résiduelles. Dans le cas où la base est un corps algébriquement clos, les faisceaux $\mathrm{R}^1 f_* G$ que nous considérons ici ont déjà été étudiés par Harbater dans [Har80]. En particulier, il a construit des espaces dont les points géométriques sont ceux désirés, les points plus généraux n'ayant par contre pas d'interprétations modulaire. Nous suivons ici sa stratégie afin de construire des rigidifications de $\mathrm{R}^1 f_* G$, qui seront généralement de dimension infinie, afin de pouvoir utiliser des outils géométriques. Ces rigidifications sont obtenus principalement par dévissage dans le cas résoluble à partir de la théorie de la déformation d'Artin-Schreier à Kummer. Une fois les objets bien définit, on obtient assez directement le théorème suivant

Théorème 0.2 *Soit S un schéma réduit, $\mathcal{C} \to S$ une courbe propre et lisse et $\mathcal{U}$ le complémentaire dans $\mathcal{C}$ d'un diviseur de Cartier relatif. Soit G un groupe résoluble et $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$ un G-torseur. Pour tout $s \in S$, notons $\mathfrak{d}(s) = (2p_a(Y) - 2) - |G|(2p_a(\mathcal{C}_s) - 2)$ où Y est la normalisation de $\mathcal{C}_s$ dans l'anneau total des fractions de $\mathcal{V}_s$. Si l'application $\mathfrak{d}$ est constante alors il existe une unique courbe propre et lisse $\mathcal{D} \to S$ munie d'une action de G et admettant $\mathcal{V}$ comme ouvert G-équivariant.*

L'hypothèse de réduction de la base est ici nécessaire car on sait que les déformations infinitésimales de torseurs au-dessus d'un schéma affine sont triviales, ce qui n'est pas forcément le cas pour les courbes équivariantes.

L'autre avantage du morphisme construit dans cet article est qu'il permet de ramener l'étude des courbes équivariantes à des groupes de cohomologie pour lesquels on possède beaucoup de méthode de dévissage. Par exemple, suivant Harbater dans [Har80] et Katz dans [Kat86], on a un principe local-global qui s'énonce sous la forme suivante dans le cas le plus simple : soit k un corps algébriquement clos, $C \to \mathrm{Spec} k$ une courbe propre et lisse et $U \subset C$ un ouvert affine non vide, alors on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^1_{et}(C, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1_{et}(U, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{x \in C \setminus U} \mathrm{H}^1_{et}(\mathrm{Spec} k((t)), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2_{et}(C, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to 0$$

les groupes $\mathrm{H}^1_{et}(, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ classifiant les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-torseurs au-dessus des espaces considérés. La suite exacte ci-dessus est alors essentiellement la suite exacte à 5 termes provenant de la suite spectrale de Leray. Le principe local-global que nous obtenons n'est ni plus ni moins cette même suite exacte dans le cas relatif (cf. suite exacte (2.2)).

La première section consiste en des rappels de résultats bien connus, notamment un principe général disant quand une extension galoisienne d'extension galoisienne est galoisienne. Ce principe permettra de ramener le cas d'un groupe résoluble au cas du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Nous passons ensuite à l'étude de faisceaux de torseurs et à leurs propriétés. En particulier, nous montrons que $\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ possède une rigidification naturelle qui est ind-représentable en utilisant la suite exacte de déformation d'Artin-Shreier à Kummer. Nous introduisons et étudions la différente d'un torseur, qui correspond à l'entier $(2p_a(X)-2)-|G|(2p_a(\mathcal{C}_s)-2)$ du théorème 0.2 et qui joue un rôle majeur dans tout cet article.

La troisième section introduit les champs $[\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}]$ dans le cas d'un morphisme représentable $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ général. Lorsque f est le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif dans une courbe propre et lisse et que $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, nous montrons que ce champs possède une rigidification ind-représentable et la décrivons. Nous passons ensuite au cas où f est lui même muni d'une action d'un groupe P et construisons une rigidification du champ des points fixes $[\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}]^P$ dont l'étude est fondamentale pour la réduction au cas des groupes $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (*via* l'étude des extensions galoisiennes d'extensions galoisiennes).

Nous pouvons ensuite passer à l'étude du morphisme Φ introduit ci-dessus qui implique assez directement le théorème 0.2. Nous donnons alors un analogue local dudit théorème.

Finalement, nous regardons le cas $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ lorsque p est premier à toute les caractéristiques résiduelles et retrouvons la topologie de $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \otimes \mathbb{Z}[1/p]$ à l'aide des constructions faite précédemment.

Les outils développés ici on pour but premier l'étude du cas sauvage, ce qui fera l'objet d'un travail ultérieur.

1 Préliminaires

Nous rassemblons ici quelques résultats techniques qui jouerons des rôles fondamentaux dans la suite.

Théorème 1.1 *Soient Y un schéma localement noethérien réduit et $f\colon X \to Y$ un morphisme localement de type fini. Alors f est un isomorphisme si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées*

i) pour tout corps algébriquement clos k, l'application induite $X(\operatorname{Spec} k) \to Y(\operatorname{Spec} k)$ est bijective ;

ii) pour tout anneau de valuation discrète R, l'application induite $X(\operatorname{Spec} R) \to Y(\operatorname{Spec} R)$ est bijective ;

iii) pour tout corps algébriquement clos k, l'application induite $X(\operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)) \to Y(\operatorname{Spec} k[\varepsilon]/(\varepsilon^2))$ est injective

Preuve : Le sens direct est évident. Réciproquement, d'après la propriété *ii*), le morphisme f est propre. La proposition *i*) impose alors que f induit une bijection entre X et un sous-schéma fermé de Y. Par suite, la proposition *iii*) montre que f est en fait une immersion fermée. Retournant à la propriété *i*), on voit que le morphisme est dominant. Par suite, X est un sous-schéma fermé de Y avec même espace sous-jacent. Comme Y est réduit, on a $X = Y$. □

Nous rappelons maintenant un analogue local de [SOS89] Lemma IV.2.3 :

Lemme 1.2 *Soit R un anneau de valuation discrète d'uniformisante ϖ et de corps de fractions K, $A = R[[T]]$ et B une A-algèbre finie normale. Supposons que $B/\varpi B$ est réduite et que $A/\varpi A \to B/\varpi B$ est génériquement étale. Soient d_η et d_s les différentes génériques et résiduelles, i.e. les différentes des extensions $A \otimes K \to B \otimes K$ et $A/\varpi A \to B/\varpi B$. Si $d_\eta = d_s$ on a $B \cong R[[Z]]$.*

Preuve : cf. [GM99] Theorem 3.4. □

En utilisant des méthodes de recollement, on peut montrer que les énoncés globaux et locaux peuvent être déduit l'un de l'autre.

Nous donnons finalement une caractérisation cohomologique des extensions galoisiennes d'extensions galoisiennes qui sont elles-mêmes galoisienne.

Proposition 1.3 *Soit X un schéma, P et H des groupes finis, Y un P-torseur au-dessus de X et Z un H-torseur au-dessus de Y. Si Z est un schéma connexe alors c'est un $\mathrm{Aut}_X(Z)$-torseur si et seulement si $Z \in \mathrm{H}^1_{et}(Y, H)^P$.*

De plus, on a une suite exacte $0 \to H \to \mathrm{Aut}_X(Z) \to P \to 0$ et si Z et Z' sont deux H-torseurs au-dessus de Y qui sont isomorphes, alors ils induisent des $\mathrm{Aut}_X(Z)$-torseurs isomorphes au-dessus de X.

En particulier, on a une applications injective

$$\mathrm{H}^1(Y, H)^P \to \prod_{\{0 \to H \to G \to P \to 0\}/isom} \mathrm{H}^1(X, G)$$

Proof : Pour tout $\sigma \in P$ notons Z_σ le H-torseur au-dessus de Y obtenu par changement de base $\sigma \colon Y \to Y$ à partir de Z.

Supposons tout d'abord que $Z \to X$ est un $\mathrm{Aut}_X(Z)$-torseur. En particulier, on a un morphisme surjectif $\mathrm{Aut}_X(Z) \to P$. N'importe quel relèvement de σ dans $\mathrm{Aut}_X(Z)$ fournit alors un isomorphisme entre Z_σ et Z.

Réciproquement, supposons que $Z \in \mathrm{H}^1(Y, H)^P$. D'après [Méz00], Lemma 2.8. précédent, nous devons prouver que $Z \times_X Z$ est totalement décomposé. Comme $Y \to X$ est un P-torseur, on a un isomorphisme

$$Z \times_X Z \cong \prod_{\sigma \in P} Z_\sigma \times_Y Z.$$

Par suite, il suffit de montrer que $Z_\sigma \times_Y Z$ est un produit de copie de Z. Or par hypothèse, Z et Z_σ sont isomorphes en tant que H-torseurs donc $Z_\sigma \times_Y Z \cong Z \times_Y Z \cong \prod_{\tau \in H} Z$. Ce qui fournit le résultat annoncé.

La dernière partie est claire. □

2 Quelques résultats sur les torseurs

Le but de cette section est de donner quelques résultats sur les torseurs et en particulier de généraliser des résultats de Harbater (cf. [Har80]) et de Katz (cf. [Kat86]). Plus précisément, soit C une courbe lisse sur un corps algébriquement clos k, U un sous-schéma ouvert de C affine et G un groupe abstrait. L'un des buts de chacun de ces articles était de calculer le groupe $\mathrm{H}^1_{et}(U, G)$ et de donner ainsi un principe local-global pour les revêtements.

Nous souhaitons ici généraliser ce résultat dans le cas d'une courbe relative $\mathcal{C} \to S$. Pour cela, l'un des instruments essentiels est la suite exacte de déformation d'Artin-Schreier à Kummer dont nous rappelons la théorie ci-après.

Dans toute la suite, lorsque les groupes ne sont pas commutatifs, les suites exactes de cohomologie sont à comprendre au sens non abélien, i.e. suites exactes de faisceaux d'ensembles pointés.

2.1 Rappels et notations

Dans toute la suite de cet article, S sera un schéma, $h\colon X \to S$ un morphisme de schémas et $\mathcal{G}$ un schéma en groupe étale sur X.

Pour $i \leq 2$, on peut alors définir des ensembles pointés $\mathrm{H}^i_{et}(\mathcal{C}, \mathcal{G})$, cf. [Gir71].

Nous noterons $\mathrm{R}^i h_* \mathcal{G}$ le faisceau sur le gros site étale S_{et} associé au préfaisceau

$$T \mapsto \mathrm{H}^i_{et}(X \times_S T, \mathcal{G} \times_S T).$$

Proposition 2.1 *Supposons h propre. Alors $\mathrm{R}^i h_* \mathcal{G}$ est représentable par un espace algébrique pour $i \in \{1, 2\}$.*

Preuve : Pour $i = 1$, le résultat s'obtient de la même manière que dans le cas commutatif en se ramenant à des déformations de torseurs.

Pour $i = 2$, on sait que $\mathrm{H}^2_{et}(X \times_S T, \mathcal{G} \times_S T)$ est un espace principal homogène sous $\mathrm{H}^2_{et}(X \times_S T, Z(\mathcal{G} \times_S T))$ où $Z(\mathcal{G} \times_S T)$ désigne le centre de $\mathcal{G} \times_S T$ (cf. [Gir71], Théorème IV.3.3.3). Par suite, le faisceau $\mathrm{R}^2 h_* \mathcal{G}$ est un espace principal homogène sous $\mathrm{R}^2 h_* Z(\mathcal{G})$. On se ramène donc au cas abélien, pour lequel le résultat est connu (cf. par exemple [Mil80]). □

Bien évidement, il est possible d'appliquer les opérations classiques de la cohomologie. Nous nous contentons ici de donner les exemples qui nous serons utiles (cf. [Gir71]).

Donnons nous une suite exacte de groupes étales sur S

$$1 \to \mathcal{H} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{H} \to 1.$$

Alors il existe une suite exacte de faisceau d'ensembles pointés

$$0 \to \mathrm{R}^0 h_* \mathcal{H} \to \mathrm{R}^0 h_* \mathcal{G} \to \mathrm{R}^0 h_* \mathcal{G}/\mathcal{H} \to \mathrm{R}^1 h_* \mathcal{H} \to \mathrm{R}^1 h_* \mathcal{G} \to \mathrm{R}^1 h_* \mathcal{G}/\mathcal{H} \to \mathrm{R}^2 h_* \mathcal{H} \tag{2.1}$$

Cette suite peut être utilisée pour l'étude des faisceaux de torseurs sous des groupes résolubles afin de se ramener à l'étude des torseurs sous des groupes cycliques. Il arrive toutefois qu'on ne sache pas si $\mathrm{R}^2 h_* \mathcal{H}$ est nul ou non (cf. conjecture 3.11), ce qui ne permet pas le dévissage.

Donnons nous maintenant un morphisme propre $h\colon \mathcal{C} \to S$ ainsi qu'une immersion ouverte $j\colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ et notons $f\colon \mathcal{U} \to S$ le morphisme induit. On se fixe également un schéma en groupe étale $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{U}$.

Pour tout $T \to S$, on a alors une suite exacte à 5 termes

$$0 \to \mathrm{R}^1 h_*(j_*\mathcal{G}) \to \mathrm{R}^1 f_*\mathcal{G} \to h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathcal{G} \to \mathrm{R}^2 h_*(j_*\mathcal{G}) \to \mathrm{R}^2 f_*\mathcal{G} \tag{2.2}$$

obtenu en faisceautisant l'analogue non abélien de la suite exacte en bas degré obtenu par la suite spectrale de Leray (cf. [Gir71], Chapitre V).

Cette suite permet de décomposer $\mathrm{R}^1 f_*\mathcal{G}$ en un terme local $f_*\mathrm{R}^1 j_*\mathcal{G}$ et en termes globaux, cette suite est l'un des outils fondamentaux utilisés par Harbater (cf. [Har80]) et Katz (cf. [Kat86]) lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos. La suite exacte ci-dessus doit être vu comme un principe local global. Elle est toutefois complètement différente de celle de Bertin et Mézard dans [BM00] car elle ne dit rien sur les déformations infinitésimale de courbes.

À partir de maintenant, nous supposerons que h est une courbe propre et lisse et que $\mathcal{U}$ est le complémentaire dans $\mathcal{C}$ d'un diviseur de Cartier relatif.

2.2 Calcul dans le cas modéré

On suppose ici que $h\colon \mathcal{C} \to S$ est un courbe propre et lisse et que $j\colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ est le complémentaire de $\ell > 0$ sections disjointes.

Plaçons nous dans le cas où $\mathcal{G} = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{U}}$ pour un nombre premier p, et S est un $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$-champ, où ζ est une racine primitive p-ième. Il est alors possible de calculer complètement la plupart des termes de cette suite.

Par dualité de Poincaré (cf. [Mil80] Proposition VI.11.8) on a un isomorphisme canonique $\mathrm{R}^2 h_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{U}} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(-1)_S$.

Si on choisit un isomorphisme $\boldsymbol{\mu}_p \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on peut construire un isomorphisme $h_*\mathrm{R}^1 j_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{U}} \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\ell}_S$ qui ne dépend que du choix d'un ordre sur les sections et de l'isomorphisme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \boldsymbol{\mu}_p$. Il est alors aisé de voir, par un calcul explicite, que le morphisme $h_*\mathrm{R}^1 j_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{U}} \to \mathrm{R}^2 h_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{U}}$ est surjectif.

En résumé, on peut réécrire la suite exacte (2.2) sous la forme

$$0 \to \mathrm{R}^1 h_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{C}} \to \mathrm{R}^1 f_*(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{U}} \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\ell}_S \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(-1)_S \to 0.$$

et cette suite ne dépend que de paramètres explicites.

2.3 La suite exacte d'Artin-Scheier à Kummer et quelques conséquences

Nous allons maintenant rappeler quelques propriétés de la déformation d'Artin-Schreier à Kummer (pour plus de détail, cf. [SOS89]) et donnerons quelques conséquences.

Dans toute la suite, nous fixons un nombre premier p et un anneau de valuation discrète R_0 de caractéristiques $(0, p)$ contenant une racine p-ième de l'unité ζ. Notons $\lambda = \zeta - 1$. Il est alors aisé de voir que $\lambda^{p-1} = up$ avec u inversible dans R_0.

Pour tout $\mu \in R_0$, notons $\mathscr{G}^{(\mu)} = \operatorname{Spec} R_0 \left[x, \frac{1}{\mu x+1}\right]$. On peut munir $\mathscr{G}^{(\mu)}$ d'une structure de schéma en groupe en utilisant la loi $a * b = \mu ab + a + b$. Sa fibre générique est alors isomorphe à $\mathbb{G}_m$ et sa fibre spéciale à $\mathbb{G}_a$.

Pour tout R_0-schéma X nous noterons $\mathscr{G}_X^{(\mu)} = \mathscr{G}^{(\mu)} \times_{R_0} X$. On définit alors un morphisme de groupe $\psi : \mathscr{G}_X^{(\lambda)} \to \mathscr{G}_X^{(\lambda^p)}$ par $x \mapsto \frac{(\lambda x+1)^p - 1}{\lambda^p}$ qui est bien défini car $\lambda^{p-1} = up$.

On voit alors que ψ est fidèlement plat et que son noyau est (non canoniquement) isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On a ainsi une suite exacte sur le gros site étale

$$0 \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_X \to \mathscr{G}_X^{(\lambda)} \to \mathscr{G}_X^{(\lambda^p)} \to 0 \tag{2.3}$$

dont la fibre spéciale s'identifie à la suite exacte d'Artin-Schreier et la fibre générique à la suite exacte de Kummer.

Considérons maintenant un R_0-schéma S, une courbe propre et lisse $f : \mathcal{C} \to S$ et $j : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ une immersion ouverte telle que $\mathcal{C} \setminus \mathcal{U}$ soit le support d'un diviseur de Cartier relatif et tel que le morphisme induit $h : \mathcal{U} \to S$ soit affine.

La proposition suivante permet de mieux comprendre le faisceau $f_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui apparaît dans la suite (2.2).

Proposition 2.2 *Le faisceau $\mathrm{R}^1 j_* \mathscr{G}_U^{(\lambda)}$ est nul et on a une suite exacte pour la topologie étale.*

$$0 \to h_* \left((j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)}) / \mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda)} \right) \to h_* \left((j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)}) / \mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda^p)} \right) \to h_* \mathrm{R}^1 j_* (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{U}} \to 0. \tag{2.4}$$

Preuve : En prenant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite (2.3) par application du foncteur j_* on obtient une suite exacte

$$0 \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{C}} \to j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)} \to j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)} \to \mathrm{R}^1 j_* (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{\mathcal{U}} \to \mathrm{R}^1 j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)}.$$

Nous allons montrer dans un premier temps que $\mathrm{R}^1 j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)} = 0$.

Si S est un schéma d'égales caractéristiques, le résultat est bien connu. En effet, si S est de caractéristique p alors $\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)} \cong \mathbb{G}_{a,\mathcal{U}}$ et donc est cohérent. Il s'ensuit que $\mathrm{R}^1 j_* \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)} = 0$ car j est affine.

Si toutes les caractéristiques résiduelles de S sont première à p, alors $\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)} \cong \mathbb{G}_{m,\mathcal{U}}$. On se ramène donc à l'étude des faisceaux inversibles et plus précisément à des propriétés de prolongements de ceux ci. Si de plus, S est le spectre d'un corps alors le résultat provient de la régularité de $\mathcal{C}$ qui permet de se ramener à des prolongements de diviseurs de Weil. Le cas où S est un anneau local s'obtient alors aisément du cas où S est un corps en relevant une base au-dessus du point fermé.

Le cas de d'inégales caractéristiques est plus compliqué. Tout d'abord, on peut supposer que S est local et la caractéristique résiduelle de son point fermé est p. Comme le résultat est local sur $\mathcal{C}$, on peut remplacer ce dernier par un schéma $\operatorname{Spec} A$ qui est un localisé en un de ses points. Il s'agit alors de montrer que tout élément de $\mathrm{H}^1_{et}(\mathcal{U}, \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)})$ est trivial, c'est-à-dire que le torseur correspondant possède une section.

Notons k le corps résiduel du point fermé de S et considérons un élément $\mathrm{Spec}\, B \in \mathrm{H}^1_{et}(\mathcal{U}, \mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)})$. D'après le cas d'égales caractéristiques traité ci-dessus on a $B \otimes_{\mathcal{O}_S} k \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}\times_S k}[x, \frac{1}{\lambda x+1}]$. Notons $\widetilde{x} \in B$ un relevé de x. On voit alors que $\mathrm{Spec}\, B/(x)$ est plat sur $\mathcal{O}_{\mathcal{U}\times_S k}$ et que $B/(x) \otimes_{\mathcal{O}_S} k \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}\times_S k}$. Par suite, le morphisme $\mathrm{Spec}\, B/(x) \to \mathcal{U}$ est un isomorphisme, on a donc trouvé une section.

Passons maintenant à l'existence de la suite exacte. D'après de qu'on vient de démontrer, on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{\lambda} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda^p)} \arrow[rr] \arrow[d] & & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{\lambda} \arrow[r] & j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)} \arrow[r] & \mathrm{R}^1 j_*\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}_{\mathcal{U}}\right) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent fournit alors la suite exacte

$$0 \to (j_*\mathscr{G}_U^{(\lambda)})/\mathscr{G}_X^{(\lambda)} \to (j_*\mathscr{G}_U^{(\lambda^p)})/\mathscr{G}_X^{(\lambda^p)} \to \mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0.$$

Les faisceaux présents dans cette suite étant à support fini sur S (le support est dans $\mathcal{C} \setminus \mathcal{U}$ qui est le support d'un diviseur de Cartier relatif), on obtient le résultat en prenant h_* qui reste exacte. □

2.4 La différente d'un torseur

Soient S un schéma, $\mathcal{C} \to S$ une courbe propre et lisse et $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ un ouvert complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif. Fixons également un groupe étale $\mathcal{G}$ sur S et un $\mathcal{G}$-torseur $\mathcal{V} \to \mathcal{U}$.

Pour tout point $s \in S$, nous noterons $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}/\mathcal{U}}(s)$ l'entier $(2p_a(Y)-2)-|\mathcal{G}_s|(2p_a(\mathcal{C}_s)-2)$ où Y est la normalisation de $\mathcal{C}_s$ dans l'anneau total des fractions de $\mathcal{V}_s$ et p_a est le genre arithmétique. En utilisant la formule de Hurwitz, on voit que $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}/\mathcal{U}}(s)$ est le degré du diviseur de ramification du morphisme $Y \to \mathcal{C}_s$. On vérifie sans peine que $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}/\mathcal{U}}(s)$ commute aux changements de bases quelconques.

Il est à noter que $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}/\mathcal{U}}(s)$ est en fait une somme de terme locaux ne dépendant que de la ramification du morphisme $Y \to \mathcal{C}_s$.

Proposition 2.3 *Supposons que S est un schéma noethérien, alors l'application $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}/\mathcal{U}} : S \to \mathbb{N}$ est constructible.*

Preuve : Comme l'image d'un ensemble constructible est constructible, on peut supposer que S est réduit et normal. Notons $\mathcal{Y} \to \mathcal{C}$ la normalisation de $\mathcal{C}$ dans l'anneau total des fractions de $\mathcal{V}$ qui est un morphisme fini d'après [Liu02], Proposition 4.1.25 car l'extension de corps de fractions $K(\mathcal{U})/K(\mathcal{C})$ est finie et séparable. En particulier $\mathcal{Y} \to S$ est une courbe propre, mais pas forcément lisse. D'après [EGA] Proposition IV.17.7.11, le lieu S' des points $s \in S$ tel que $\mathcal{Y}_s \to \mathrm{Spec}\, k(s)$ est lisse est constructible, et il est aisé de voir que $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}/\mathcal{U}}$ est localement constant sur cet ensemble car les genres de $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{C}$ y sont localement constants. On peut alors répéter cette construction sur $S \setminus S'$ qui est de codimension > 0. Comme S est noethérien, on obtient le résultat après un nombre fini d'étapes.
□

En particulier pour tout entier $\mathfrak{d}_0 \in \mathbb{N}$ nous pouvons considérer le sous-schéma $S_{\mathfrak{d}=\mathfrak{d}_0}$ composé des points s de S pour lesquels $\mathfrak{d}(s) = \mathfrak{d}_0$. En effet, comme S est noethérien et $S_{\mathfrak{d}=\mathfrak{d}_0}$ est constructible, ce dernier est une réunion d'ensembles localement fermés. On peut donc le munir d'une structure de schéma en considérant sa structure réduite. On prendra garde au fait que ce schéma ne commute pas au changement de base quelconque.

Dans les faits, nous devrons utiliser cette construction pour un groupoïde qui est limite inductive de champs algébriques noethériens. Le fait que ce soit un groupoïde ne pose pas de problème car l'application $\mathfrak{d}$ commute aux changements de bases. On généralise alors aisément la construction ci-dessus au cas de la limite inductive.

Nous donnons maintenant quelques propriétés de la différentes.

Proposition 2.4 *Reprenons les notations précédentes et supposons S noethérien. Soient η un point de S et s une spécialisation de η. Alors $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}/\mathcal{U}}(s) \leq \mathfrak{d}_{\mathcal{V}/\mathcal{U}}(\eta)$.*

Preuve : On peut supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, les points η et s étant ses points génériques et fermés. La normalisation de $\mathcal{C}$ dans le corps de fractions de $\mathcal{V}$ étant Cohen-macaulay (d'après le critère de Serre), sa fibre spéciale est réduite. Il est alors aisé de montré que la caractéristique d'Euler de la normalisé de la fibre spéciale est plus petite que la caractéristique d'Euler de la fibre spéciale. Cette dernière étant égale à la caractéristique d'Euler de la fibre générique par platitude, on obtient le résultat souhaité. □

Proposition 2.5 *Reprenons les notations précédentes, supposons S noethérien et donnons nous un sous-groupe distingué $H \lhd G$. En particulier $\mathcal{V}/H \to \mathcal{U}$ est un G/H-torseur.*
Si $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}/\mathcal{U}}$ est constante alors $\mathfrak{d}_{(\mathcal{V}/H)/\mathcal{U}}$ et $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}/(\mathcal{V}/H)}$ sont constantes.

Preuve : Il suffit de le montrer dans le cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Par suite, la normalisation $\mathcal{D}$ de $\mathcal{C}$ dans le corps de fractions de $\mathcal{V}$ est une courbe propre et lisse (cf. lemme 0.1) et G agit librement sur un ouvert dense de chaque fibre. Il s'ensuit que $\mathcal{D}/H$ est une courbe propre et lisse (cf. [Sam66]). Mais $\mathcal{D}/H$ est naturellement une compactification lisse de $\mathcal{V}/H$ et donc $\mathfrak{d}_{(\mathcal{V}/H)/\mathcal{U}}$ est constante.
Cela impose également que $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}/(\mathcal{V}/H)}$ est constante. □

2.5 Sur une propriété d'extension de morphismes

Nous démontrons dans cette section une propriété d'extension d'isomorphismes de torseurs en des isomorphismes de courbes propres et lisses.

Lemme 2.6 *Soit S un schéma, $\mathcal{C} \to S$ une courbe propre et lisse et pour $i \in \{1,2\}$, $\pi_i \colon \mathcal{D}_i \to \mathcal{C}$ des S-morphismes entre courbes lisses, séparables dans chaque fibre au-dessus de S. Alors le schémas des isomorphismes $\mathrm{Isom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est fini et non ramifié sur S*

Preuve : Tout d'abord, on voit que $\mathrm{Isom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ est quasi-fini sur S. Pour montrer cela, on peu supposer que S est le spectre d'un corps. Les corps de fractions de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont finis sur le corps de fractions de $\mathcal{C}$, il n'existe donc qu'un nombre fini d'isomorphismes.

Par suite, il suffit de montrer qu'il est propre et non ramifié.

Pour ce qui est de la propreté, il suffit de vérifier le critère valuatif car on sait déjà qu'il est de présentation finie sur S. On est donc ramené au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Par suite, si on a un isomorphisme à la fibre générique, on peut l'étendre car $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les normalisations de $\mathcal{C}$ dans leur corps de fraction.

Passons maintenant à la non ramification. Pour cela, on peut supposer que S est le spectre d'un anneau artinien A de corps résiduel algébriquement clos, que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ et qu'on a $\phi \in \mathrm{Isom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_1)$ qui est l'identité modulo un élément $\varepsilon \in A$ annulé par l'idéal maximal de A.

Notons D_1 la fibre spéciale de $\mathcal{D}_1$. Utilisant la théorie des déformations des courbes, on voit que ϕ définit un élément de $\chi \in \mathrm{H}^0(D_1, \Omega^\vee_{D_1})$. Soit $\mathfrak{p} \in D_1$ un point en lequel le morphisme π_1 est étale. Comme ϕ est un $\mathcal{C}$-morphisme, on trouve que χ possède un zéro en $\mathfrak{p}$. Le morphisme π étant non radiciel, le champ de vecteur χ s'annule sur un ensemble dense. Il s'ensuit que $\chi = 0$ et donc $\phi = Id$. $\square$

Proposition 2.7 *Soit S un schéma noethérien réduit, $\mathcal{C} \to S$, $\mathcal{D}_1 \to S$ et $\mathcal{D}_2 \to S$ trois courbes propres et lisses, $\pi_1 \colon \mathcal{D}_1 \to \mathcal{C}$ et $\pi_2 \colon \mathcal{D}_2 \to \mathcal{C}$ deux revêtements finis tels que leur lieu de branchement soit contenu dans le support d'un diviseur de Cartier relatif $B \subset \mathcal{C}$. En particulier, on suppose que π_1 et π_2 sont génériquement séparables dans chaque fibre au-dessus de S. Notons $\mathcal{V}_i := \pi_i^{-1}(\mathcal{C} \setminus B)$ et donnons nous un isomorphisme de G-torseurs $\phi \colon \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ au-dessus de $\mathcal{C} \setminus B$. Alors ϕ s'étend en un unique $\mathcal{C}$-isomorphisme G-équivariant $\mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$.*

Preuve : Il s'agit de construire une section $S \to \mathrm{Isom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ induisant ϕ.

Supposons dans un premier temps que S est le spectre d'un corps ou bien le spectre d'un anneau de valuation, ou plus généralement si S est normal. Alors le résultat est trivialement vrai car ϕ induit un isomorphisme sur les normalisations de $\mathcal{C}$ dans les corps de fractions de $\mathcal{V}_1$ et de $\mathcal{V}_2$, comme celles-ci sont $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, on obtient le résultat.

Notons S_{gen} la réunion disjointes des points génériques de S. Le schéma S_{gen} est alors la réunion disjointe de spectres de corps. Par suite, il existe une unique section $S_{gen} \to \mathrm{Isom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ induisant ϕ au-dessus de S_{gen}. Notons Z l'adhérence schématique de cette section dans $\mathrm{Isom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ (la structure de schéma étant la structure réduite). Il s'agit alors de voir que $Z \to S$ est un isomorphisme.

Comme $\mathrm{Isom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) \to S$ est fini et non ramifié, il en est de même de $Z \to S$.

Soit $s \in S$ et R un anneau de valuation discrète dominant $\mathcal{O}_{S,s}$. Comme vu précédemment, on peut étendre l'isomorphisme à la fibre générique (donné par $Z \times_S \mathrm{Spec} R$) par normalisation. En particulier, on voit qu'il y a un unique point de Z au-dessus de s, et celui-ci est de même corps résiduel que s, car la section de $\mathrm{Isom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$ correspondante est obtenue par normalisation.

Par suite, l'application ensembliste $Z \to S$ est injective. Comme ce morphisme est non ramifié et propre, c'est une immersion fermée. Comme il est dominant et que S est réduit, c'est un isomorphisme. $\square$

Remarque 2.8 La proposition ci-dessus est trivialement fausse si S n'est pas réduit. En effet, les déformations infinitésimales de torseurs au-dessus d'un schéma affine sont toujours isomorphes alors qu'il existe en général des déformations infinitésimales de courbes propres qui ne sont pas isomorphes.

3 Quelques espaces de torseurs

Notre but est ici de généraliser aux champs algébriques les constructions faites dans 2.1. On se fixera donc un champ algébrique $\mathcal{S}$ et un champ algébrique en groupes étale $\mathcal{G} \to \mathcal{S}$.

Définition 3.1 Soit $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ un morphisme représentable de champs algébriques. Notons $[\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}]$ le groupoïde sur $\mathcal{S}$ dont les fibres au-dessus d'un schéma T sont les catégories dont

- les objets sont les couples $(\alpha,\ \xi)$ avec $\alpha\colon T \to \mathcal{S}$ et $\xi \in \mathrm{H}^0(T, \mathrm{R}^1 f_{T*} \mathcal{G}_T)$ où f_T et $\mathcal{G}_T$ sont obtenus de f et $\mathcal{G}$ par changement de base ;
- les morphismes sont les automorphismes de α qui laissent fixe ξ.

Lorsque $\mathcal{S}$ est un espace algébrique, on retrouve le faisceau $\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}$ comme défini précédemment.

Le groupoïde $[\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}]$ doit être vu comme un espace de module grossier "partiel" associé à $f_*[\mathcal{U}/\mathcal{G}]$ qui vit au-dessus de $\mathcal{S}$. En particulier, on a un morphisme de $\mathcal{S}$-groupoïde

$$f_*[\mathcal{U}/\mathcal{G}] \to [\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}].$$

Le groupoïde $[\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}]$ est en fait un champ (ceci provient du fait qu'on considère le faisceau $\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}$). Par contre, même sous des hypothèses très restrictives, il n'est pas algébrique. Le problème fondamental est que le faisceau des automorphismes d'un objet n'est pas représentable en général.

Comme $[\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}]$ n'est pas représentable en général, on ne peut pas parler de séparation. Par contre, on peut vérifier le critère valuatif de séparation.

Proposition 3.2 *Le morphisme* $[\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}] \to \mathcal{S}$ *vérifie le critère valuatif de séparation.*

Preuve : Donnons nous un anneau de valuation R de corps de fractions K et un morphisme $\phi\colon \operatorname{Spec} K \to [\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}]$. Quitte à faire un changement de base étale, on peut supposer que ϕ représente un $\mathcal{G}$-torseur $V \to \mathcal{U} \times_{\mathcal{S}} \operatorname{Spec} K$. Par suite, si V peut s'étendre en un torseur $\mathcal{V}$ au-dessus de $\mathcal{U} \times_{\mathcal{S}} \operatorname{Spec} R$, cela ne peut être que de manière unique car $\mathcal{V}$ est alors le normalisé de $\mathcal{U} \times_{\mathcal{S}} \operatorname{Spec} R$ dans l'anneau total des fractions de $\mathcal{V}$ puisque $\mathcal{U} \times_{\mathcal{S}} \operatorname{Spec} R$ est normal. $\square$

3.1 Dévissage local

La suite exacte (2.2) suggère d'introduire un analogue local de l'espace $[\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}]$:

Définition 3.3 Soient $\mathcal{S}$ un champ algébrique, $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une courbe propre et lisse et $j : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif $\mathcal{B}$.

On définit alors $[h_* \mathrm{R}^1 j_* \mathcal{G}]$ comme étant le groupoïde dont les objets au-dessus d'un schéma $\mathcal{S}$-schéma T sont les éléments de $(\mathrm{R}^1 j_{T*} \mathcal{G})(\mathcal{U} \times_{\mathcal{S}} T)$ et les morphismes entre deux tels objets ξ et ξ' sont les morphismes de $T \to \mathcal{S}$ qui envoient ξ sur ξ'.

Par localisation, on obtient un morphisme naturel

$$[\mathrm{R}^1 f_* \mathcal{G}] \to [h_* \mathrm{R}^1 j_* \mathcal{G}]$$

et la suite exacte (2.2) permet d'en préciser l'image et les fibres. Ce principe local global permet en particulier de montrer la proposition suivante dans laquelle on suppose $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Proposition 3.4 *Soient $\mathcal{S}$ un champ algébrique, $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une courbe propre et lisse et $j : \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif $\mathcal{B}$. Si l'entier p est premier à toutes les caractéristiques résiduelles de $\mathcal{S}$ alors $[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est représentable.*

Si le champ $\mathcal{S}$ est le spectre d'un corps algébriquement clos de caractéristique p. alors les points géométriques de $[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ sont les points d'une limite inductive de schémas : l'espace des modules formels de Harbater.

Preuve : On se ramène aisément au cas où $\mathcal{S}$ est un espace algébrique. Comme h est propre, les faisceau $\mathrm{R}^i h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont représentables. Utilisant la suite (2.2) on se ramène à montrer que $[h_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est représentable.

Par suite la première partie est classique (voir la section 2.2), la deuxième est démontrée par Harbater dans [Har80]. □

En particulier, même si $\mathcal{S}$ est un champ algébrique quelconque, on peut parler de l'ensemble des points géométriques à valeur dans $[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$: il suffit de considérer les fibres géométriques de $[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \to \mathcal{S}$ et l'ensemble de leurs points géométriques, ce qui a un sens d'après la proposition ci-dessus.

Le problème fondamental pour la représentabilité de $[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est que les déformations d'un torseur au-dessus d'un schéma affine sont toutes isomorphes. Si $[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ était représentable, il serait étale sur $\mathcal{S}$, or on voit aisément avec l'espace de modules formels d'Harbater que ce n'est pas le cas (cf. [Har80]).

3.2 Rigidification globale

Nous allons maintenant introduire un espace proche de ce que devrait être l'espace des déformations de $[h_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ si ce dernier était représentable. Pour cela, l'outil fondamental est la suite exacte (2.4).

Dans toute la suite on se fixe un premier p ainsi qu'une racine primitive p-ième ζ de 1 dans $\bar{\mathbb{Q}}$. On notera de plus $\lambda = \zeta - 1$ (cf. 2.3).

Définition 3.5 Soient $\mathcal{S}$ un $\mathbb{Z}[\zeta]$-champ algébrique, $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une courbe propre et lisse et $j\colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif. Nous noterons $\mathscr{T}_p(f)_{loc}$ le $\mathcal{S}$-groupoïde dont les objets au-dessus d'un morphisme $\alpha\colon T \to \mathcal{S}$ sont les éléments de $h_*\left((j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)})/\mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda^p)}\right)(T)$ et les morphismes entre deux objets ξ et ξ' sont les isomorphismes de α qui envoient ξ sur ξ'.

Nous noterons $\mathscr{T}_p'(f)_{loc}$ le groupoïde définit de manière similaire mais dont les objets sont les éléments de $h_*\left((j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda)})/\mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda)}\right)(T)$. En particulier, on a un morphisme $\phi\colon \mathscr{T}_p'(f)_{loc} \to \mathscr{T}_p(f)_{loc}$ (cf. 2.3).

On voit aisément que $\mathscr{T}_p(f)_{loc}$ est un champ. D'autre part, il existe un morphisme canonique

$$\mathscr{T}_p(f)_{loc} \to [h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$$

qui est un épimorphisme pour la topologie étale d'après la suite exacte (2.4).

Contrairement aux espaces précédemment introduit, $\mathscr{T}_p(f)_{loc}$ est presque représentable. On effet, on a la proposition suivante.

Proposition 3.6 *Le groupoïde $\mathscr{T}_p(f)_{loc}$ est une limite inductive de champs algébriques de type finis et lisses sur $\mathcal{S}$.*

Preuve : Quitte à faire un changement de base lisse, on peut supposer que $\mathcal{S}$ est en fait un schéma. Notons $\mathcal{B}$ un diviseur de Cartier relatif tel que $\mathcal{U} = \mathcal{C} \setminus |\mathcal{B}|$. Alors on voit qu'ensemblistement (les structures de groupes n'étant pas les mêmes) on a

$$h_*\left((j_*\mathscr{G}_{\mathcal{U}}^{(\lambda^p)})/\mathscr{G}_{\mathcal{C}}^{(\lambda^p)}\right) = \varinjlim_n h_*\left(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n\mathcal{B})/\mathcal{O}_{\mathcal{C}}\right)$$

et ce dernier est représentable car $\mathcal{B}$ est fini et plat sur $\mathcal{S}$.

Finalement la lissité provient de la platitude de $\mathcal{O}_C(n\mathcal{B})/\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ et du fait que le faisceau de ses sections est représentable par $\mathrm{SpecSym}\left(\mathcal{O}_C(n\mathcal{B})/\mathcal{O}_{\mathcal{C}}\right)^\vee$. $\square$

On peut donc voir $\mathscr{T}_p(f)_{loc}$ comme une rigidification de $[h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$. Nous allons maintenant introduire une rigidification de $[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ en utilisant $\mathscr{T}_p(f)_{loc}$ et la suite exacte (2.2).

Définition 3.7 Soient $\mathcal{S}$ un $\mathbb{Z}[\zeta]$-champ algébrique, $h\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ une courbe propre et lisse et $j\colon \mathcal{U} \to \mathcal{C}$ le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif. On note

$$\mathscr{T}_p(f) = [\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times_{[h_*\mathrm{R}^1 j_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]} \mathscr{T}_p(f)_{loc}.$$

Si $\mathcal{S}$ est un espace algébrique, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{R}^1 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathscr{T}_p(f) \to \mathscr{T}_p(f)_{loc} \to \mathrm{R}^2 h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

D'autre part, comme h est propre, $\mathrm{R}^i h_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est représentable pour tout $i \geq 0$. La proposition précédente montre alors que $\mathscr{T}_p(f)$ est un champ et est limite inductive de champs algébriques.

Proposition 3.8 *Le morphisme canonique* $\mathscr{T}_p(f) \to [\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ *est un épimorphisme pour la topologie étale et son noyau est* $\mathscr{T}'_p(f)_{loc}$.

Preuve : Par descente, on se ramène au cas où $\mathcal{S}$ est un espace algébrique. Les champs considérés sont alors des faisceaux. Le résultat découle du diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{R}^1 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathscr{T}_p(f) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{T}_p(f)_{loc} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{R}^2 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{R}^1 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & h_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathrm{R}^2 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

et du fait que le morphisme $\mathscr{T}_p(f)_{loc} \to h_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un épimorphisme pour la topologie étale (voir la suite exacte (2.4)). $\square$

Remarque 3.9 Dire que le morphisme $\mathscr{T}_p(f) \to [\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est un épimorphisme revient à dire que si on se donne un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-torseur on peut l'écrire localement sous la forme $\frac{(\lambda u+1)^p-1}{\lambda^p} = t$.

D'autre part, deux morphismes $T \to \mathscr{T}_p(f)$ sont égaux si et seulement s'ils correspondent localement à des torseurs $\frac{(\lambda u+1)^p-1}{\lambda^p} = t_1$ et $\frac{(\lambda u+1)^p-1}{\lambda^p} = t_2$ avec $t_1 - t_2$ n'ayant pas de pôles (i.e. on ne prend pas de quotients supplémentaires).

Nous pouvons maintenant donner une première application de ces résultats.

Corollaire 3.10 *Supposons que* f *est affine et que* $\mathcal{S}$ *est un schéma. Alors le morphisme* $f_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{R}^2 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *est surjectif.*

Preuve : On a un diagramme commutatif dont la première ligne est exacte

$$\begin{tikzcd}
f_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathrm{R}^2 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathrm{R}^2 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\
\mathscr{T}_p(f)_{loc} \arrow[u] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

D'autre part, le morphisme $f_* \mathrm{R}^1 j_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathrm{R}^2 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est surjectif au niveau des points géométriques car $\mathrm{R}^2 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$ en chaque point (car f est affine). Par suite, il en est de même du morphisme $\mathscr{T}_p(f)_{loc} \to \mathrm{R}^2 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et comme $\mathscr{T}_p(f)_{loc}$ est ind-représentable par des schémas lisses (cf. proposition 3.6) et que $\mathrm{R}^2 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est constructible, on trouve que $\mathscr{T}_p(f)_{loc} \to \mathrm{R}^2 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un épimorphisme de faisceaux étales. $\square$

Ce corollaire suggère que $\mathrm{R}^2 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$, ce qui est vrai lorsque S est le spectre d'un corps, les démonstrations étant complètement différente selon que la caractéristique est p ou première à p. Des calculs supplémentaires nous poussent à faire la conjecture suivante.

Conjecture 3.11 *Soit* S *un schéma,* $h \colon \mathcal{C} \to S$ *une courbe propre et lisse et* $f \colon \mathcal{U} \to S$ *le complémentaire dans* $\mathcal{C}$ *d'un diviseur de Cartier relatif. Supposons* f *affine. Alors* $\mathrm{R}^2 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 0$.

Corollaire 3.12 *Supposons la conjecture 3.11 vraie. Donnons nous un groupe G et un sous-groupe p-cyclique H de G distingué. Alors on a des suites exactes*

$$0 \to h_*\mathrm{R}^1 j_* H \to h_*\mathrm{R}^1 j_* G \to h_*\mathrm{R}^1 j_* G/H \to 0$$

$$0 \to \mathrm{R}^1 f_* H \to \mathrm{R}^1 f_* G \to \mathrm{R}^1 f_* G/H \to 0$$

Preuve : Cela découle de la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \to H \to G \to G/H \to 0.$$

□

Corollaire 3.13 *Supposons la conjecture 3.11 vraie. Soit G un groupe résoluble. Alors il existe une limite inductive de champs algébriques T de type fini sur S et un morphisme $T \to [h_*\mathrm{R}^1 j_* G]$ qui est un épimorphisme pour la topologie étale.*

Preuve : Provient du cas $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et du corollaire ci-dessus par une récurrence immédiate. □

3.3 Le cas équivariant

Lorsque le groupe G est "compliqué", il est parfois plus simple de travailler avec des sous-champs de $[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ qu'avec les champs $[\mathrm{R}^1 f_* G]$. Nous introduisons ici ceux qu'il faut regarder.

Comme précédemment, on fixe un champ algébrique $\mathcal{S}$ et une courbe $f : \mathcal{U} \to \mathcal{S}$ qui est le complémentaire d'un diviseur de Cartier relatif dans un courbe lisse. Donnons nous également une action d'un groupe fini abstrait P sur f qui se prolonge à la compactification. Le champ $[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est alors naturellement muni d'une action de P et on peut considérer le champ des points fixes $[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^P$ (comparer avec la proposition 1.3). C'est ce champ que nous aimerions mieux comprendre. Pour cela, nous allons définir des analogues équivariants des espaces introduits précédemment.

Définition 3.14 Définissons $\mathscr{T}_p^P(f)$ par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{T}_p^P(f) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{T}_p(f) \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathscr{T}_p(f) \times \prod_{\sigma\in P, \sigma\neq 1} \mathscr{T}'_p(f) \arrow[r] & \prod_{\sigma\in P} \mathscr{T}_p(f)
\end{tikzcd}$$

l'application Δ étant l'immersion diagonale et la flèche du bas étant définie par $(a, (b_\sigma)_\sigma) \mapsto (a, (\sigma(a) - \psi(b_\sigma)))$ (l'application ψ étant définie dans a section 2.3).

On a deux immersions fermées $\mathscr{T}_p(f)^P \subset \mathscr{T}_p^P(f) \subset \mathscr{T}_p(f)$, $\mathscr{T}_p(f)^P$ désignant le lieu des points fixes de $\mathscr{T}_p(f)$ sous l'action de P qui provient de sa définition fonctorielle, et la deuxième immersion est donnée par la projection

$$\mathscr{T}_p^P(f) \to \mathscr{T}_p(f) \times \prod_{\sigma\in P,\sigma\neq 1} \mathscr{T}'_p(f) \stackrel{pr_1}{\to} \mathscr{T}_p(f).$$

En général, aucune de ces injections n'est un isomorphisme.

La proposition suivante montre que c'est la définition dont nous avons besoin pour construire une rigidification.

Proposition 3.15 *On a une suite exacte canonique*

$$0 \to \mathscr{T}'_p(f) \to \mathscr{T}_p^P(f) \to [\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^P \to 0.$$

Preuve : Nous allons tout d'abord définir les différents morphismes. Le morphisme de gauche est donné par $b \mapsto (\psi(b), (\sigma(b) - b)_\sigma)$, ce qui définit bien un élément de $\mathscr{T}_p^P(f)$ car ψ commute à l'action de P. Considérons un élément de $a \in \mathscr{T}_p^P(f)$. Notons $\bar{a}$ son image dans $\mathscr{T}_p(f)$ (*via* la première projection). Soit $\sigma \in P$. Comme $a \in \mathscr{T}_p^P(f)$, on sait que $\sigma(\bar{a})$ est de la forme $\bar{a} + \psi(b)$. Par suite, $\bar{a}$ définit un élément de $[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^G$.

Il reste à montrer que cette suite est exacte. Montrons d'abord l'exactitude au milieu. Soit $a \in \mathscr{T}_p^P(f)$ dont l'image dans $[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^P$ est triviale et notons $(\bar{a}, (b_\sigma)_\sigma)$ son image dans $\mathscr{T}_p(f) \times \prod_{\sigma \in P, \sigma \neq 1} \mathscr{T}'_p(f)$. Comme l'image de a est triviale, elle est de la forme $\psi(\lambda)$ d'après la proposition 3.8. D'autre part, $a \in \mathscr{T}_p^P(f)$, ce qui impose que pour tout $\sigma \in P \setminus \{1\}$ on a $\sigma(\psi(\lambda)) - \psi(b_\sigma) = \psi(\lambda)$. Comme ψ est injective et commute avec σ on trouve $b_\sigma = \sigma(\lambda) - \lambda$. Ce qui est bien le résultat annoncé.

Regardons maintenant la surjectivité. Pour cela, considérons un $\xi \in [\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^P(T)$. D'après la proposition 3.8, on peut relever ξ en un $\widetilde{a} \in \mathscr{T}_p(f)$. Comme $\widetilde{a}$ définit un torseur invariant sous P, on voit que pour tout $\sigma \in P$ l'élément $\sigma(a) - a$ est de la forme $\psi(b_\sigma)$. $\square$

Soit T un schéma et $\alpha\colon T \to \mathscr{T}_p^P(f)$ un morphisme. Quitte à prendre un revêtement étale de T, on peut supposer que α définit un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-torseur qui est invariant sous l'action de P. En particulier, si le $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-torseur définit par α est connexe alors il définit un G-torseur pour un certain groupe G (cf. proposition 1.3). Notons $\mathscr{T}_p^P(f)_G$ le lieu des points de $\mathscr{T}_p^P(f)$ qui définissent des torseurs sous le groupe G. Alors le raisonnement ci-dessus montre que $\mathscr{T}_p^P(f)_G$ est ouvert et fermé dans $\mathscr{T}_p^P(f)$ et de plus on a une décomposition

$$\mathscr{T}_p^P(f) = \coprod_{0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to G \to P \to 0} \mathscr{T}_p^P(f)_G$$

3.4 Un ersatz de produit

Nous aurons besoin dans la section suivante de considérer des produits de la forme

$$\mathscr{T}_p(f) \times_{[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]} T$$

pour un morphisme $T \to [\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ donné. Le problème est que de tels produits ne sont pas représentables en général. Nous allons donc introduire maintenant une alternative utilisant les propriétés du morphisme $\mathscr{T}_p(f) \to [\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$.

Fixons un morphisme $T \to [\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ et supposons qu'il existe un relèvement $\phi\colon T \to \mathscr{T}_p(f)$. On définit alors $\mathscr{T}_p(f) \widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]} T$ comme étant l'image schématique du morphisme

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{T}'_p(f)\times T & \to & \mathscr{T}_p(f)\times T \\ (a,b) & \mapsto & (a+\phi(b),b)\end{array}$$

On voit que $\mathscr{T}_p(f)\widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]}T$ ainsi que l'inclusion $\mathscr{T}_p(f)\widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]}T \to \mathscr{T}_p(f)\times T$ sont indépendants du relèvement ϕ car deux relèvements diffèrent d'un élément de $\mathscr{T}'_p(f)$. Cette construction est donc canonique. D'autre part, elle commute aux changements de bases plats mais pas aux changements de bases quelconques à priori (car c'est la cas de l'image schématique).

On peut alors construire un champ algébrique $\mathscr{T}_p(f)\widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]}T$ dans le cas général par recollement car tout morphisme $T\to[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ peut être relevé localement pour la topologie étale. On obtient de plus un morphisme $\mathscr{T}_p(f)\widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]}T\to\mathscr{T}_p(f)\times T$.

On peut remarquer que si $[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est représentable, alors il est séparé d'après la proposition 3.2 et donc le morphisme $\mathscr{T}_p(f)\times_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]}T\to\mathscr{T}_p(f)\times T$ est une immersion fermée. On a donc une immersion fermée $\mathscr{T}_p(f)\widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]}T\to\mathscr{T}_p(f)\times_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]}T$ qui est une bijection. Seule la structure de sous-schéma fermé de $\mathscr{T}_p(f)\times T$ est éventuellement différente.

On a finalement la propriété suivante qui est une conséquence directe du fait que $\mathscr{T}_p(f)\to[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est un épimorphisme pour la topologie étale.

Proposition 3.16 *Le morphisme canonique $\mathscr{T}_p(f)\widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]}T\to T$ est un épimorphisme pour la topologie étale.*

4 Des courbes équivariantes aux torseurs

Soient g un entier et G un groupe abstrait fini. Nous noterons $\mathcal{M}_g[G]$ l'espace des modules des courbes propres et lisses de genre g munies d'une action de G fidèle dans chaque fibre. Cet espace a été introduit par Tufféry dans [Tuf93] et a été étudié indépendemment pas plusieurs auteurs.

Soient $\mathcal{D}\to S$ une telle courbe et H un sous-groupe de G. Dans [Sam66], Samuel montre que le quotient $\mathcal{D}\to\mathcal{D}/H$ commute aux changements de bases quelconques et que $\mathcal{D}/H\to S$ est une courbe propre lisse (voir aussi [BM04] pour une autre preuve). Par suite, le genre du quotient $\mathcal{D}/H$ est localement constant. Il est donc naturel de s'intéresser aux champs algébriques $\mathcal{M}_{g,g'}[H\subset G]$ des courbes propres et lisses de genre g telles que le quotient par H est de genre g'. On obtient ainsi une décomposition

$$\mathcal{M}_g[H\subset G]=\coprod_{g'}\mathcal{M}_{g,g'}[H\subset G]$$

en sous champs ouverts et fermés.

Dans la suite, nous fixerons un sous-groupe distingué $H\lhd G$ et noterons $\mathcal{M}_{g,g'}[H\lhd G]$ afin de conserver visuellement l'information.

La formation du quotient étant ici fonctorielle, on obtient un morphisme $\mathcal{M}_{g,g'}[H\lhd G]\to\mathcal{M}_{g'}[G/H]$ définit par $\mathcal{D}\to\mathcal{D}/H$.

Soient $\mathcal{D} \to S$ une courbe propre et lisse munie d'une action fidèle de G et dont le quotient est de genre g'. Notons $n = (2g-2) - (2g'-2)|G|$ et B le diviseur de branchement du morphisme $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/H$ (cf. [Rom02] II §2.2). Il est prouvé dans loc. cit. que B est un diviseur de Cartier relatif dont la formation commute au changement de base.

Notons $\mathcal{M}_{g'}^{[n]}[G/H]$ l'espace des modules de genre g' munie d'une action de G/H fidèle dans chaque fibre, et d'un diviseur de Cartier relatif de degré n stable sous l'action de G/H. Romagny a prouvé que cet espace est un champ algébrique (cf. [Rom02] Corollaire II.1.2.5 ou cela est fait sans l'action de G/H mais cette dernière hypothèse ne complique pas la preuve).

D'après ce qui a été dit précédemment on a un morphisme

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G] & \to & \mathcal{M}_{g'}^{[n]}[G/H] \\ & (\mathcal{D} \to S) & \mapsto & (\mathcal{D}/H \to S, B) \end{array}$$

4.1 Interprétation de l'espace tangent relatif

Ce morphisme va être fondamental pour la suite. On peut d'ailleurs expliciter l'espace tangent relatif très aisément en utilisant une généralisation du principe local-global de Bertin et Mézard obtenu dans [BM00]. En effet, soit k un corps, $D \to \operatorname{Spec} k$ une courbe propre et lisse munie d'une action fidèle de G et telle que le quotient $C := D/H$ soit de genre g'. Notons $\pi \colon D \to C$ le morphisme quotient et $\mathrm{H}^i_G(D, \Omega^\vee_{D/k})$ la cohomologie équivariantes du faisceau tangent. On a une suite exacte provenant de la suite spectrale associée au foncteur dérivé de $\mathcal{F} \mapsto \mathrm{H}^0_{G/H}(D/H, \pi_*^H \mathcal{F}) = \mathrm{H}^0_G(D, \mathcal{F})$.

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{H}^1_{G/H}(D/H, \pi_*^H \Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^1_G(D, \Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^0_{G/H}(D/H, \mathrm{R}^1\pi_*^H \Omega^\vee_{D/k}) \to \\ \mathrm{H}^2_{G/H}(D/H, \pi_*^H \Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^2_G(D, \Omega^\vee_{D/k}) \end{aligned}$$

Cette suite exacte a une interprétation très simple en terme de déformations. Le terme $\mathrm{H}^1_G(D, \Omega^\vee_{D/k})$ classifie les déformations G-équivariantes du premier ordre de D. Le terme $\mathrm{H}^0_{G/H}(D/H, \mathrm{R}^1\pi_*^H \Omega^\vee_{D/k})$ classifie certaines déformations H-équivariantes locales dont l'image doit être nulle dans $\mathrm{H}^2_{G/H}(D/H, \pi_*^H \Omega^\vee_{D/k})$ afin de définir une déformation globale.

Les termes $\mathrm{H}^i_{G/H}(D/H, \pi_*^H \Omega^\vee_{D/k})$ peuvent s'interpréter en terme de déformations G/H-équivariantes de C munie de son diviseur B. En effet, on a un morphisme canonique de faisceau $\pi_*^H \Omega^\vee_{D/k} \to \Omega^\vee_{C/k}$ qui est injectif et dont le conoyau $\mathcal{O}_B$ correspond au diviseur de branchement (avec multiplicité).

On a donc une suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0_{G/H}(C, \mathcal{O}_B) \to \mathrm{H}^1_{G/H}(D/H, \pi_*^H \Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^1_{G/H}(C, \Omega^\vee_{C/k}) \\ \to \mathrm{H}^1_{G/H}(C, \mathcal{O}_B) \to \mathrm{H}^2_{G/H}(D/H, \pi_*^H \Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^2_{G/H}(C, \Omega^\vee_{C/k}) \end{aligned}$$

dans laquelle le terme $\mathrm{H}^1_{G/H}(C, \Omega^\vee_{C/k})$ correspond aux déformations G/H-équivariantes de C et $\mathrm{H}^2_{G/H}(C, \Omega^\vee_{C/k})$ correspond aux obstructions à la déformations G/H-équivariantes de C.

Finalement, le terme $\mathrm{H}^0_{G/H}(C, \mathcal{O}_B)$ correspond aux déformations équivariantes du diviseur de branchement.

En résumé, on a la proposition suivante.

Proposition 4.1 *L'espace tangent relatif du morphisme $\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G] \to \mathcal{M}^{[n]}_{g'}[G/H]$ en un point correspondant à une courbe D s'identifie naturellement avec le noyau du morphisme*

$$\mathrm{H}^0_{G/H}(D/H, \mathrm{R}^1\pi^H_* \Omega^\vee_{D/k}) \to \mathrm{H}^2_{G/H}(D/H, \pi^H_* \Omega^\vee_{D/k}),$$

l'espace source classifiant les déformations locales H-équivariantes qui sont invariantes sous l'action de G/H.

En particulier, les déformations équivariantes de B et de C sont nulles dans l'espace tangent relatif.

4.2 Lien avec un espace de torseur et rigidification

Encore une fois, considérons une courbe propre et lisse $\mathcal{D} \to S$ munie d'une action de G fidèle dans chaque fibres et notons B le diviseur de branchement du morphisme $\pi \colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}/H$. Alors par définition le morphisme $\mathcal{D} \setminus |\pi^{-1}(B)| \to \mathcal{D}/H \setminus |B|$ est étale et est donc un H-torseur qui est invariant sous l'action de G/H d'après la proposition 1.3.

Notons $h : \mathfrak{C} \to \mathcal{M}^{[n]}_{g'}[G/H]$ la courbe universelle, $\mathfrak{B}$ le diviseur universel sur cette courbe et $f \colon \mathfrak{U} := \mathfrak{C} \setminus |\mathfrak{B}| \to \mathcal{M}^{[n]}_{g'}[G/H]$.

La construction ci-dessus donne donc un morphisme naturel

$$\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G] \to [\mathrm{R}^1 f_* H]^{G/H}.$$

D'autre part, comme H agit trivialement sur $[\mathrm{R}^1 f_* H]$ par construction, on a une factorisation

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]/\!\!/H \arrow[d] \\ & {[\mathrm{R}^1 f_* H]^{G/H}} \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]/\!\!/H$ désigne le 2-quotient obtenu en quotientant les schémas d'automorphismes par le sous-groupe distingué H (cf. [Rom02] §I.3 pour plus de précisions).

Si on regarde la restriction de ce morphisme à la caractéristique 0 alors on sait que $[\mathrm{R}^1 f_* H]^{G/H}$ est représentable par un champ algébrique et on peut même montrer que le morphisme construit ci-dessus est une immersion fermée. Nous y reviendrons dans la partie 4.4.

Nous en arrivons maintenant au cœur de la construction.

Proposition 4.2 *Reprenons les notations ci-dessus et supposons que $H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier. Le morphisme canonique*

$$\mathscr{T}^{G/H}_p(f) \widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^{G/H}} \big(\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]/\!\!/H\big) \to \mathscr{T}^{G/H}_p(f)$$

induit un isomorphisme

$$\left(\mathscr{T}_p^{G/H}(f)\widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^{G/H}}\left(\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]/\!\!/H\right)\right)_{red} \to \left(\mathscr{T}_p^{G/H}(f)_G\right)_{\mathfrak{d}=n}$$

la fonction $\mathfrak{d}$ désignant la différente définie sur $\left(\mathscr{T}_p^{G/H}(f)_G\right)$ à l'aide du torseur universel (cf. 2.4).

En particulier, on a un épimorphisme

$$\left(\mathscr{T}_p^{G/H}(f)_G\right)_{\mathfrak{d}=n} \to \left(\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]/\!\!/H\right)_{red}$$

qui correspond, sur les points géométriques, à prendre la normalisation.

Preuve : Considérons le morphisme

$$\mathscr{T}_p^{G/H}(f)\widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^{G/H}}\left(\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]/\!\!/H\right) \to \mathscr{T}_p^{G/H}(f).$$

Par définition, un point $\mathrm{Spec}\, k \to \left(\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]/\!\!/H\right)$ induit un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-torseur dont la différente est n, et également un G-torseur. On obtient donc un morphisme

$$\left(\mathscr{T}_p^{G/H}(f)\widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^{G/H}}\left(\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]/\!\!/H\right)\right)_{red} \to \left(\mathscr{T}_p^{G/H}(f)_G\right)_{\mathfrak{d}=n}$$

D'après la proposition 1.1, pour montrer que ce morphisme est un isomorphisme, il suffit de montrer que c'est un morphisme sur les points à valeurs dans un corps et les points à valeurs dans un anneau de valuation discrète, ainsi que la nullité de l'espace tangent relatif (on prendra garde que les champs en présence sont en fait des limites de champs noethériens d'après la proposition 3.6).

Le premier point s'obtient en prenant la normalisation des torseurs définis sur un corps, ce qui donne automatiquement une courbe lisse de bon genre.

Le point concernant les anneaux de valuations discrètes s'obtient en fait de la même manière modulo le lemme 0.1 qui montre qu'on obtient bien une courbe lisse.

Il reste donc à voir la nullité de l'espace tangent relatif. Pour cela, on peut se placer au-dessus d'un point géométrique de $\mathcal{M}_{g'}^{[n]}[G/H]$ de corps résiduel k.

Supposons que k est de caractéristique première à p. La description explicite de la proposition 4.1 permet de voir que l'espace tangent relatif du morphisme

$$\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G] \to \mathcal{M}_{g'}^{[n]}[G/H]$$

en le point considéré est nul car le terme $\mathrm{R}^1\pi_*^H$ est nul. Le résultat est donc évident.

Supposons maintenant que k est de caractéristique p. Il suffit en fait de montrer que le morphisme

$$\mathscr{T}_p^{G/H}(f)\widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^{G/H}}\left(\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]/\!\!/H\right) \to \mathscr{T}_p^{G/H}(f)$$

induit une injection sur les espaces tangents. Or on sait que le morphisme

$$\mathscr{T}_p^{G/H}(f) \to \mathscr{T}_p(f)$$

est une immersion fermée. Il suffit donc de montrer que le morphisme

$$\mathscr{T}_p(f)\widetilde{\times}_{[\mathrm{R}^1 f_*\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]}\big(\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]/\!\!/H\big) \to \mathscr{T}_p(f)$$

induit une injection sur les espaces tangents. Par suite, on peut supposer que $H = G$. Suivant Harbater dans [Har80], on peut identifier $\mathscr{T}_p(f)$ à $\frac{1}{x}k[\frac{1}{x}]$.

D'autre part, on peut remplacer l'espace tangent en un point de $\mathcal{M}_{g,g'}[H \lhd G]$ par la description explicite obtenu dans la proposition 4.1.

Finalement, le résultat provient de l'étude des déformations non obstruée obtenue par Pries dans [Pri02] Theorem 2.2.10 (description de $\mathcal{M}_\phi$). □

Remarque 4.3 Dans le théorème précédent, il est possible de donner une preuve dans le cas $H \neq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, mais elle dépend de la conjecture 3.11, ce qui n'est pas le cas de la démonstration ci-dessus. en effet, supposant H résoluble, on peut remplacer $\mathscr{T}_p(f)$ par une rigidification représentable qui existe conjecturalement d'après le corollaire 3.13. L'étude de l'espace tangent est alors plus compliquée (le groupe H n'étant même pas *a priori* cyclique) et [Pri02] ne couvre que le cas $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rtimes \boldsymbol{\mu}_\ell$.

Corollaire 4.4 *Soit S un schéma réduit, $\mathcal{C} \to S$ une courbe propre et lisse de genre g', B un diviseur de Cartier relatif de degré n sur $\mathcal{C}$, G un groupe fini résoluble et $\mathcal{V} \to \mathcal{C} \setminus |B|$ un $\mathcal{G}$-torseur. Supposons que $\mathfrak{d}_{\mathcal{V}/\mathcal{C}\setminus D} \colon S \to \mathbb{N}$ est constante et que $\mathcal{V} \to S$ soit géométriquement connexe. Alors il existe une unique courbe propre et lisse $\mathcal{D} \to S$ munie d'une action de G et d'une immersion ouverte G-équivariante $\mathcal{V} \to \mathcal{D}$.*

Preuve : La démonstration se fait par récurrence sur $|G|$. Notons $\mathcal{U} := \mathcal{C} \setminus B$. Supposons tout d'abord que $|G| = p$ est premier. Il existe une extension étale surjective $S' \to S$ telle que $\mathcal{V}_{S'} \to \mathcal{U}_{S'}$ provienne d'un élément de $\mathscr{T}_p(f)_{\mathfrak{d}=n}(S')$. Le morphisme de la proposition 4.2 permet alors de montrer le corollaire pour $\mathcal{V}_{S'} \to \mathcal{U}_{S'}$. On obtient alors le résultat sur S par descente étale en utilisant la section 2.5.

Supposons maintenant G quelconque. Comme G est résoluble, il existe un sous groupe normal H de G d'ordre premier. D'après la proposition 2.5, la différente du torseur $\mathcal{V}/H \to \mathcal{U}$ est constante. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence pour compactifier $\mathcal{V}/H$. D'autre part, toujours grace à la propriété 2.5, on sait que la différente du torseur $\mathcal{V} \to \mathcal{V}/H$ est constante, on peut donc compactifier $\mathcal{V}$ en une courbe propre et lisse. L'action de G se prolonge alors à cette compactification *via* la section 2.5. □

Il est évidement possible d'enlever l'hypothèse que $\mathcal{V} \to S$ est géométriquement connexe, on obtient alors une compactification propre et lisse mais qui n'est pas géométriquement connexe et donc n'est pas une courbes au sens classique du terme.

4.3 Généralisation

Nous pouvons déduire du cas global un théorème semblable dans le cas local généralisant le lemme 1.2.

Théorème 4.5 *Soit A un anneau local strictement hensélien de corps résiduel k de caractéristique p, s le point fermé de* $\operatorname{Spec} A$*, G un groupe résoluble. Notons $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} A[[x]]$ et donnons nous un élément $t \in A[[x]]$ qui est non nul modulo l'idéal maximal de A. Donnons nous un G-torseur $\mathcal{V} \to \operatorname{Spec} A[[x]][1/t]$. Pour tout point $P \in \operatorname{Spec} A$ de corps résiduel $\kappa(P)$, notons Y la normalisation de $\mathcal{X}_P$ dans l'anneau total des fontions de $\mathcal{V}_P$ et $\mathfrak{d}(P)$ la longueur (en tant que $\kappa(P)$-module) du faisceau des différentielles relatives $\Omega_{Y/\mathcal{X}_p}$. Supposons que l'application $\mathfrak{d}$ est constante. Alors il existe un morphisme $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ fini et plat muni d'une action de G telle que $\mathcal{V}$ s'identifie de manière équivariante à un ouvert dense de $\mathcal{Y}$ et tel que $\mathcal{Y} \to \operatorname{Spec} A$ soit géométriquement régulier.*

La démonstration est essentiellement la même que celle de [Kat86], Theorem 2.1.6 et repose sur le principe local-global (2.2) en complétant $\mathcal{X}$ en une courbe propre et lisse, globalisant le torseur $\mathcal{V}$ au-dessus de cette courbe, appliquant le corollaire 4.4 puis en localisant.

4.4 Application au cas modéré

Nous allons maintenant appliqué les résultats obtenus jusqu'à maintenant à l'étude de l'espace $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$. On sait que ce champ algébrique est lisse sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$ il est donc en particulier réduit. Les résultats de cette section sont bien connus, seul le traitement de ces questions est nouveaux.

Pour étudier cet espace, il est commode d'en introduire un autre qui est un peu plus rigide. Notons $\ell := \frac{2g-2-p(2g'-2)}{p-1}$. On sait que si $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est non vide, alors d'après la formule de Hurwitz ce nombre est un entier (la réciproque est également vraie). On supposera donc que c'est le cas.

Notons $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell$ l'espace des modules des couples $(\mathcal{C} \to S, (e_1, \ldots, e_\ell))$ où $\mathcal{C} \to S$ est une courbe propre et lisse de genre g munie d'une action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ fidèle dans chaque fibre, et les e_i sont des section $S \to \mathcal{C}$ invariantes sous $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ telles que le lieu de ramification est précisément $\cup_i \operatorname{supp}(e_i)$. En oubliant les sections e_i, on obtient un morphisme

$$\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}] \to \mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$$

D'autre part, $\mathfrak{S}_\ell$ agit sur ce morphisme par permutation des e_i. Il est alors aisé de voir que le morphisme induit

$$\left(\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]\right)/\mathfrak{S}_\ell \to \mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$$

est un isomorphisme. En effet, si $\mathcal{C} \to S$ est un point de $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$ alors le diviseur de ramification est localement (pour la topologie étale) une puissance $p-1$-ième d'une somme de sections.

Nous allons donc nous concentrer sur $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$ dans un premier temps.

Notons $\mathcal{M}_{g'}^\ell$ l'espace des modules des courbes de genre g' munie de ℓ sections distinctes (ordonnées), $h : \mathfrak{C} \to \mathcal{M}_{g'}^\ell \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$ la courbe universelle, $e_1 \ldots, e_\ell$ les sections universelles et $\mathfrak{U}$ le complémentaire dans $\mathfrak{C}$ du support des e_i. Notons de plus $f : \mathfrak{U} \to \mathcal{M}_{g'}^\ell \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$ le morphisme induit.

On sait que $[\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ est représentable d'après la proposition 3.4, et en utilisant les mêmes techniques que pour la proposition 4.2, on montre aisément qu'on a un isomorphisme

$$\left(\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]\right) /\!/ (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to [\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_{\mathfrak{d}=(p-1)\ell}.$$

Reprenons la suite exacte (2.2). Dans le cas où p est premier à toute les caractéristiques résiduelle et que la base contient une racine primitive p-ième, les calculs obtenus dans la partie 2.2 peuvent alors être appliqués ici car ils sont suffisamment canonique (il suffit en effet que les sections soient ordonnées et qu'on fixe dès le début un isomorphisme $\boldsymbol{\mu}_p \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). On a donc une suite exacte

$$0 \to [\mathrm{R}^1 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \to [\mathrm{R}^1 f_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\ell_{\mathcal{M}_{g'} \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(-1)_{\mathcal{M}_{g'} \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]} \to 0.$$

Prenant en compte la condition $\mathfrak{d} = (p-1)\ell$, on voit alors que l'espace $\left(\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]\right) /\!/ (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est muni d'un action de $[\mathrm{R}^1 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ et le quotient s'identifie naturellement avec

$$\left\{(m_i) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\})^\ell | \sum m_i = 0\right\}_{\mathcal{M}_{g'} \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]}$$

Utilisant l'isomorphisme

$$\left(\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]_\ell \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]\right) /\mathfrak{S}_\ell \to \mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$$

on obtient alors la proposition suivante.

Proposition 4.6 *Le champ algébrique* $\left(\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]\right) /\!/ (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ *est naturellement muni d'une action de* $[\mathrm{R}^1 h_* \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$ *et le quotient s'identifie avec*

$$\left(\left\{(m_i) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\})^\ell | \sum m_i = 0\right\} /\mathfrak{S}_\ell\right)_{\mathcal{M}_{g'} \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]}$$

De plus, le morphisme quotient induit une bijection entre les composantes irréductibles des espaces de départ et d'arrivé.

Preuve : Seul la dernière assertion est à démontrer, elle provient de [Cor87] Remark 1. □

Comme $\mathcal{M}_{g'}$ est géométriquement irréductible, on a une description complète des composantes irréductibles de $\mathcal{M}_{g,g'}[\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] \times \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[\zeta, \frac{1}{p}]$.

Dans le cas où p n'est pas premier, il est possible d'obtenir une description semblable. Les différences proviennent du calcul de la fonction $\mathfrak{d}$ ainsi que de l'irréductibilité des composantes.

Références

[BM00] J. Bertin and A. Mézard, *Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques*, Invent. Math. **141** :1 (2000), 195–238.

[BM04] José Bertin and Ariane Mézard, *Problem of formation of quotients and base change*, Manuscripta Math. **115** :4 (2004), 467–487.

[Cor87] Maurizio Cornalba, *On the locus of curves with automorphisms*, Ann. Mat. Pura. Appl. (4) **149** (1987), 135–151.

[EGA] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32** (1961-1967).

[Gir71] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179.

[GM99] Barry Green and Michel Matignon, *Order p automorphisms of the open disc of a p-adic field*, J. Amer. Math. Soc. **12** :1 (1999), 269–303.

[Har80] D. Harbater, *Moduli of p-covers of curves*, Comm. Algebra **8** :12 (1980), 1095–1122.

[Kat86] N. Katz, *Local-to-global extensions of representations of fundamental groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **36** :4 (1986), 69–106.

[Liu02] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford University Press, 2002, Oxford Graduate Texts in Mathematics, No. 6.

[Méz00] Ariane Mézard, *Fundamental group*, Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998), Progr. Math., vol. 187, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 141–155.

[Mil80] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[Pri02] Rachel J. Pries, *Families of wildly ramified covers of curves*, Amer. J. Math. **124** :4 (2002), 737–768.

[Rom02] M. Romagny, *Sur quelques aspects des champs de revêtements de courbes algébriques*, Thèse de doctorat, Université de Grenoble I, 2002.

[Sam66] P. Samuel, *Groupes finis d'automorphismes des anneaux de séries formelles*, Bull. Sci. Math. (2) **90** (1966), 97–101.

[SOS89] T. Sekiguchi, F. Oort, and N. Suwa, *On the deformation of Artin-Schreier to Kummer*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22** :3 (1989), 345–375.

[Tuf93] S. Tufféry, *Déformations de courbes avec action de groupe*, Forum Math. **5** :3 (1993), 243–259.