Om rättvisa val

Leif Arkeryd

Göteborgs universitet

Den *axiomatiska metoden* i matematiken kan sägas bestå i att man studerar konsekvenserna av en uppsättning givna (och förhoppningsvis intressanta) krav (= axiom = postulat). Så kan t ex de naturliga talens egenskaper studeras utgående från Peanos axiom, och geometri i planet har studerats utgående från Euklides' axiom. Också för att matematiskt modellera en *praktisk situation* fastlägger man krav som modellen approximativt eller exakt måste uppfylla. Det här specialarbetet utgår från ett försök att modellera åsikter genom röstning och val, och studerar konsekvenserna av några rimliga krav på ett valförfarande.

Ett exempel. Skolans fritidsklubb har årsmöte och på dagordningen finns bl a följande två punkter.

i) Val av ny ordförande. Det finns bara ett förslag och medlemmarna skall ta ställning till om den föreslagne skall utses.

ii) Nya medlemsavgifter. Det finns de tre förslagen A, B, C. Förslag A vill utvidga verksamheten, men innebär en väsentlig ökning av avgifterna. Förslag B vill att man inte gör mer än vad de nuvarande avgifterna räcker till. Förslag C slutligen tycker att avgifterna kan avskaffas, och att man i stället förlitar sig på de bidrag som just har sökts.

Vi antar att diskussionen är slut och skall titta på olika valprocedurer. I i) används förstås en enkel majoritetsomröstning. Men i ii) kan t ex valet göras som en följd av val mellan två olika alternativ. Först genomför årsmötet kanske en enkel majoritetsomröstning mellan förslag A och B, och ställer sedan vinnaren mot C. Men det är faktiskt inte så okontroversiellt, som det vid första påseendet verkar. Antag att det finns en viss konsistens i hur den enskilde eleven ordnar de tre förslagen, och detta så att om A föredras framför C, och C framför B, så föredras A framför B. Då kan dennes preferenslista skrivas ABC. Detsamma bör förstås gälla för gruppen. Men låt oss betrakta exemplet med 31% av preferenslistorna ABC, 34% med BCA, 35% med CAB och inga andra alternativ föredragna av någon elev.

UPPGIFT 1. Visa att proceduren ovan med första val mellan A och B ger C som vinnare, men att ett första val mellan A och C ger B som vinnare.

Rättvisa procedurer. Vi ser av uppgiften att metoden i det förra exemplet kan manipuleras av mötesordföranden. Så finns det någon "rättvis valprocedur"? För att besvara den frågan börjar vi med att lista några *krav* som ett valförfarande nog bör uppfylla för att kunna kallas rättvist. Sedan skall vi härleda några förvånande konsekvenser av de villkoren. *Målet* är förstås att översätta väljarpreferenser i en gruppreferenslista.

Vi låter x, y, z beteckna alternativa förslag att ta ställning till. Bokstäverna i och j betecknar röstande, och vi antar förstås att det bara finns ändligt många röstande. "Föredras framför" (är en s k relation som nu) skrivs som $>$, "lika bra" skrivs som $=$, och båda tillsammans, dvs $\geq$, utläses "är minst lika bra som". Vi kräver naturligtvis att om de två förslagen inte är lika bra, så är det ena bättre än det andra, d v s att

a) för alla x, y så gäller precis en av $x > y,\ x = y,\ y > x$;
vidare att

b) för alla x gäller $x = x$;
och slutligen att om ett förslag är bättre än ett andra och detta

bättre än ett tredje, så skall det första vara bättre än det tredje, och analogt för "lika bra", dvs att

c) för alla x, y, z gäller: om $x \geq y$ och $y \geq z$, så $x \geq z$ med $x = z$ precis då $x = y$ och $y = z$.

UPPGIFT 2. Vilka sex rangordningar $\geq$ kan den röstande i göra mellan de tre förslagen x, y, z? Hur många rangordningar $\geq$ kan de två röstande i, j göra mellan samma förslag?

Nu lägger vi på rättvisekraven.

KRAV 1. *Alla upptänkliga rangordningar är möjliga för de röstande.*

(Rimligt då vi måste förutsätta att de röstande kan ha mycket skilda åsikter, och vi inte vill hindra dem att framföra sin verkliga uppfattning.)

KRAV 2. *Om röstningen $(x \geq y)_i$ i val 1 medför röstningen $(x \geq y)_i$ i val 2, och dessutom i val 1 resultatet är $x \geq y$, så följer $x \geq y$ i val 2.*

(Rimligt att om alla röstande tycker lika i båda valen så skall resultaten bli desamma. Detta utesluter lottning mellan valsedlar, liksom proceduren ovan att jämföra först A och B, och sedan vinnaren med C.)

KRAV 3. *Om $(x \geq y)_i$ för alla i så $x \geq y$, och i detta fall likhet $x = y$ precis då $(x = y)_i$ för alla i.*

(Rimligt att om alla röstande föredrar x framför y, så gör gruppen det.)

UPPGIFT 3. Visa att Krav 1 - 3 har konsekvensen att

KRAV 4. *För alla j har vi att "$(x \geq y)_j$ i val 1 precis då $(x \geq y)_j$ i val 2" medför att "$x \geq y$ i val 1 precis då $x \geq y$ i val 2".*

Det är mycket lätt att konstruera ett röstningsförfarande som uppfyller kraven 1 – 3. Utnämn bara en av de röstande till diktator! Det sista kravet 5 utesluter den möjligheten.

KRAV 5. *Det finns inget i med egenskapen att* $x \geq y$ *precis då* $(x \geq y)_i$.

UPPGIFT 4. Det naturliga kravet på *en man en röst* behöver inte vara uppfyllt. Visa detta genom att konstruera ett motexempel. Det finns inte heller något krav på att gruppen föredrar x framför y om en enkel majoritet gör det. Visa genom exempel.

UPPGIFT 5. Konstruera ett exempel som uppfyller kraven

a) 1, 2, 5 b) 1, 3, 5 c) 2, 3, 5.

Vad hände med det utelämnade kravet i dina exempel?

Omöjlighetssatsen. Den verkliga överraskningen är, att trots att Krav 1 – 5 är tämligen svaga, så finns det ändå inte något röstningsförfarande som kan uppfylla dem alla samtidigt, om röstningen gäller åtminstone tre förslag x, y, z. Detta resultat är känt som Arrows omöjlighetssats och upptäcktes av den amerikanske nobelpristagaren Kenneth J. Arrow år 1951.

SATS (ARROW). *Det existerar ingen valprocedur med fler än två valalternativ som uppfyller kraven 1 - 5.*

Vi kallar mängden röstande för R, och säger att mängden $R_b \subseteq R$ är *beslutande* för "x mot y" om "$(x \geq y)_i$ för alla i som tillhör R_b medför $x \geq y$, och om i detta fall dessutom $x = y$ medför $(x = y)_i$ för alla i som tillhör R_b". Uppenbarligen är R beslutande på grund av Krav 1 och Krav 3. Vi skall visa att om Krav 1 - 3 gäller för en valprocedur, så finns det ett beslutande R_b med bara en röstande, och att detta R_b är beslutande för alla par, dvs att det finns en diktator. Detta i sin tur motsäger Krav 5 och satsen är därmed bevisad. Låt oss genomföra beviset.

Bevis. Antag att det inte finns något "x mot y" för vilket någon enskild röstande är beslutande, och låt R_b vara en minsta beslutande mängd med avseende på alla möjliga "x mot y", och låt den höra till fallet "$\bar{x}$ mot $\bar{y}$". Vi delar R_b i två disjunkta delmängder R_1 och R_2 med minst en röstande i varje.

Låt z vara ett tredje valalternativ, och betrakta situationen

$$(*)\qquad \begin{array}{ll} (\bar{x} \geq \bar{y} \geq z)_i & \text{för alla } i \text{ som tillhör } R_1, \\ (z \geq \bar{x} \geq \bar{y})_i & \text{för alla } i \text{ som tillhör } R_2, \\ (\bar{y} > z > \bar{x})_i & \text{för alla } i \text{ som tillhör } R \text{ men inte } R_b. \end{array}$$

Om nu $\bar{x} \geq z$ så är R_1 beslutande för $\bar{x}$ mot z, och då vore inte R_b minst. Alltså gäller $z > x$. Eftersom R_b är beslutande för "$\bar{x}$ mot $\bar{y}$" så ger (*) att $\bar{x} \geq \bar{y}$, och därför $z > \bar{y}$. Det följer härur, väsentligen av Krav 2, att R_2 är beslutande för "z mot $\bar{y}$". (Likhetsvillkoret ger en del extraarbete.) Detta motsäger att R_b är minst. Vårt antagande är alltså fel och R_b har bara en röstande, $\bar{i}$.

Vi skall nu också visa att $\bar{i}$ bestämmer alla alternativ "x mot y". Låt z vara ett tredje alternativ, och antag att $(\bar{x} \geq \bar{y} \geq z)_{\bar{i}}$, men att $(\bar{y} > z > \bar{x})_j$ för $j \neq \bar{i}$. Krav 3 ger att $\bar{y} > z$, och $\bar{i}$ är ju beslutande för $\bar{x} \geq \bar{y}$. Alltså är $\bar{x} > z$. Ur Krav 3 följer då att $\bar{i}$ är beslutande för "$\bar{x}$ mot z".

Uppgift 6. Visa på samma sätt att för varje $w \neq \bar{x}, z$, så är $\bar{i}$ beslutande för "w mot z".

Således är $\bar{i}$ beslutande för varje par, dvs $\bar{i}$ är diktator. VSB

Vill du veta mer om Arrows omöjlighetssats, kan du läsa Reasonable elections don't exist av John Baylis i tidskriften *the Mathematical Gazette*, 69 (1985), s 95-103.

Låna också band 5 av matematikverket *Sigma* på biblioteket och studera:

UPPGIFT 7. Peanos axiom i artikeln Om den matematiska sanningens natur av C.G. Hempel. Tillämpa axiomen för att visa några räknelagar för de naturliga talen.

UPPGIFT 8. Euklides' axiom i artikeln Den axiomatiska metoden av R.L. Wilder. Tillämpa dem och visa några av de geometriska satserna. Fler finner du i Euklides' *Elementa*.