Genererande funktioner

Göran Kjellberg

Inledning. Frågar man *på hur många olika sätt kan man ... (göra si eller så) ... med n objekt* så vill man ha ett svar för varje värde av heltalet n, dvs att lösningen skall bestå av en följd av tal $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Sådana problem kallas kombinatoriska. De förekommer t ex när man vill räkna ut sannolikheter, och kan vara svårlösta.

Genererande funktionen för en talföljd innehåller följdens egenskaper i kompakt form, och dessa funktioner blir därigenom ett verksamt hjälpmedel att finna lösningar till kombinatoriska problem, men inte bara sådana utan också t ex till differensekvationer. De är dessutom högst intressanta i sig själva, eftersom de är ett speciellt fall av det vidare begreppet transform, som spelar stor roll i många av matematikens grenar.

Definition och exempel på genererande funktioner. Den oändliga geometriska serien

$$1 + x + x^2 + \ldots \tag{1}$$

har summan

$$\frac{1}{1-x} \tag{2}$$

när $|x| < 1$.

Man säger också att (1) är potensserieutvecklingen av funktionen (2) i intervallet $|x| < 1$. En potensserie i allmänhet ser ut så här:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{3}$$

där a_i är tal. Man säger att en given funktion $f(x)$ har potensserieutvecklingen (3) omkring noll om vi har att

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

för alla x i något intervall $|x| < \varepsilon$ omkring noll.

UPPGIFT 1. Visa att en funktion $f(x)$ endast har *en* potensserieutveckling. Med andra ord, om

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \end{aligned}$$

omkring noll, så är $a_i = b_i$ för alla i.

Funktionen (2) och serien (1) bestämmer därför varandra entydigt. Mer generellt kommer funktionen $f(x)$ härovan och serien (3) att bestämma varandra entydigt. Speciellt bestämmer funktionen $f(x)$ koefficienterna $a_0, a_1, a_2, \dots$ och man säger därför också att funktionen $f(x)$ är *genererande* funktion för talföljden $a_0, a_1, a_2, \dots$. Funktionen (2) är alltså genererande funktion för talföljden $1, 1, 1, \dots$. Dessa tal är koefficienterna i serien (1).

Ett annat exempel på en genererande funktion ger binomialteoremet:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{n}{n} x^n$$

om n är ett positivt heltal. Det vänstra ledet $f(x) = (1+x)^n$ är genererande funktion för binomialkoefficienterna $1, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots$, där

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} \quad \text{med } \binom{n}{0} = 1.$$

Som du förmodligen vet, är binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ också lösningen till det kombinatoriska problemet: på hur många sätt kan man välja ut k föremål ur en samling av n föremål?

Uppgift 2. Vilka är de genererande funktionerna för talföljderna

$$1, \quad \frac{1}{2!}, \quad \frac{1}{3!}, \quad \frac{1}{4!}, \quad \dots$$

$$1, \quad \frac{1}{3!}, \quad \frac{1}{5!}, \quad \dots$$

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \dots ?$$

Uppgift 3. Ge exempel på genererande funktioner för andra kända talföljder.

Vad kan genererande funktioner användas till? Manipuleringar med funktionsuttrycket kan leda till samband som gäller för talföljden som uttrycket genererar. Ett välkänt exempel är

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x).$$

För potensserierna får vi motsvarande:

$$\begin{aligned} 1 + \binom{n+1}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \cdots + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1} \\ &= (1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n)(1+x) \\ &= 1 + (1 + \binom{n}{1})x + (\binom{n}{1} + \binom{n}{2})x^2 \\ &\quad + \cdots + (\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n})x^n + \binom{n}{n}x^{n+1}. \end{aligned}$$

Av uppgift 1 ovan följer att koefficienterna för varje särskild potens av x måste vara lika. Alltså får man den välkända lagen:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

Med denna bygger man upp Pascals triangel

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \ .
\end{array}
$$

Ur en genererande funktion kan man genom derivering eller integrering komma fram till nya genererande funktioner och deras talföljder.

UPPGIFT 4. Derivera serien (1) och uttrycket (2) en, två, tre, ... flera gånger. Vilka genererande funktioner bildas och vilka talföljder genererar de? Funktionerna du får fram kan ses som binomialuttryck med negativa värden för exponenten n. Kan du formulera en direkt definition av binomialkoefficienter i detta fall? Med andra ord, hur skall man tolka $\binom{n}{k}$ då n är negativt, men k positivt eller 0?

UPPGIFT 5. Ta fram andra kända identiteter genom att manipulera med funktionerna i exemplet ovan.

Obestämda koefficientmetoden. Hur utvecklar man en funktion av formen $\dfrac{1}{a+bx+cx^2}$ i potensserie?

För enkelhets skull tar vi ett speciellt uttryck

$$\frac{1}{1-x-x^2}. \tag{4}$$

Ansätt en potensserie med (än så länge) obestämda koefficienter:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots .$$

Multiplicera bägge sidorna av ekvationen med $1-x-x^2$. Vi får ekvationen

$$1 = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + (a_3 - a_2 - a_1)x^3 + \dots .$$

Identifiera koefficienterna för var x–potens i de båda leden. Vi får då:

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 \\ 0 &= a_1 - a_0 && \text{som ger } a_1 = 1 \\ 0 &= a_2 - a_1 - a_0 && \text{som ger } a_2 = 2 \\ 0 &= a_3 - a_2 - a_1 && \text{som ger } a_3 = 3 \\ 0 &= a_4 - a_3 - a_2 && \text{som ger } a_4 = 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Funktionen $\dfrac{1}{1-x-x^2}$ är alltså genererande funktion för sekvensen $1, 2, 3, 5, \ldots$.

De tal som räknas fram på detta sätt brukar kallas Fibonacci-talen och betecknas med F_n.

UPPGIFT 6. Visa att Fibonacci-talen satisfierar *rekursionsformeln* $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, med $F_0 = F_1 = 1$.

Leonardo Fibonacci var en framstående matematiker i Italien omkring år 1200. Han introducerade talen F_n som lösningar till *kaninproblemet*: hur många par kaniner finns det efter n månader, om de fortplantar sig enligt följande? Vid tiden 0 finns ett kaninpar. Efter två månader får de sina första barn, två ungar av olika kön, och fortsätter att föda ett par ungar varje månad. De nya kaninerna bildar par med sin tvilling och får också ett par ungar varje månad, men börjar inte med detta förrän de uppnått åldern två månader.

UPPGIFT 7. Visa att Fibonacci-talen kan tolkas på detta sätt.

Genom att omforma uttrycket (4) kan man härleda en explicit formel för det n:te talet F_n på följande sätt:

Om rötterna till ekvationen $1 - x - x^2 = 0$ kallas r_1 och r_2, så gäller $1-x-x^2 = (r_1-x)(r_2-x)$ och (4) kan delas upp i partialbråk:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{a}{r_1 - x} + \frac{b}{r_2 - x} = \frac{a}{r_1}\,\frac{1}{1-x/r_1} + \frac{b}{r_2}\,\frac{1}{1-x/r_2}.$$

De två sista bråken kan utvecklas i geometrisk serie och man får:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \left(\frac{a}{r_1} + \frac{b}{r_2}\right) + \left(\frac{a}{r_1^2} + \frac{b}{r_2^2}\right)x + \left(\frac{a}{r_1^3} + \frac{b}{r_2^3}\right)x^2 + \ldots,$$

varav $F_n = \dfrac{a}{r_1^{n+1}} + \dfrac{b}{r_2^{n+1}}$.

Uppgift 8. Utför detta, d v s beräkna r_1, r_2, a och b! (Är det inte underligt!)

Uppgift 9. Skriv datorprogram som bestämmer F_n både med hjälp av rekursionsformeln och av formeln ovan. Vilken av formlerna lämpar sig bäst för datorberäkningar?

Uppgift 10. Hur ser den genererande funktionen ut för en talföljd G_n som lyder samma *rekursionsformel* som F_n, men startar med talen $G_0 = a$, $G_1 = b$, där a och b är godtyckliga reella tal?

Vilken talföljd genereras av funktionen $\dfrac{1}{1+x+x^2}$?

Uppgift 11. Anta att vi har en potensserieutveckling

$$\frac{1}{a+bx+cx^2} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

för funktionen $f(x) = \dfrac{1}{a+bx+cx^2}$. Visa att talen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ satisfierar en rekursionsformel

$$a_{n+1} = Aa_n + Ba_{n-1}$$

liknande den för Fibonaccitalen. Uttryck A och B med hjälp av a, b och c.

Finn en explicit formel för a_n med hjälp av rötterna r_1 och r_2 till ekvationen $cx^2 + bx + a = 0$ och a, b och c liknande den du fann ovan för F_n.

UPPGIFT 12. Formulera och lös en uppgift liknande den ovan för funktionen

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n} \ .$$

UPPGIFT 13. På hur många sätt kan man växla n kronor i enkronor och femkronor? Visa att lösningen ges av den genererande funktionen

$$\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \ !$$

På hur många sätt kan man växla n kronor i enkronor, femmor och tior?

Litteratur

Riordan, J., *An introduction to Combinatorial Analysis.* Wiley 1958.