# Något om differenser

Göran Kjellberg

Differenser har i hundratals år varit ett viktigt hjälpmedel när man framställde eller använde tabeller över funktioner. Efter datorernas tillkomst har denna tillämpning minskat i betydelse, men differenskalkylen utgör ändå en intressant och lättillgänglig teori, rik på anknytningar till andra delar av matematiken, t ex kombinatoriken och differentialkalkylen, och till stor nytta vid numerisk lösning av ordinära och partiella differentialekvationer.

**Definition.** Antag att vi har en funktion $f(x)$ av en reell variabel $x$, och ett fixt reellt tal $h$. Differensen av $f$ är en ny funktion $\Delta f$ som definieras av

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Man kan bilda differensen av differensen; den kallas 2:a-differensen och betecknas $\Delta^2 f$.

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)\\ &= f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)\\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).\end{aligned}$$

På analogt sätt bildar man 3:e-differensen, 4:e-differensen, osv. För tydlighetens skull säger man också ibland 1:a-differensen av $f$. Behöver man markera beroendet av $h$ skriver man $\Delta_h, \Delta_h^2$ i stället för $\Delta, \Delta^2, \ldots$. I det följande sätter vi oftast $h = 1$. Det allmänna fallet återföres lätt på detta med en variabeltransformation. (Se uppgift 10 nedan.)

Symbolen $\Delta$ ensam representerar en *operator*, dvs något som verkar på en funktion och som resultat ger en annan funktion. En annan välkänd operator är deriveringsoperatorn $D = \frac{d}{dx}$.

UPPGIFT 1. Skriv ner och hyfsa uttrycken för $\Delta^3 f$ och $\Delta^4 f$, analogt med $\Delta^2 f$ ovan. Härled ett uttryck för $\Delta^n f$!

**Polynom och differenser.** Betrakta $p(x) = x^2 - x + 41$ samt följande tabell där $\Delta = \Delta_1$

| $x$ | $p(x)$ | $\Delta p(x)$ | $\Delta^2 p(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 41 | | |
| | | 0 | |
| 1 | 41 | | 2 |
| | | 2 | |
| 2 | 43 | | 2 |
| | | 4 | |
| 3 | 47 | | 2 |
| | | 6 | |
| 4 | 53 | | 2 |
| | | 8 | |
| 5 | 61 | | 2 |
| | | 10 | |
| 6 | 71 | | |

Aha - 2:a-differensen är konstant. Inte så konstigt förstås; om $p$ är av grad 2 måste $\Delta p$ ha grad 1 och $\Delta^2 p$ ha grad 0. (Se uppgift 4 nedan.)

Tabellen ovan kallas ett *differensschema*. Där har var term en betydelse som beror på dess läge i förhållande till $x$:s aktuella värde.

Principen kan åskådliggöras så här:

$$\begin{array}{llllll}
x-2h & f(x-2h) & & & \\
 & & \Delta f(x-2h) & & \\
x-h & f(x-h) & & \Delta^2 f(x-2h) & \\
 & & \Delta f(x-h) & & \Delta^3 f(x-2h) \\
x & f(x) & & \Delta^2 f(x-h) & \\
 & & \Delta f(x) & & \Delta^3 f(x-h) \\
x+h & f(x+h) & & \Delta^2 f(x) & \\
 & & \Delta f(x+h) & & \Delta^3 f(x) \\
x+2h & f(x+2h) & & \Delta^2 f(x+h) &
\end{array}$$

De termer som har samma argument står på en rad som sluttar ned åt höger och summan av en term och den nedanför till höger är lika med termen rakt under den övre termen.

UPPGIFT 2. Visa att $\Delta$ är en *linjär operator*, dvs att

$$\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g, \qquad \text{och}$$

$$\Delta(af) = a\Delta f, \text{ där } a \text{ är en reell konstant.}$$

UPPGIFT 3. Vad är $n$:e-differensen av $x^n$?

UPPGIFT 4. Visa att $n$:e-differensen av ett $n$:e-gradspolynom är konstant. Ge gärna flera olika bevis.

Satsen i uppgift 4 gör att vi bara behöver känna till en uppåtlutande rad för att beräkna differensschemat under denna rad. Betrakta till exempel de sista raderna i differensschemat för $p(x) = x^2 - x + 41$:

$$\begin{array}{cccc}
x & p & \Delta p & \Delta^2 p \\
4 & 53 & & \\
 & & 8 & \\
5 & 61 & & 2 \\
 & & 10 & \\
6 & 71 & &
\end{array}$$

Vad är $p(7)$? Eftersom 2:a-differensen är 2 måste nästa 1:a-differens vara 12 och nästa $p$-värde 83. Det går alltså att beräkna polynomets fortsatta värden med enbart additioner.

UPPGIFT 5. Gör ett dataprogram som beräknar $p(8), p(9), \ldots$ för polynomet $x^2 - x + 41$ ur differensschemat ända till dess det för första gången har beräknat ett $p$-värde som inte är ett primtal. För vilket $x$-värde inträffar det? (Obs - att det här polynomet ger en ovanligt lång svit av primtal bör nog betraktas som en kuriositet; i alla fall har det inget samband med differenskalkylen).

UPPGIFT 6. Ett tredjegradspolynom $p(x)$ har värdena $p(2) = -4$, $p(3) = 0$, $p(5) = 7$, $p(6) = -8$. Bestäm $p(4)$!

UPPGIFT 7. Binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ kan ses som en funktion av $n$, när man håller $k$ fixt. Vad är denna funktions första-differens?

**Olika sätt att skriva polynom.** Ett $n$:e-gradspolynom är entydigt bestämt av sina $n + 1$ koefficienter. Av det föregående ses att det också är entydigt bestämt av ett differensschema, som är utbyggt till och med $n$:e-differensen, dvs antingen av ett funktionsvärde plus $n$ lämpligt valda differenser eller av de $n + 1$ funktionsvärden som är differensschemats bas.

Med kännedom om koefficienterna kan man räkna ut funktionsvärden och differenser, men hur kommer man från differenserna till koefficienterna?

Ett sätt är att använda *faktorialer*, , $x^{(k)}$, som definieras:

$$x^{(k)} = x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1),\ x^{(0)} = 1.$$

Dessa funktioner har en viss analogi med potenser.

UPPGIFT 8. Visa att $\Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, \ldots)$.

Faktorialerna passar alltså ihop med operatorn $\Delta$ på samma sätt som potenserna med deriveringsoperatorn $D$.

Gör ansatsen

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{(k)}.$$

Sätt $x = 0$: vi får $b_0 = p(0)$. Bilda

$$\Delta p(x) = \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{(k-1)}; \text{ sätt } x = 0; \text{ Vi får } b_1 = \Delta p(0).$$

Bilda

$$\Delta^2 p(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) x^{(k-2)}; \text{ sätt } x = 0; \text{ vi får } 2b_2 = \Delta^2 p(0)$$

o s v.

Man inser att $b_k = \frac{\Delta^k p(0)}{k!}$ för $k = 1, 2, \ldots, n$, där $k! = 1 \cdot 2 \cdot k$. Alltså är

$$(*) \qquad p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k p(0)}{k!} x^{(k)}.$$

Denna formel uttrycker $p(x)$ med hjälp av värdet $p(0)$ samt de differenser som står på en från $p(0)$ nedåt sluttande rad. Den kallas Newtons interpolationsformel, närmare bestämt *Newtons framåtformel.* Det finns nämligen också en Newtons bakåtformel (se uppgift 11) som uttrycker $p(x)$ med hjälp av $p(0)$ och de differenser som står på en från $p(0)$ uppåt sluttande rad.

Man kommer vidare till den vanliga framställningen av $p(x)$ genom att skriva faktorialerna $x^{(n)}$ som ett polynom:

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} s(n,k) x^k \text{ i } 1, x, \ldots, x^n.$$

Här är $s(n, k)$ hela tal. För små värden av $n$ och $k$ är de givna i följande tabell.

Tabell över $s(n, k)$

| $n\backslash k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | |
| 2 | -1 | 1 | | | | |
| 3 | 2 | -3 | 1 | | | |
| 4 | -6 | 11 | -6 | 1 | | |
| 5 | 24 | -50 | 35 | -10 | 1 | |
| 6 | ............ | | | | | |

Dessa tal kallas Stirlings tal av 1:a slaget. (Stirlings tal av 2:a slaget ger $x^n$ som funktioner av $x^{(k)}$.)
UPPGIFT 9. Givet polynomet

$$p(x) = -1 + x^{(1)} + 10x^{(2)} + 20x^{(3)} + 9x^{(4)} + x^{(5)}.$$

Skriv $p(x)$ utvecklat efter potenser, dvs i *vanlig form.*
UPPGIFT 10. Antag att man har värden av ett $n$:e-gradspolynom $g(y)$ för $y = y_0, y_0 + h, \ldots y_0 + nh$ samt differensschemat

$$\begin{array}{lll}
g(y_0) & & \\
 & \Delta g(y_0) & \\
g(y_0+h) & & \\
 & \Delta g(y_0+h) & \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \Delta^n g(y_0) \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\
 & \Delta g(y_0+(n-1)h) & \\
g(y_0+nh) & &
\end{array}$$

baserat på dessa värden. (I detta schema står $\Delta$ för $\Delta_h$).

Uttryck $g(y)$ med hjälp av Newton's interpolationsformel (*) och de givna differenserna! (Tips: sätt $y = y_0 + xh$ och betrakta $p(x) = g(y_0 + xh)$ och differensen $\Delta_h g(y_0) = \Delta p(0)$ osv.)

Uppgift 11. Man kan definiera *bakåtdifferenser* $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$ och få en teori som är en spegelbild av den man får med $\Delta$. Även till $\nabla$ finns en familj av *basfunktioner* som betecknas $x^{[n]}$, och för vilka $\nabla x^{[k]} = kx^{[k-1]}$, $k = 1, 2, \ldots$. Ge uttryck för $x^{[k]}$ och använd dem för att ställa upp Newtons bakåtformel.

**Differenser och funktioner som inte är polynom.**

Uppgift 12. Det finns en långtgående parallellitet mellan egenskaperna hos operatorerna $\Delta$ och $D = \frac{d}{dx}$. Summation motsvarar integration, och många formler liknar varandra, t ex de för derivatan av en produkt och differensen av en produkt. Operatorn $D$ har en *fixpunkt*, dvs en funktion som inte ändras av $D$: $Df = f$, nämligen $f = e^x$. Har operatorn $\Delta$ också en fixpunkt, en funktion $g$ sådan att $\Delta g = g$, och i så fall vilken?

Många funktioner ger, om de tabuleras tillräckligt tätt, dvs med litet tabellsteg $h$, differensscheman, som liknar polynomens. Differenserna för positiva funktioner blir mindre utåt höger till och med en viss ordning $m$. Om de är tillräckligt små, indikerar detta att funktionen kan approximeras bra i detta intervall med ett $(m-1)$:a-gradspolynom. Detta är bakgrunden till användningen av differenser i samband med funktionstabeller och interpolation.

**Differenser som heuristiskt hjälpmedel** (*heuristiskt* beter man sig då man gissar och provar sig fram). Om man söker efter en okänd funktion och har möjlighet att räkna ut värden av den kan det vara en hjälp att ställa upp ett differensschema. Om den okända funktionen är ett polynom, så syns det, och polynomet kan också bestämmas. Om differenserna i stället beter sig ungefär som funktionsvärdena själva, så innehåller den okända funktionen förmodligen någon exponentiell term. Ett exempel: Hur många diagonaler finns det i en $n$-hörning? Vi ställer upp en liten tabell; ritar 5- och 6-hörningar och räknar:

| Antal hörn | Antal diagonaler | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 0 | | |
| | | 2 | |
| 4 | 2 | | 1 |
| | | 3 | |
| 5 | 5 | | 1 |
| | | 4 | |
| 6 | 9 | | |

2:a-differenserna verkar konstanta. Använd Newtons formel, utgående från $n = 3$: Antal diagonaler $= 0 + 2(n-3) + \frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$.

Återstår att visa att detta gäller för alla $n$, vilket i detta fall inte är svårt.

Uppgift 13. Betrakta en konvex $n$-hörning. Hur många skärningspunkter mellan diagonaler finns det inom $n$-hörningen? (Vi antar att aldrig mer än två diagonaler möts i en punkt.) Ledning: antalet $= 0$ för $n = 1, 2, 3$. Rita och räkna antalen för $n = 4, 5$ och 6. (Denna uppgift är hämtad ur tidskriften Normats (Nordisk matematisk tidskrift) problemspalt. En smartare lösning ges i häfte 4, årgång 1988, problem 149. Men differensschemat kan kanske leda en in på rätt spår.)

Den här tekniken är användbar när man vill veta hur många multiplikationer och/eller additioner som krävs i en algoritm för olika ordning på problemet, t ex lösning av ett linjärt ekvationssystem med $n$ obekanta.

Uppgift 14. Hur många positiva heltalslösningar har ekvationen $x + y + z = 2n$, som också uppfyller villkoren $x \le y + z$; $y \le z + x$; $z \le x + y$. (Hämtat ur Polya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze, Abschn. I, kap. 1, problem 31.)

Uppgift 15. I hur många delar delas planet av $n$ räta linjer? Vi förutsätter att inga linjer är parallella och att aldrig mer än två linjer möts i en punkt.

## Litteratur

Läroböcker i numerisk analys brukar innehålla avsnitt om differenser.

Fröberg, C.-E., *Lärobok i numerisk analys.* Svenska bokförlaget 1962,

har en mycket fyllig framställning.