

Mönster

JOHAN PHILIP

K T H

Överallt i naturen och på konstruerade föremål ser man reguljära figurer. Blomblad sitter systematiskt i en ring och på hyreshusen sitter fönstren i rader och kolumner. Trästavarna i parkettgolvet, tänderna på ett kugghjul, blommorna på en tapet eller ett tyg upprepas på ett systematiskt sätt.

Vi skall studera plana (tvådimensionella) ornament, vilka ha något slag av symmetri och/eller är upprepning av en viss "figur". Vi skall ej bry oss om vilken "figur" det är som upprepas utan endast hur den upprepas. Vid studiet av tapetmönster t ex, vilket följer nedan, bryr vi oss alltså ej om vilken blomma eller vilka ränder som upprepas, endast på vilket sätt det sker.

Isometrier. En isometri är en avbildning av en figur som ej ändrar några avstånd inom figuren. Vi studerar avbildningen av en triangel i planet. Bilden är alltså en triangel på ett annat ställe i planet med lika långa sidor som den ursprungliga. Avbildningen kan vara av två slag:

direkt om orienteringen ej ändras, dvs om trehörningen A , B och C ligger medurs kring figuren så gör deras bilder också det, se fig. 1 och 2,

omvänd om orienteringen ändras, dvs om A , B och C ligger medurs ligger deras bilder A' , B' och C' moturs, se fig. 3 och 4.

Vi kommer att studera tre slag av isometrier:

1. *Translation.* Figuren förflyttas utan att vridas.
2. *Rotation.* Figuren vrides kring en punkt O utan att translateras.

Punkten O kan ligga långt från figuren.

3. *Reflektion* i en linje m . Varje punkt A "speglas" i en punkt A' på andra sidan linjen så att AA' är vinkelrät mot m och avståndet från A' till m är lika med avståndet från A till m .

Vi definierar också:

Glidreflektion, vilket är en sammansättning av en reflektion i en linje m och en translation längs m .

SATS 1. *En direkt isometri är en translation eller en rotation.*

BEVIS. En translation är beskriven i Fig. 1. (Den kan eventuellt uppfattas som rotation noll grader kring en punkt oändligt långt borta.) Det som verkligen kräver ett bevis är att varje direkt isometri som ej är en translation är en rotation, dvs att det finns en punkt (O i fig. 2) sådan att isometrin verkligen är en rotation kring den. Låt alltså ABC vara ursprungstriangeln och $A'B'C'$ dess bild. Låt O vara skärningen av mittpunktsnormalerna till sträckorna AA' och BB' . Vi skall visa att mittpunktsnormalen till CC' går genom O . Enligt konstruktionen är $OA = OA'$ och $OB = OB'$. Då vi har en isometri är $AB = A'B'$ så trianglarna OAB och $OA'B'$ är kongruenta av vilket följer att $\angle AOB = \angle A'OB'$. Vi lägger $\angle BOA'$ till var och en av dessa och ser att $\angle AOA' = \angle BOB' =$ rotationsvinkeln. Vi har $\angle OAC = \angle OAB - \angle BAC = \angle OA'B' - \angle B'A'C' = \angle OA'C'$. Eftersom $OA = OA'$ och $AC = A'C'$ följer därav att OAC är kongruent med $OA'C'$. Detta ger direkt $OC = OC'$, och beviset är klart.

SATS 2. *En omvänd isometri är en glidreflektion.*

BEVIS. Studera först fig. 3 vilket är en ren reflektion i en linje m (translationen är noll). Definitionsmässigt går m genom mittpunkterna M_1 , M_2 och M_3 till AA' , BB' och CC' . Man inser lätt (se fig.

4) att om man förskjuter $A'B'C'$ utefter m så kommer mittpunkterna M_1, M_2 och M_3 fortfarande att ligga på linjen m . Omvänt, om ABC och $A'B'C'$ är två isometriska trianglar med olika orientering. Drag sammanbindningslinjerna AA', BB' och CC' . Högst två av dessa kan skära varandra om orienteringen är olika. Mittpunkterna på sammanbindningslinjerna kan ej alla sammanfalla. Lägg en linje genom två olika mittpunkter. Detta är reflektionslinjen m . Man kan translatera $A'B'C'$ längs m så att den blir reflektionen av ABC , enligt fig. 4, vilket avslutar beviset.

Vi har alltså funnit att den direkta isometrin har en *fixpunkt*, dvs en punkt som ej flyttas vid isometrin medan en omvänd isometri har en *fixlinje*.

Vi skall studera vilka avbildningar man får vid sammansättning och upprepning av translationer, rotationer och reflektioner och inför symboler för dessa operationer.

S_i rotation med viss bestämd vinkel kring en punkt O_i .

T_i translation en bestämd sträcka utefter en linje m_i .

R_i reflektion i en linje m_i .

Med S_i^{-1} menar vi rotationen kring O_i med samma vinkel som S_i men åt motsatt håll. Att först använda S_i och sedan S_i^{-1} på en figur innebär alltså att låta den vara still. Vi skriver detta

$$S_i^{-1}S_i = I,$$

där I är identitetsoperatoren som överför en figur i sig själv. På samma sätt definieras R_i^{-1} och T_i^{-1} så att

$$R_i^{-1}R_i = I, \quad T_i^{-1}T_i = I.$$

Med litet eftertanke inser man att

$$S_iS_i^{-1} = I, \quad R_iR_i^{-1} = I, \quad T_iT_i^{-1} = I, \quad R_iR_i = I.$$

Den sista relationen som även skrives $R_i^2 = I$ medför $R_i^{-1} = R_i$. Den matematiska formuleringen av *symmetri* är: En figur F är symmetrisk om det finns en reflektion R sådan att $F = RF$. Linjen m som hör till R kallas symmetrilinje till F .

För två godtyckliga translationer T_1 och T_2 gäller

$$T_1T_2 = T_2T_1 = T_3$$

där T_3 är en translation. Enligt sats 1 gäller för två godtyckliga S_1 och S_2 att

$$S_1S_2 = S_3$$

där S_3 är en rotation men i allmänhet har vi

$$S_1S_2 \neq S_2S_1$$

ty studera hur S_1S_2 och S_2S_1 avbildar O_1 . Enligt definitionen är $S_1(O_1) = O_1$ så $S_2S_1(O_1) = S_2(O_1)$ vilken punkt är skild från O_1 om $O_2 \neq O_1$. Därför är $S_1(S_2(O_1))$ ej $S_2(O_1)$ och olikheten följer.

SATS 3. Om R_1 och R_2 är två reflektioner så är $R_2R_1 = T$ eller $R_2R_1 = S$, där T är en translation och S en rotation.

BEVIS. Vi har $R_2R_1 = T$ när reflektionslinjerna m_1 och m_2 till R_1 och R_2 är parallella (se fig. 5).

Antag nu att m_1 och m_2 skär varandra i O och låt P och Q vara två punkter på m_1 resp. m_2 (se fig. 6).

Låt $A' = R_1A$ och $A'' = R_2A' = R_2R_1A$. Vi har

$$2\angle POA' = \angle AOA'$$

$$2\angle A'OQ = \angle A'OA''.$$

Addera:

$$2\angle POQ = \angle AOA'',$$

dvs R_2R_1 är en rotation med en vinkel dubbelt så stor som vinkeln mellan m_1 och m_2 .

KOROLLAR. *En rotation (vridning) ett halvt varv kring en punkt är ekvivalent med reflektion i två vinkelräta linjer. En glidreflektion är enligt definition en reflektion och translation, och man inser lätt att deras inbördes ordning ej spelar någon roll (fig 7). Om glidreflektionen betecknas G så har vi*

$$G = RT = TR.$$

Symmetrigrupper i planet. Av sats 3 framgår att de tre typer av transformationer man har i planet ej är artskilda. Man kan beskriva rotation och translation som upprepad reflektion. Symmetri är reflektion. När man vill konstruera mönster har man därför ej så stora variationsmöjligheter som man skulle kunna tro. Man vill ju att mönsterfiguren skall upprepa sig på ett regelbundet sätt.

Vi skall göra följande indelning av tvådimensionella mönster:

- 1) De två punktgrupperna vilka är mönster som erhålles med rotation och reflektion men utan translation.
- 2) De sju frisgrupperna erhållna med rotation, reflektion och med translation i en riktning.
- 3) De sjutton tapetgrupperna erhållna med rotation, reflektion och translation i två riktningar.

Den matematiska definitionen av *grupp* finns i Appendix.

De två slagen av punktgrupper. Den första sortens punktgrupp, den cykliska, innehåller de mönster man får genom rotation av en figur kring en fix punkt. För att figuren skall komma tillbaka till sitt ursprungsläge så att man får ett mönster måste rotationsvinkeln vara $360/n$ grader, där n är ett heltal. Beteckna en sådan rotation S_n . Vi har $S_n^n = I$, ty vridning n gånger med $360/n$ grader överför en figur i sig själv. Grupperna som genereras av S_n brukar betecknas C_n . I fig. 8 har vi avbildad $C_1 \dots C_6$. För grupperna C_2 och C_3 har

vi givit två figurer för att illustrera hur mönstrets utseende kan bero på var rotationscentrum ligger i förhållande till den figur vi roterar.

Gruppen C_n har n element (=figurer). Sålunda har t ex C_5 precis 5 element, nämligen $I, S_5, S_5^2, S_5^3, S_5^4$ ($S_5^5 = I$).

Kontrollera att C_5 är en grupp enligt Appendix genom att göra en multiplikationstabell. Man har t ex

$$S_5^3 \cdot S_5^4 = S_5^7 = S_5^5 \cdot S_5^2 = I \cdot S_5^2 = S_5^2.$$

Kontrollera i multiplikationstabellen att varje S_5^i har invers.

Den andra sortens punktgrupp kallas *dihedral*. I en sådan grupp ingår förutom rotation kring en fix punkt även reflektion kring linjer M_i genom fixpunkten. (Eftersom en rotation kan beskrivas som två reflektioner enligt sats 3 kan de dihedrala grupperna beskrivas med enbart reflektioner.) För att det skall bli ett mönster måste, liksom vid de cykliska grupperna, rotationen vara $360/n$ grader och gruppen med den rotationen betecknas D_n . I fig 9 är $D_1 - D_6$ avbildade. Som exempel skriver vi upp de åtta elementen i D_4 , I, R, R^2, \dots, R^7 , eller om två reflektioner skrives som en rotation ($R^2 = S_4$):

$$I, R, S_4, RS_4, S_4^2, RS_4^2, S_4^3, RS_4^3.$$

De cykliska och de dihedrala grupperna är de enda isometrigrupperna om man bara använder rotation och reflektion.

De sju frisgrupperna. De mönster det här är fråga om är sådana, som upprepas vid translation i *en* riktning som t ex mönstret på en kaminfris. Frisgrupperna har oändligt många element, ty man studerar mönster, som varken börjar eller slutar på visst ställe, utan mönsterfiguren upprepas i det oändliga. Den enklaste frisgruppen, F_1 , är just upprepad translation av en figur (se fig 10).

Om translationen betecknas T så är elementen i F_1 :

$$\dots T^{-2}, T^{-1}, I, T, T^2, \dots$$

Om ett mönster skall upprepas i en riktning så är den enda rotation som kan komma ifråga den med ett halvt varv. Vi får gruppen F_2 (fig 11).

Om vi använder reflektion R_1 i translationsriktningen m_1 får vi ur gruppen F_1 , gruppen F_1^1 (fig 12).

Gruppen F_2 ger på samma sätt gruppen F_2^1 (fig 13). Om vi även betraktar reflektionen R_2 i riktningen m_2 vinkelrätt mot m_1 , har vi

$$R_1 R_2 = R_2 R_1.$$

Utan translation har vi därför endast fyra olika gruppelment

$$I, R_1, R_2, R_1 R_2$$

i F_2 . Kombinationen av dessa fyra element ger inga nya.

Med hjälp av reflektionen R_2 i en linje vinkelrät mot translationsriktningen får vi gruppen F_1^2 (fig 14). (Enligt sats 3 är $R_2^2 = T$.)

Om man försöker få ett nytt mönster ur F_2 genom reflektion R_2 i linje m_2 vinkelrät mot translationsriktningen m_1 får man om m_2 går genom en symmetripunkt i fig 11 återigen gruppen F_2^1 . Genom att låta m_2 gå genom en punkt mitt emellan symmetripunkterna i fig 11 får man en ny grupp F_2^2 (fig 15).

En reflektion R_2 kring en linje som ej går igenom eller mitt emellan symmetripunkterna ger ej något mönster, så vi kan ej få fler mönster ur F_1 genom enbart reflektion.

Möjligheten med glidreflektion G återstår. Eftersom $G^2 = RTRT = TR^2T = T^2$ är en translation, får vi en ny grupp F_1^3 (fig 16).

Försök att generera fler mönster ur F_1^3 genom reflektioner R_1 och R_2 ger tillbaka gamla mönster. Med formellt skrivsätt får vi $R_1 F_1^3 = F_1^1$ och $R_2 F_1^3 = F_2^2$.

Vi har nu konstruerat alla möjliga frisgrupper. De är sju stycken.

De sjutton tapetgrupperna. Vi skall nu studera mönster med translation i två olika riktningar. Beteckna dessa translationer T_1 och T_2 . Mönstren skall alltså vara sådana att om man applicerar $T_1^m T_2^n$ (m och n heltal) på dem så får man tillbaka samma mönster. Det enklaste mönstret av detta slag W_1 är avbildat i fig 17.

Punkterna T_1^m, T_2^n, O (m och n heltal, O origo) säges bilda ett gitter. Vissa gitter är invarianta (ändrar ej) vid rotation vissa vinklar, sålunda är t ex ett kvadratisk gitter invariant vid rotation ett kvarts varv. Vi har

SATS 4 (KRISTALLOGRAFI VILLKORET). *De enda rotationer i planet som lämnar gitter invarianta är de med vinklarna $360/2$, $360/3$, $360/4$ och $360/6$ grader.*

BEVIS. (Jfr fig 18.) Låt P vara en gitterpunkt och låt Q vara en av gitterpunkterna närmast P . Låt P' vara bilden av P vid rotation $360/n$ grader kring Q . Om vi har rotationsinvarians vid denna rotation så är P' gitterpunkt. Låt Q' vara bilden av Q vid rotation $360/n$ grader kring P' . Även Q' är gitterpunkt. Om $n = 6$ sammanfaller Q' och P (triangulärt gitter). Om $n = 5$ och om $n > 6$ ligger Q' närmare P än Q (se fig 18), vilket strider mot antagandet att Q var en av gitterpunkterna närmast P . Gitter med sådana rotationssymmetrier finns alltså ej. För $n = 4$ har vi kvadratisk och för $n = 3$ hexagonalt gitter. För $n = 2$ har vi ren translation av gittret och för $n = 1$ ligger gittret still.

De gitter (mönster) som är invarianta vid rotation $360/n$ grader betecknas W_n . De grupper som finns är alltså W_1, W_2, W_3, W_4 och W_6 . I figurerna 17 och 19-22 är mönstren avbildade. Bredvid varje mönster är en bild av dess enhetscell, dvs den minsta delfigur av mönstret som man kan använda för att bygga upp det. De små cirkelarna i enhetscellerna är de centra kring vilka man roterar cellen vid

uppbyggnad av mönstret och siffrorna vid cirklarna den bråkdel av ett helt varv som rotationen skall ske.

De fem nu beskrivna mönstren har erhållits med operationerna translation och rotation. Genom att även använda reflektion och glidreflektion kan man skaffa sig nya mönster. Vi beskriver dessa med figurer av mönstren och tillhörande (glid-)reflektionslinje (streckad i enhetscellen). Ur W_1 kan man få mönstren W_1^1 och W_1^2, W_1^3 ur W_2, W_2^1, W_2^2, W_2^3 och W_2^4 etc. På detta sätt får vi totalt sjutton mönster som är invarianta vid translation i två olika riktningar och några fler finns ej. Beviset av detta, nämligen att man ej kan finna fler (glid-)reflektionslinjer utelämnas här. (Se referens [1].) Några andra isometriska avbildningar än de använda finns enligt kapitlet om isometrier ej.

Enhetscellerna för W_3 och W_4 har vardera två symmetrilinjer som kan användas som reflektionslinjer. Försök beskriva de erhållna grupperna W_3^1, W_3^2, W_4^1 och W_4^2 . W_6 -cellen har en symmetrilinje att reflektera i vilket ger gruppen W_6^1 . Beskriv den. Alla sjutton tapetgrupperna är nu beskrivna.

Några historiska notiser. Redan Euklides (300 f.Kr.) studerade isometrier. Vetskapen att varje isometri är en rotation eller glidreflektion stammar troligen från Euler (1770-talet). Leonardo da Vinci (omkr 1500) förstod idén med grupperna C_k och D_k . Grupperna D_k verkar förekomma oftare både i naturen och i konsten än C_k -grupperna. Den första matematiska (=systematiska) beskrivningen av de 17 tapetgrupperna finns hos Fedorov (1891), som alltså visade att det ej finns fler grupper. Empiriskt var dessa grupper dock kända av antikens egyptier, greker och kineser. Morerna (1300-talet) kände till alla 17 tapetgrupperna ty de finns på väggarna i Alhambra i Granada.

Litteratur

- [1] Toth Fejes, L., *Regular Figures*. Pergamon Press 1964.
 [2] March, L. & Steadman, P., *The geometry of environment*. RIBA, London 1971.

Appendix.

En grupp är ett matematiskt system av element som kan kombineras med en operation vilken man ofta kallar multiplikation. Operationen skall till varje par av element i gruppen ge ett element i gruppen.

- 1) Om man tar tre element a, b och c i gruppen skall det gälla

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

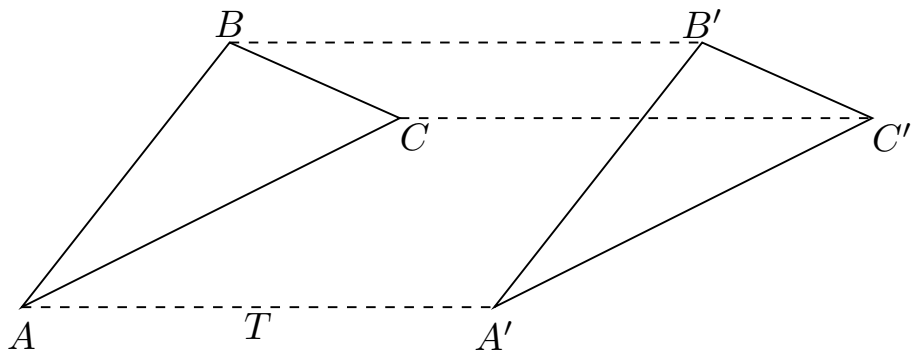
- 2) Varje element a har en invers a^{-1} så att $a^{-1} \cdot a \cdot b = b$, dvs verkan av a^{-1} tas ut av a (och tvärtom). Man skriver $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = I$ och kallar I enhetselement eller enhet. *Att multiplicera med enheten ändrar ej ett element.*

Jämför en grupp med de vanliga talen där man har *två* operationer, multiplikation och addition och deras inverser: division och subtraktion.

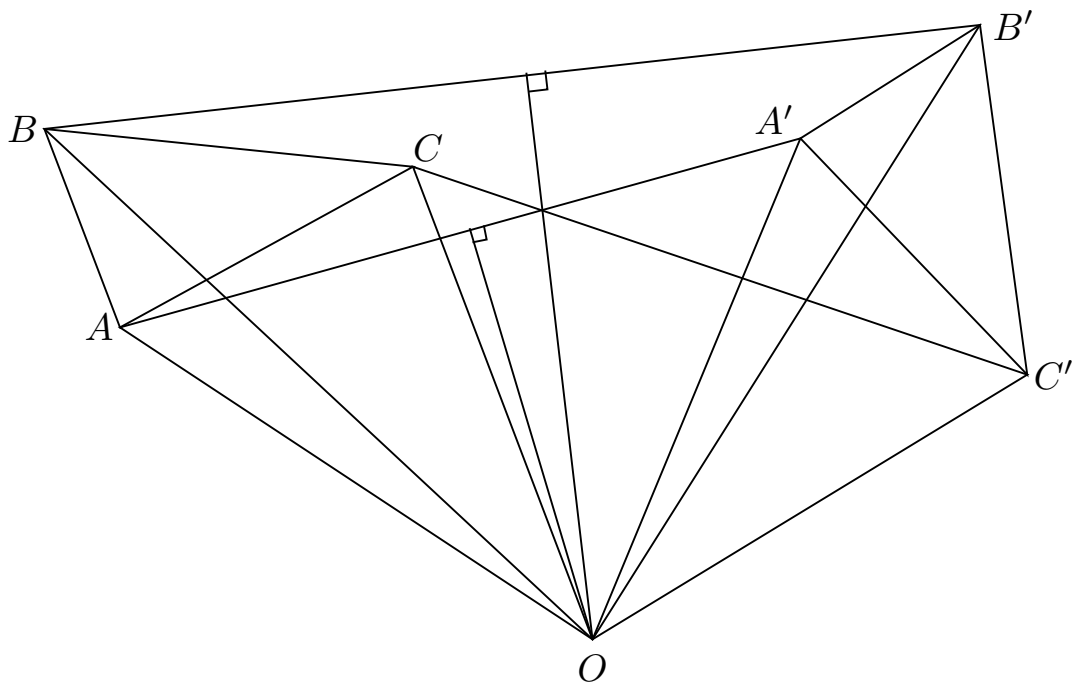
EXEMPEL 1 (PÅ GRUPP). De hela talen med addition som gruppoperation och 0 som enhet.

EXEMPEL 2 (PÅ GRUPP). De vanliga talen utom 0 med multiplikation som gruppoperation och 1 som enhet.

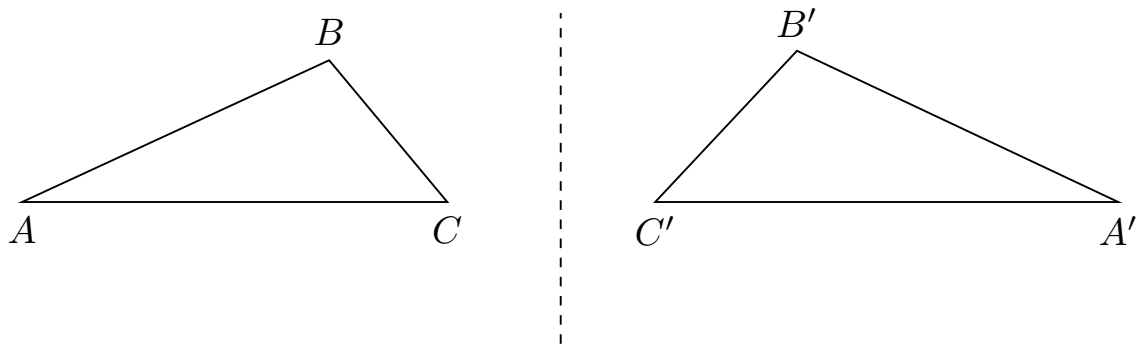
Kontrollera att grupperna 1) och 2) ovan är grupper enligt den matematiska definitionen.



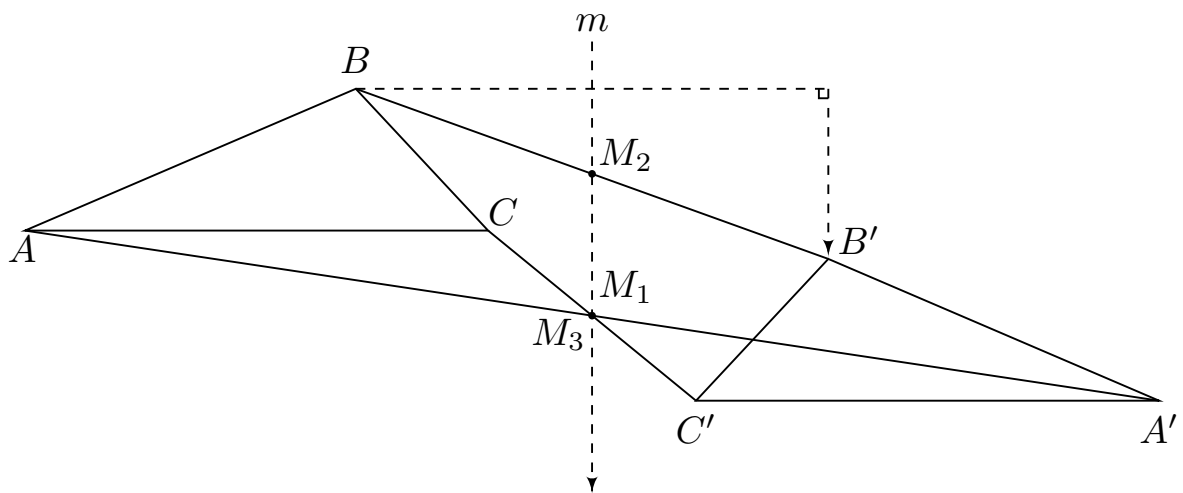
Figur 1



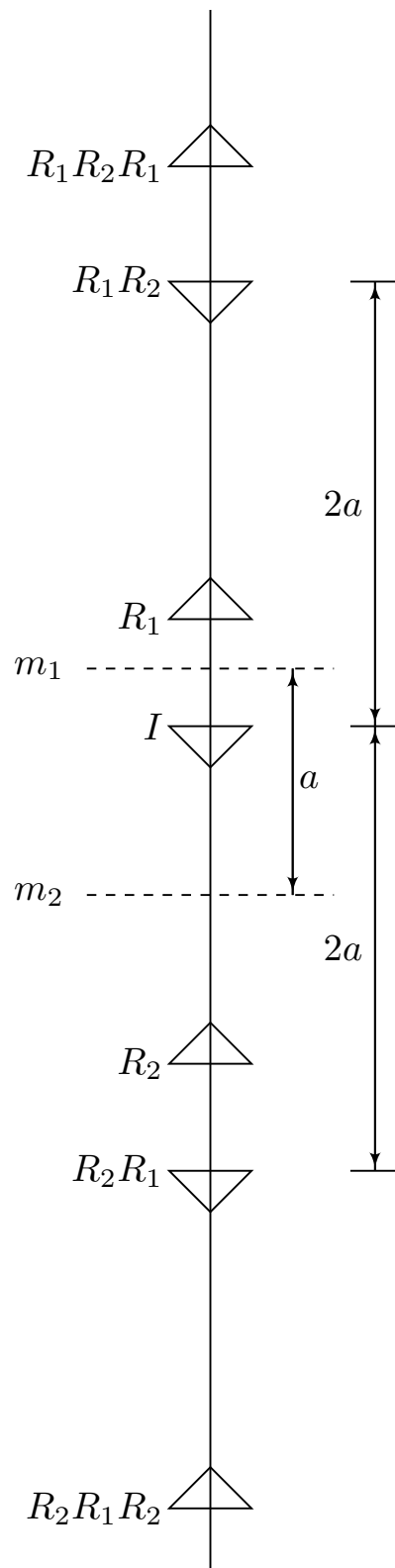
Figur 2



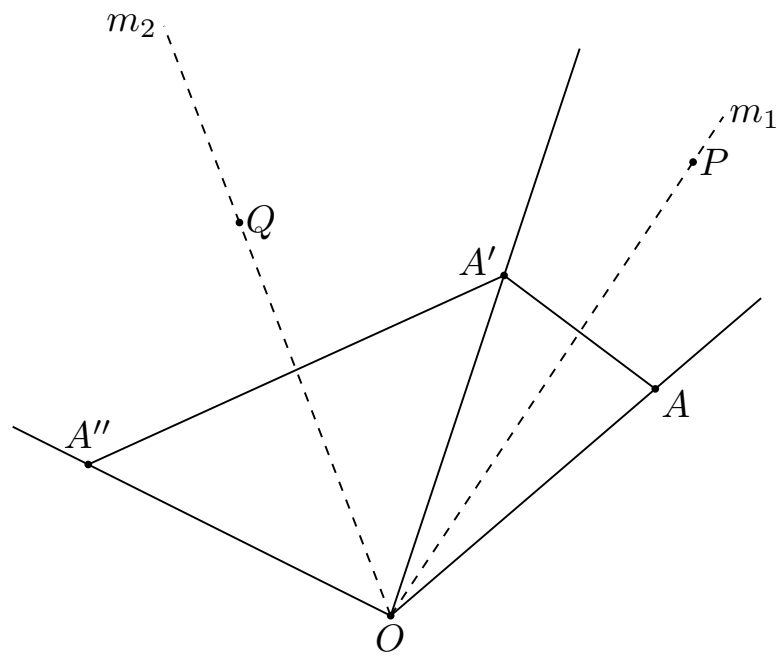
Figur 3



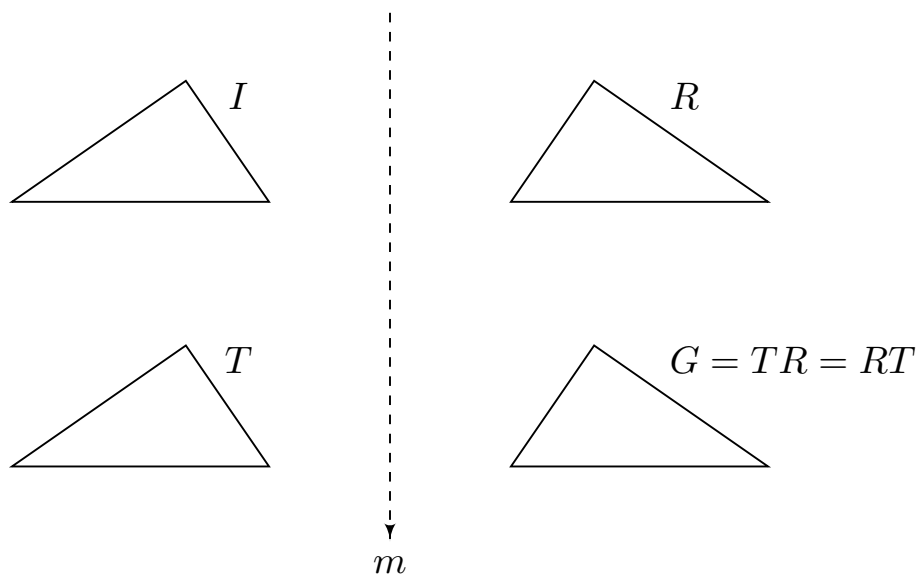
Figur 4



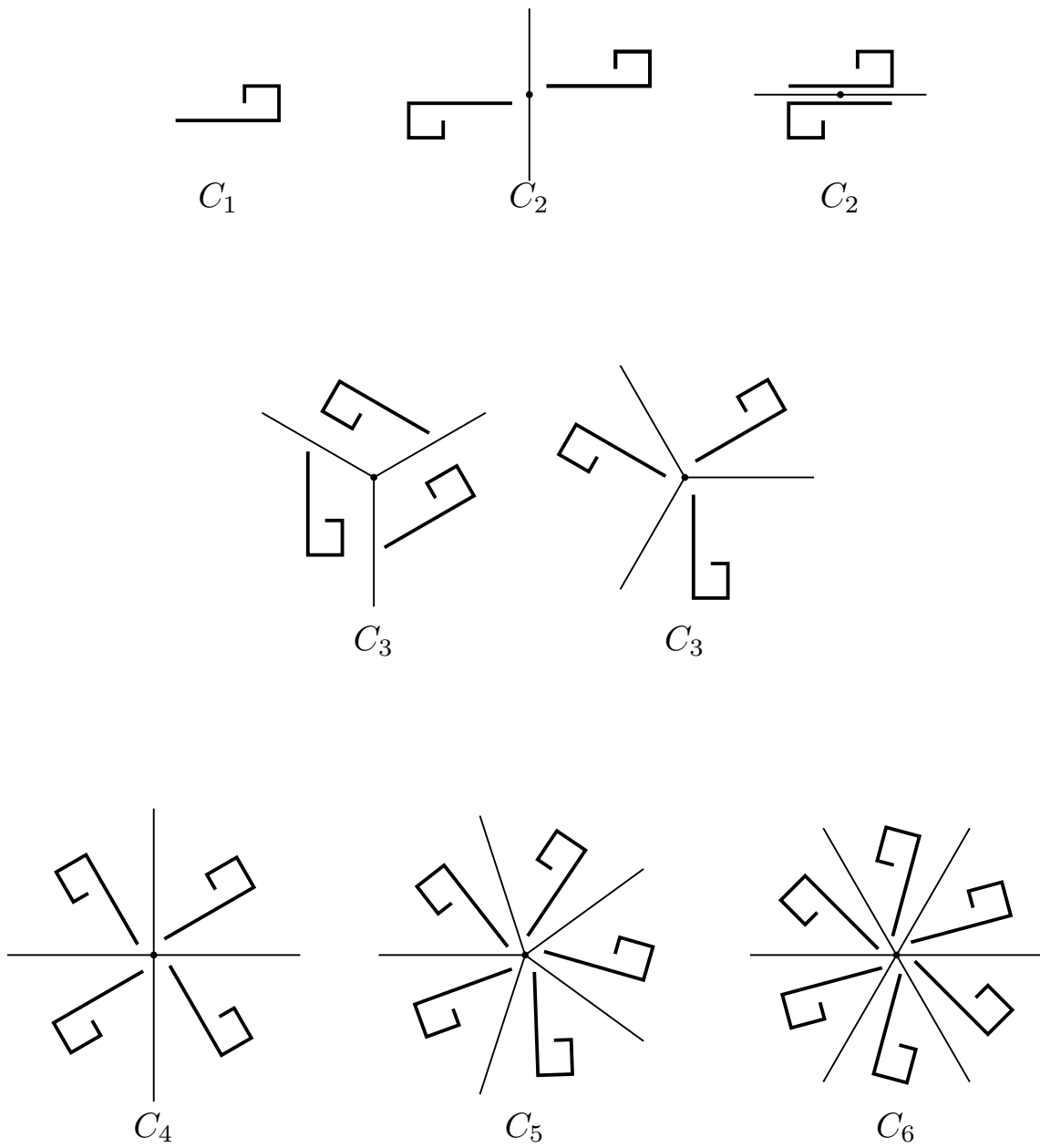
Figur 5



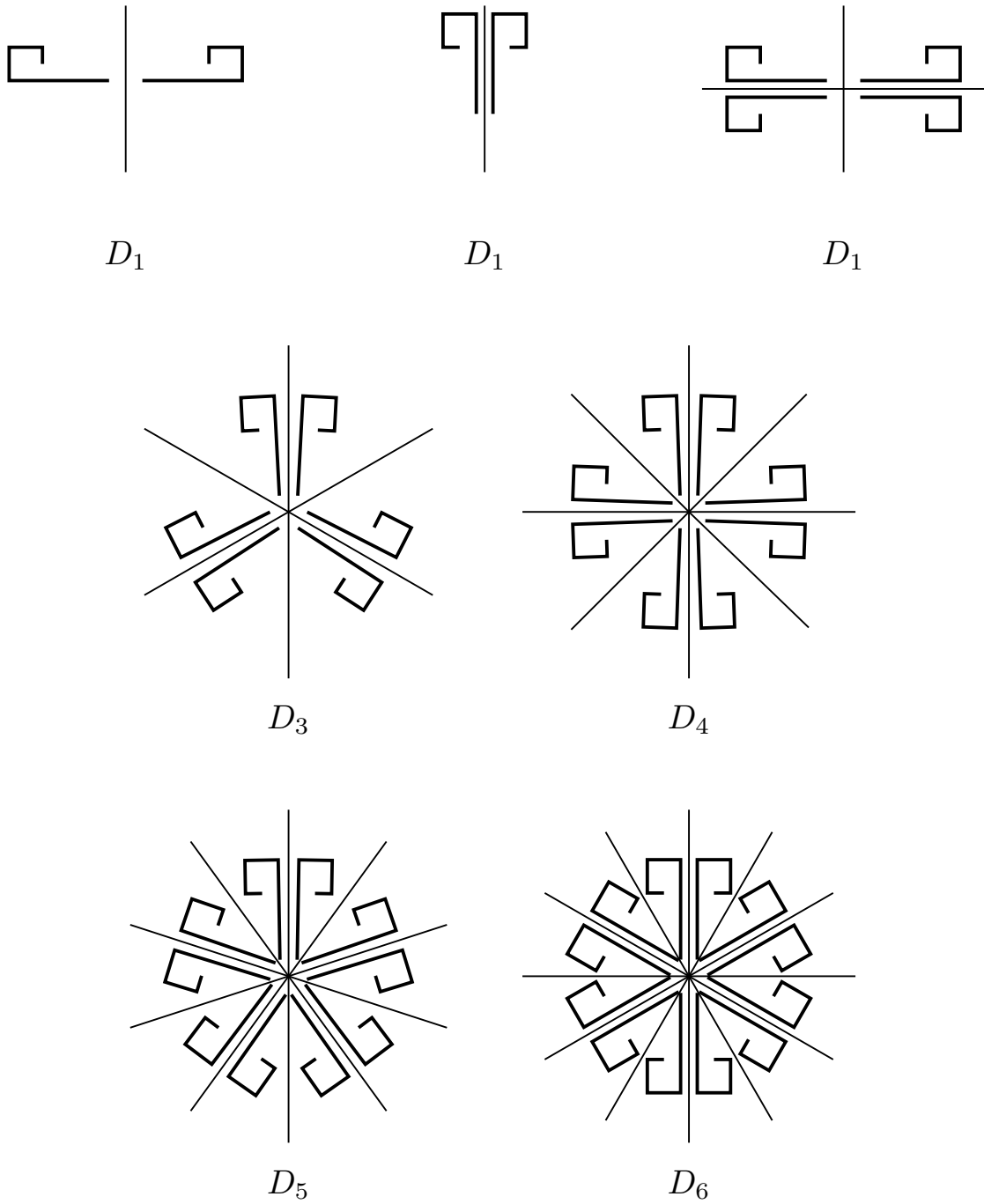
Figur 6



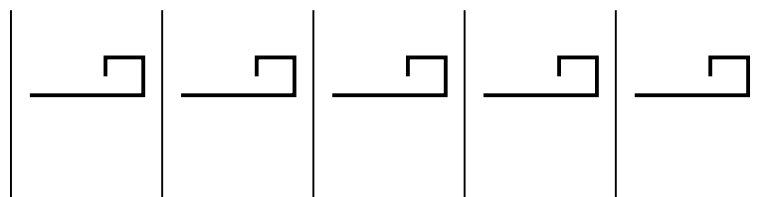
Figur 7



Figur 8

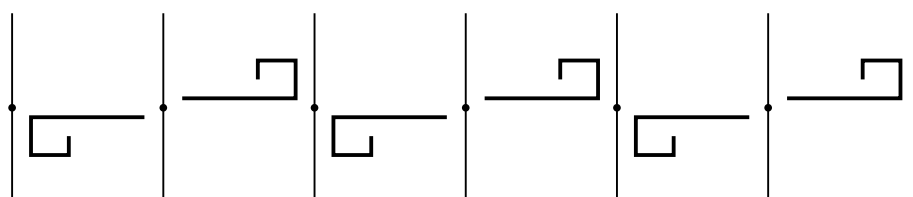


Figur 9



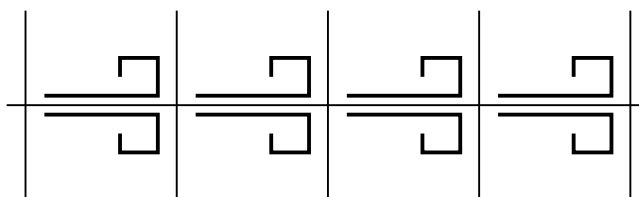
F_1

Figur 10



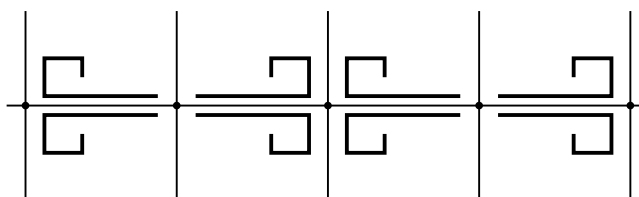
F_2

Figur 11



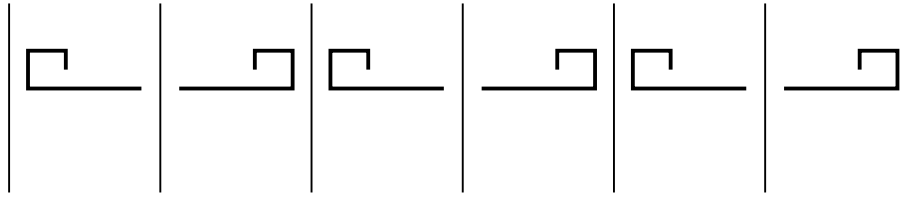
F_1^1

Figur 12

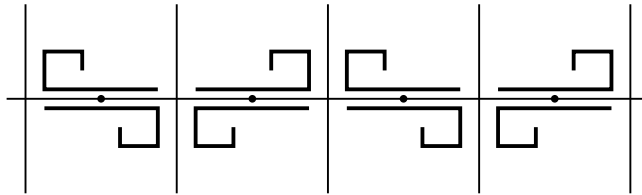


F_2^1

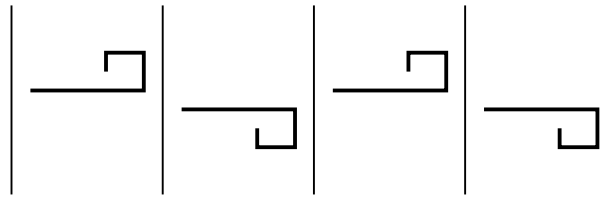
Figur 13


 F_1^2

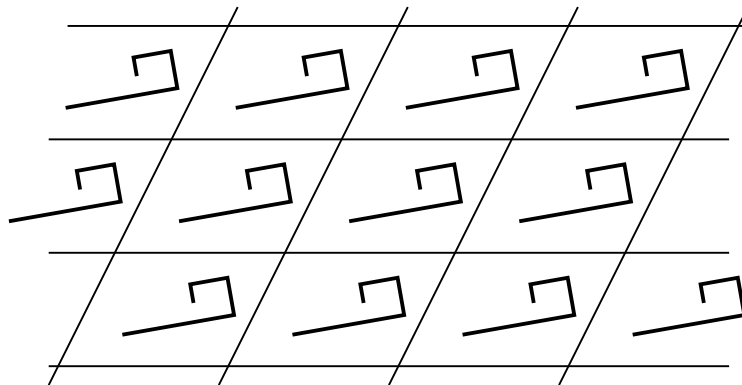
Figur 14


 F_2^2

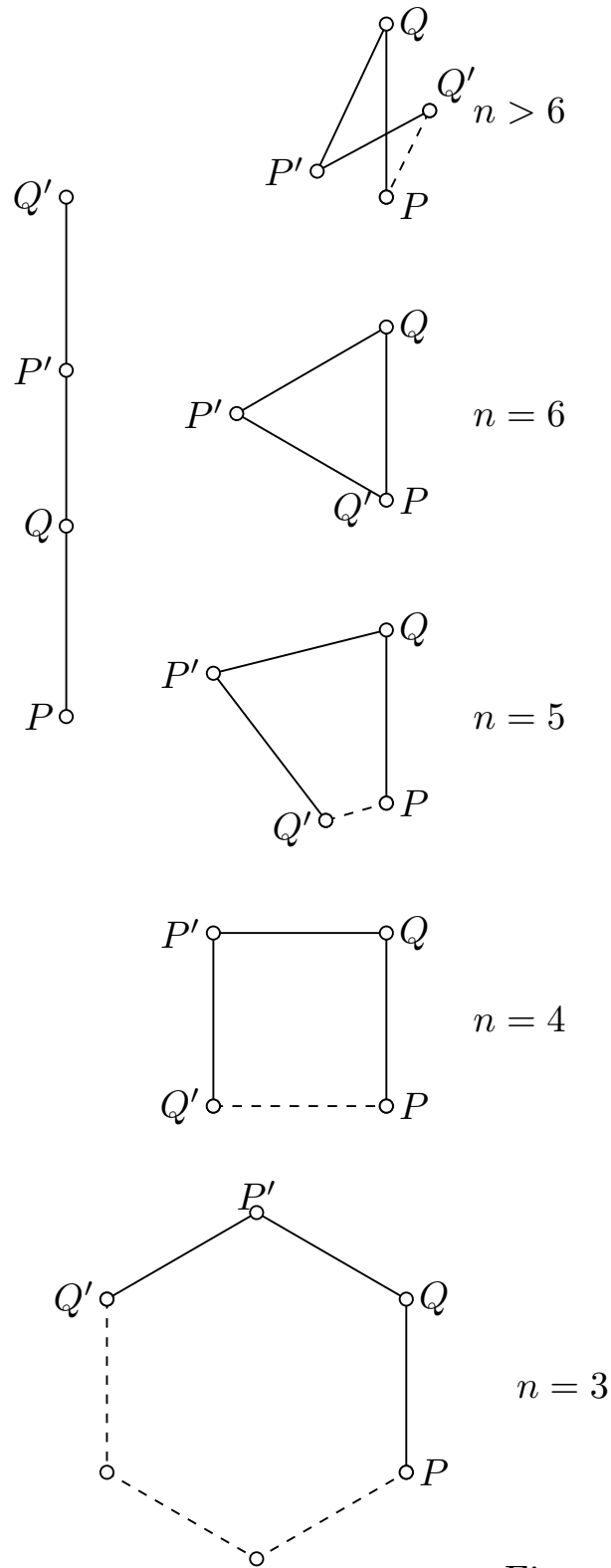
Figur 15


 F_1^3

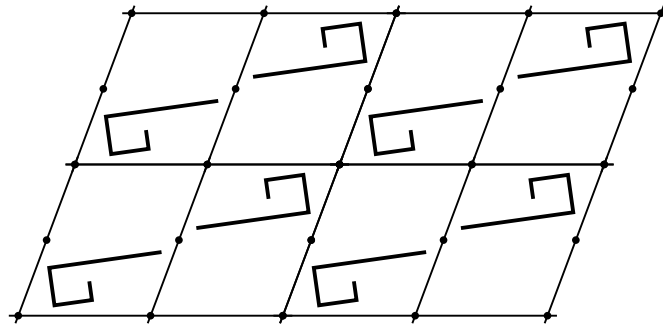
Figur 16


 W_1

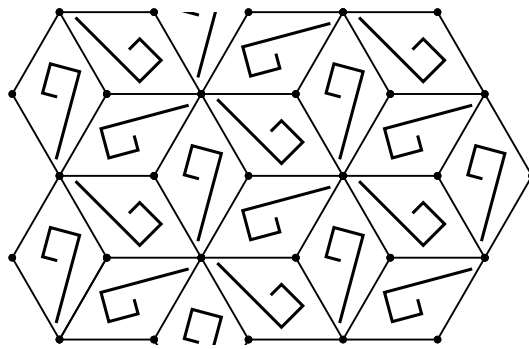
Figur 17



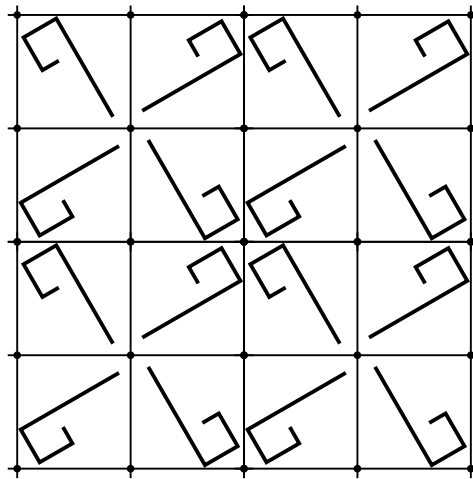
Figur 18



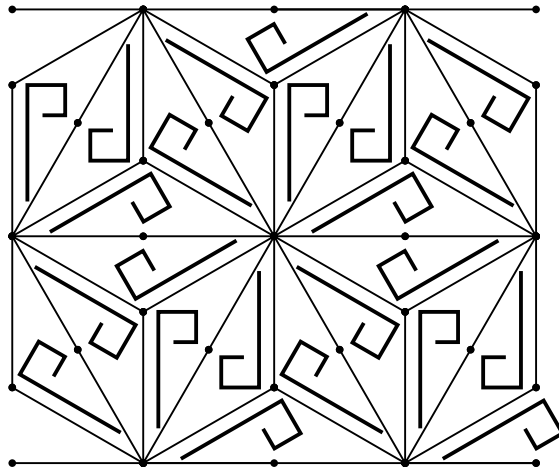
W_2
Figur 19



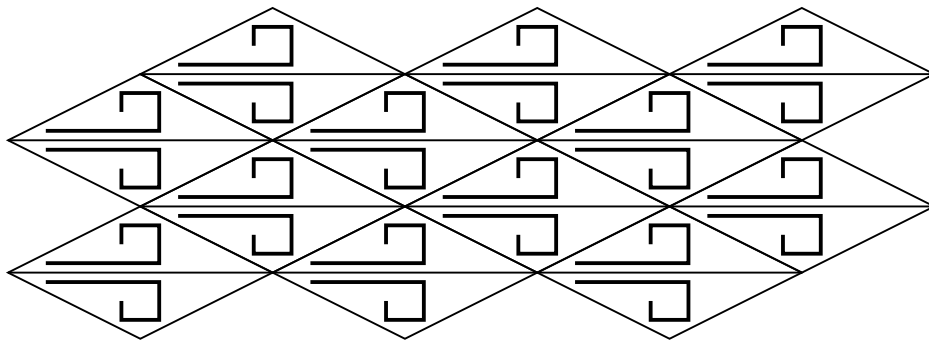
W_3
Figur 20



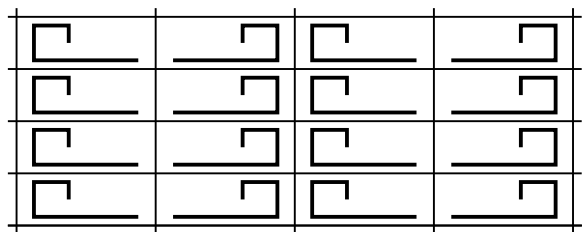
W_4
Figur 21



W_6
Figur 22

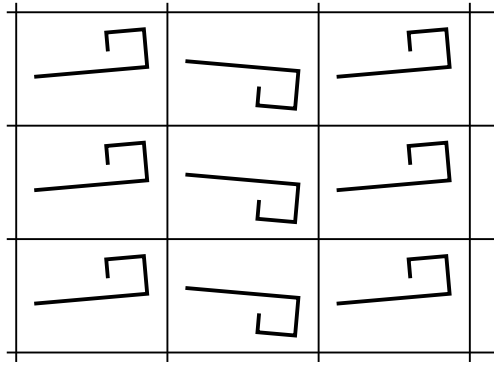


W_1^1
Figur 23

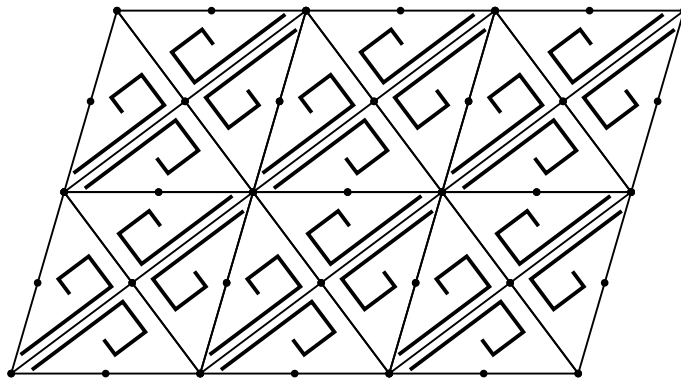


Figur 24

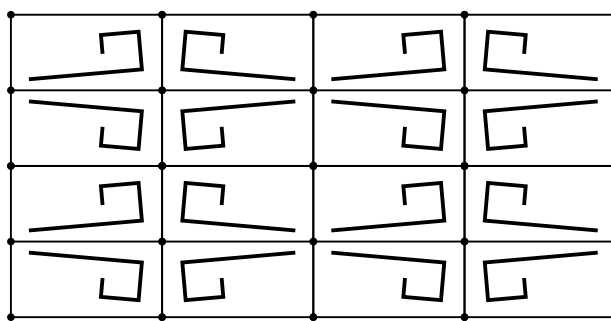
W_1^2


 W_1^3

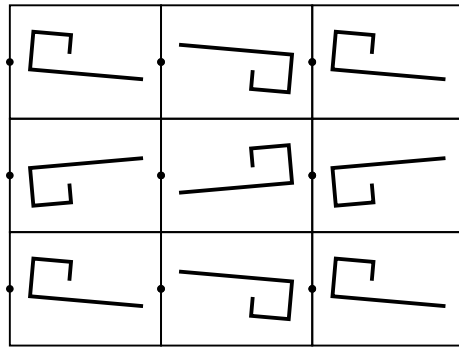
Figur 25


 W_2^1

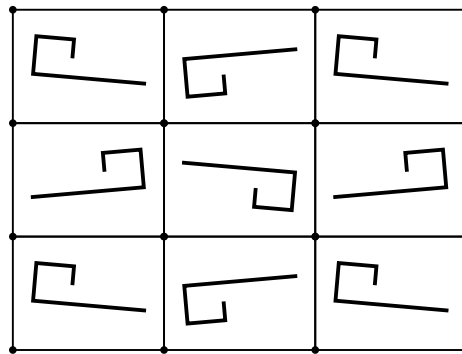
Figur 26


 W_2^2

Figur 27


 W_2^3

Figur 28


 W_2^4

Figur 29