Ett belysande exempel

Lasse Svensson

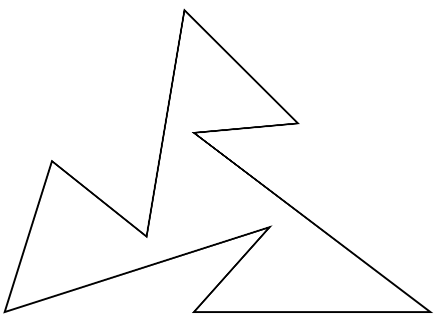
K T H

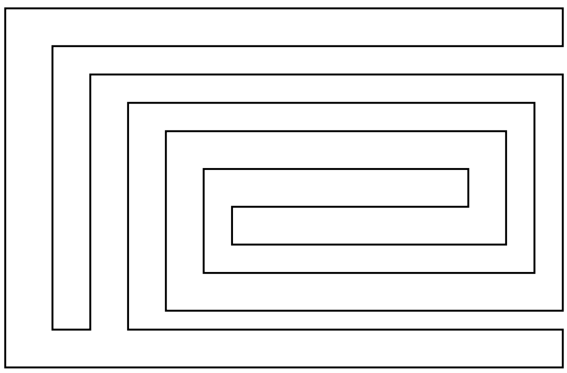
En lokal med plant golv och tak begränsas av n plana vertikala väggar. (n är ett naturligt tal.) Hur många lampor måste placeras ut i lokalen för att helt upplysa den?

Som du nog observerar så är problemet egentligen plant, dvs handlar om n–hörningar i planet. Vidare noterar du nog att lösningen beror på hur n–hörningen ser ut och vilka lampor vi har. Lamporna idealiserar vi till punktformiga ljuskällor som kastar sitt ljus i alla riktningar.

För att göra det lättare att komma igång har vi *snitslat* en bana som leder i riktning mot en förståelse av problemet.

1. Bästa sättet att börja är att experimentera en smula med enkla konkreta situationer. Hur många lampor krävas t ex i följande fall:



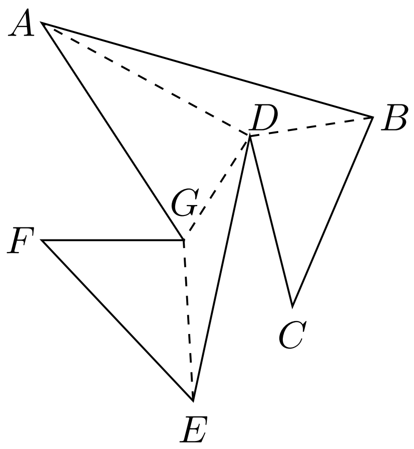


Räcker det alltid att placera ut lamporna i hörnen eller tjänar man i vissa situationer på att placera ut lampor i det *inre* av n–hörningen?

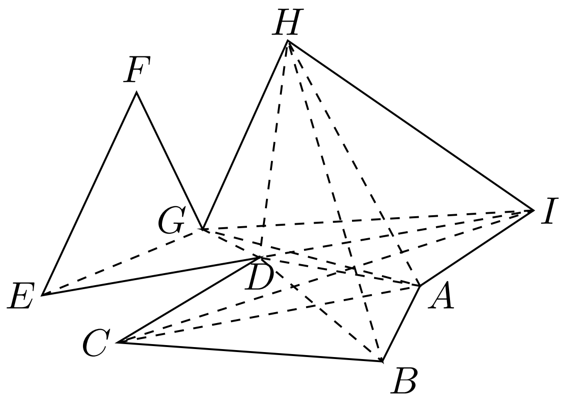
2. I det följande kommer vi att ha nytta av två begrepp: *Korda* och *Korsande kordor*. Genom att ge exempel på dessa tänkte vi att du skulle formulera en precis definition.

Betrakta n–hörningen nedan.

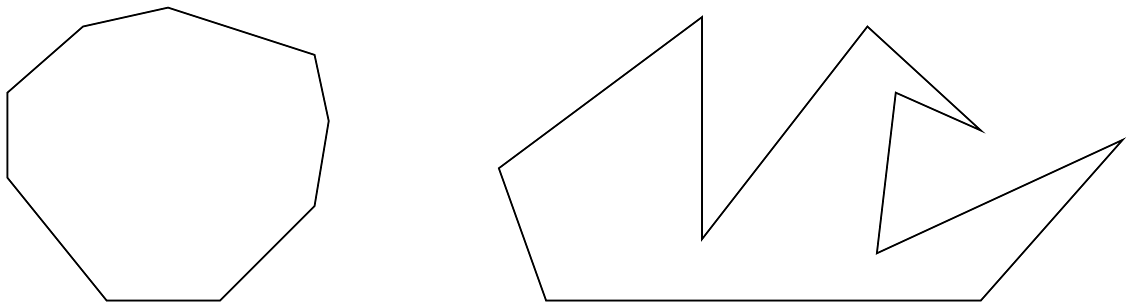
Kordor	*Icke kordor*
AD	AB
BD	AC
DG	AF
EG	EC
	⋮



Korsande kordor	*Icke korsande kordor*
AC, BH	AC, CI
AC, BD	EG, DH
GI, AH	AH, BD
⋮	⋮



Hur många kordor kan du t ex finna som parvis är icke-korsande i n-hörningen nedan?



Nedan låter vi P beteckna en godtycklig n–hörning.

3. Visa att varje n–hörning innehåller minst en korda om $n > 3$. (Detta kan verka självklart men kräver faktiskt ett bevis.) Försök också att finna en algoritm ($\approx$ automatisk metod) som givet en n–hörning P plockar fram en korda. Här kan du även fundera på, om det som är relevant i P, när det gäller att finna en korda, möjligen kan beskrivas på annat sätt än att ge koordinaterna för varje hörn. (Du behöver inte kunna något programspråk.)

Vad ett induktionsbevis är kan du t ex läsa om i Karl-Johan Bäckströms bok *Diskret Matematik*. Studentlitteratur 1986.

4. Visa med hjälp av induktionsbevis att varje n–hörning P innehåller $n-3$ icke-korsande kordor. Observera också att dessa kordor delar in P i $n-2$ trianglar på ett sådant sätt att om två av dessa trianglar möts i mer än en punkt så är deras skärning precis en gemensam sida. Detta brukar kallas en *triangulering* av P. (Gör gärna en algoritm för detta.)

5. Betrakta en triangulerad n–hörning P. Visa att det går att färga varje hörn i P på ett sådant sätt att

(a) Endast tre färger förekommer

(b) Två hörn som är förbundna med en korda eller en sida (i den givna trianguleringen)

har olika färger.

Finn också en algoritm för denna färgning.

6. Visa att någon färg förekommer i högst $[n/3]$ hörn. ($[x]$ betecknar det största heltal som är mindre än eller lika med x, heltalsdelen av x.)

Vad händer om en lampa placeras ut i varje hörn där denna färg förekommer?

7. Ge för varje n ett exempel på en $3 \cdot n$–hörning som inte kan belysas med färre än n lampor.

8. Visa hur man nu kan dra slutsatsen att $[n/3]$ lampor alltid räcker för att belysa en n–hörning.

9. För speciella n–hörningar kan man naturligtvis klara sig med betydligt färre lampor än $[n/3]$. Kan du finna en algoritm som givet en n–hörnig placerar ut ett minimalt antal lampor som ger full belysning? (Förmodligen svårt)

10. Kan du generalisera problemet t ex:

Vad händer i flera dimensioner?

Vad händer om vissa sidor i n–hörningen är speglar?

...

....

Här kan det vara intressant med problemformuleringar bara. Du behöver inte lösa dem nödvändigtvis.

ANMÄRKNING: Punkterna 9 och 10 är att betrakta som mini-forskningsproblem. Problemförfattaren känner själv ingen lösning på dessa problem. Förmodligen kan resultaten här vara publiceringsbara i någon tidskrift.

Litteratur

Bäckström, K.-J., *Diskret matematik.* Studentlitteratur 1986.