Något om medelvärden

Pepe Winkler

Uppsala Universitet

Om a_1 och a_2 är två reella, positiva tal så kallas talet $A = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$ för det *aritmetiska medelvärdet* och talet $G = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$ för det *geometriska medelvärdet.*

Uppgift 1. Gör ett dataprogram som beräknar A och G för givna talpar (a_1, a_2). Välj några talpar (a_1, a_2) och beräkna för dem A och G.

Troligen har du observerat att

$$G \leq A\,. \tag{1}$$

Uppgift 2. Gäller den här olikheten för godtyckliga par (a_1, a_2)? Försök visa att så är fallet.

Ledning. Tänk på den nästan triviala olikheten $0 \leq (x - y)^2$ som gäller för godtyckliga reella tal x och y.
Vad skall x och y ersättas med för att erhålla (1) ?

Uppgift 3. För vilka par (a_1, a_2) gäller likheten i (1) ?

Uppgift 4. Bestäm bland alla rektanglar med en given omkrets, den som har största arean.

En annan typ av medelvärde är det så kallade *harmoniska medelvärdet* som definieras genom $H = \dfrac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} = \dfrac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}}$.

Verifiera att H kan definieras genom

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right),$$

dvs inversen till det harmoniska medelvärdet är lika med det aritmetiska medelvärdet av inverser till a_1 och a_2.

Uppgift 5. Beräkna H för samma talpar som du valt i uppgift 1. Undersök hur H förhåller sig till A och G. Ställ upp en förmodan. Bevisa en sats.

Uppgift 6. En bil kör från staden **A** till staden **B** med medelhastigheten a_1 km/tim och återvänder omedelbart med medelhastigheten a_2 km/tim. Vad blir medelhastigheten för hela resan ?
Vilket slags medelvärde är den erhållna medelhastigheten ?

Låt oss nu anta att vi har en trippel av reella, positiva tal (a_1, a_2, a_3). Det är då ganska naturligt att definiera det algebraiska medelvärdet för dem som $A = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$, det geometriska medelvärdet som $G = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ och det harmoniska medelvärdet genom

$$H = \frac{3}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}} \qquad \text{eller} \qquad \frac{1}{H} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right).$$

Uppgift 7. Ändra ditt dataprogram från uppgift 1 så att det beräknar A, G och H för taltripplar (a_1, a_2, a_3). Välj några tripplar (a_1, a_2, a_3) och beräkna för dem A, G och H.
Vilket förhållande mellan A, G och H kan vi observera nu ?

För talpar (a_1, a_2) har du tidigare visat att $H \le G \le A$ alltid gäller (med likheten då och endast då $a_1 = a_2$).
Försök visa att samma förhållande gäller för godtyckliga positiva tripplar (a_1, a_2, a_3).

Troligen misslyckades du i dina försök.

Nu skall jag försöka leda dig fram till ett resonemang som visar att även för positiva tripplar gäller det ovannämnda förhållandet.

Låt oss istället börja med fyra godtyckliga reella positiva tal a_1, a_2, a_3 och a_4. Analogt till våra tidigare definitioner, definierar vi

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \text{ och } G = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}\,.$$

Nu kan vi betrakta A som det aritmetiska medelvärdet för $\frac{a_1 + a_2}{2}$ och $\frac{a_3 + a_4}{2}$ ty $A = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}\right)$. Om man nu använder olikheten (1) så får vi :

$$\begin{aligned} A &\geq \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}} \quad \{ \text{ använd (1) igen och vi för } \} \\ &\geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = G\,. \end{aligned}$$

UPPGIFT 8. Definiera även H fˇr a_1, a_2, a_3, a_4 och bevisa att $H \leq G$.

Nu skall vi återvända till vår trippel igen. Låt nu åter

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \quad \text{och} \quad G = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}\,. \tag{2}$$

Betrakta nu fyran a_1, a_2, a_3 och $a_4 = A$. Ovan har vi visat att det aritmetiska medelvärdet aldrig är mindre än det geometriska för fyra godtyckliga reella positiva tal, dvs

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}\,.$$

Om $a_4 = A$ så får vi :

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + A}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot A}\,. \tag{3}$$

Ur (2) för vi att $a_1 + a_2 + a_3 = 3A$ och $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = G^3$. Sätt in det i (3) och du får $A \geq \sqrt[4]{G^3 \cdot A}$ som kan skrivas om till $A^4 \geq G^3 \cdot A$

dvs. $A^3 \geq G^3$ som i sin tur är ekvivalent med att $A \geq G$, dvs den olikhet som vi ville visa får en trippel.

Uppgift 9. Generalisera uppgift 5 till tre medelhastigheter a_1, a_2 och a_3.

Uppgift 10. Formulera ett problem (t. ex. i likhet med uppgift 4) som kan lösas med hjälp av olikheten $G \leq A$ för taltripplar.

Nu är det kanske ganska enkelt att definiera det aritmetiska, geometriska och harmoniska medelvärdet för godtyckligt antal reella, positiva tal n.
Vi definierar alltså

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \quad G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

$$\text{och} \quad H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Uppgift 11. Utveckla ditt dataprogram så att det räknar A, G och H för godtyckliga $n-$ tipplar $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Uppgift 12. Försök nu visa att $A \geq G$ f˘r $n = 8$ och $n = 16$. Gör beviset analogt till fallet då $n = 4$. Skriv A som det aritmetiska medelvärdet till $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$ och $\dfrac{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{4}$.
Hur skall nu olikheten visas för $4 < n < 8$ respektive $8 < n < 16$?

Vi börjar på samma sätt som för $n = 3$.
Om $4 < n < 8$ kompletera $a_1, a_2, \ldots, a_n$ till $a_1, a_2,\ a_3, a_4,\ a_5, a_6,\ a_7, a_8$ genom att välja

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = a_8 = A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Nu är det

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + (8 - n)A}{8} \geq \sqrt[8]{a_1 a_2 \ldots a_n A^{8-n}}$$

dvs $\dfrac{nA+(8-n)A}{8} \geq \sqrt[8]{G^n A^{8-n}}$ som medför att $A \geq G$.
(Genomför räkningen.)

UPPGIFT 13. Genomför hela resonemang även för alla $8 < n < 16$.

Allmänt kan, med hjälp av så kallad *matematisk induktion* och samma resonemang som ovan, visas att:

$$\begin{aligned} A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^m}}{2^m} &\geq G = (a_1 a_2 \ldots a_{2^m})^{\frac{1}{2^m}} \\ &\geq H = \frac{2^m}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{2^m}}}. \end{aligned}$$

Sedan på samma sätt som ovan kan man generalisera resultatet för godtyckligt antal reella positiva tal.

Mer om matematisk induktion kan du läsa t.ex. i avsnitt 4.2 i A. Vretblads bok Algebra och kombinatorik.

UPPGIFT 14. Försök genomföra fullständigt bevis att, för godtyckliga reella positiva tal $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gäller

$$H \leq G \leq A.$$

Tänk genom den använda bevismetoden. Observera att metoden kan tilllämpas så fort man kan visa olikheten $G \leq A$ för godtycklig $n-$ tippel av reella positiva tal. (För $n = 2$ är beviset av olikheten enklast.)

UPPGIFT 15. Visa att ur olikheten $H \leq G \leq A$ för godtyckliga reella positiva tripplar följer samma olikhet för godtyckliga positiva reella talpar.

UPPGIFT 16. Visa att för varje positivt heltal n gäller olikheten:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!.$$

Ledning. Tänk på olikheten $A \geq G$.

Litteratur

Vretblad, A., *Algebra och kombinatorik.* Liber 1985.