Kvadratrötter och kedjebråk

HANS RIESEL

KTH

Regelbundna kedjebråksutvecklingar. Varje reellt tal $x > 0$ kan utvecklas i ett s.k. regelbundet kedjebråk:

$$x = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}} \tag{1}$$

Ett mera kompakt skrivsätt för (1) är

$$x = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \ldots \tag{2}$$

Här är b_0 heltal ≥ 0 och övriga b_i heltal > 0. Talen b_i kallas utvecklingens *delnämnare.* Att finna framställningen (2) är mycket enkelt. Med beteckningen $[x]$ för den s.k. heltalsdelen i x, det största heltalet $\leq x$, finner man

(3)

$$b_0 = [x], \quad x_1 = \frac{1}{x - b_0}, \qquad b_1 = [x_1], \quad x_2 = \frac{1}{x_1 - b_1},$$

$$b_2 = [x_2], \; x_3 = \frac{1}{x_2 - b_2}, \; \ldots, \; b_n = [x_n], \; x_{n+1} = \frac{1}{x_n - b_n}, \; \ldots$$

Beräkningen avslutas, så snart som ett av talen x_i blir ett heltal. Detta inträffar, om det ursprungliga talet x är ett rationellt tal. I annat fall säger man att kedjebråksutvecklingen blir *oavslutad* eller *oändlig.*

EXEMPEL 1. Den regelbundna kedjebråksutvecklingen för $\sqrt{2}$ beräknas på följande sätt:

$$b_0 = [\sqrt{2}] = 1, \qquad x_1 = \frac{1}{|\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$b_1 = [\sqrt{2}+1] = 2, \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}+1-2} = \sqrt{2}+1.$$

Härifrån upprepas kalkylen periodiskt. Därför kommer b_2 och alla efterföljande b_i att bli $= 2$, och utvecklingen, i detta fall oändlig, blir

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \dots \tag{4}$$

Exempel 2. Basen för det naturliga logaritmsystemet, talet e, får följande utveckling. Talvärdet på $e = 2.71828182\dots$ ger

$$\begin{aligned}
b_0 &= 2, & x_1 &= 1/0.71828182\dots &&= 1.39221119\dots\\
b_1 &= 1, & x_2 &= 1/0.39221119\dots &&= 2.54964677\dots\\
b_2 &= 2, & x_3 &= 1/0.54964677\dots &&= 1.81935024\dots\\
b_3 &= 1, & x_4 &= 1/0.81935024\dots &&= 1.22047928\dots\\
b_4 &= 1, & x_5 &= 1/0.22047928\dots &&= 4.53557347\dots\\
b_5 &= 4, & x_6 &= 1/0.535573\dots &&= 1.867157\dots\\
b_6 &= 1, & x_7 &= 1/0.867157\dots &&= 1.153193\dots\\
b_7 &= 1, & x_8 &= 1/0.153193\dots &&= 6.527707\dots\\
b_8 &= 6, & x_9 &= 1/0.5277\dots &&= 1.8949\dots\\
b_9 &= 1, & x_{10} &= 1/0.8949\dots &&= 1.1173\dots\\
b_{10} &= 1, & x_{11} &= 1/0.1173\dots &&= 8.5226\dots\\
b_{11} &= 8, & \dots
\end{aligned}$$

Denna kalkyl låter oss ana Eulers berömda utveckling av e:

$$e = 2+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|2}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|4}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|6}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|1}+\frac{1|}{|8}+\dots \tag{5}$$

Regelbundna kedjebråksutvecklingar för kvadratrötter. Man kan visa, att varje kvadratisk irrationalitet x (alltså ett irrationellt tal, som satisfierar en andragradsekvation $Ax^2 + Bx + C = 0$ med *heltalskoefficienter* A, B och C) får en regelbunden kedjebråksutveckling, som är *periodisk.* Om x väljs till $\sqrt{D}$, där D är ett positivt heltal, som inte är en jämn kvadrat, föregås perioden av $b_0 = [\sqrt{D}]$. Periodens sista delnämnare visar sig vara $2b_0$, medan alla andra delnämnare är mindre än $2b_0$. Detta kan användas för att upptäcka, när perioden är slut.

Ett datorprogram för beräkning av kedjebråksutvecklingen för kvadratrötter. Med nedanstående Pascal-program kan Du låta datorn beräkna kedjebråksutvecklingen för $\sqrt{D}$. När den första perioden i utvecklingen har genomlöpts, avbryts beräkningarna, och resultatet skrivs ut.

```
Program Kedrot(input,output);
(*Beräknar första perioden i den regelbundna
  kedjebraksutvecklingen av sqrt(D) *)

Label 1;
Var D,p0,p1,q0,rot,b0,i : integer;
    sqrtD               : real;

Begin
write('Mata in D för kedjebråksutv.  av sqrt(D):');
read(D); writeln;
sqrtD:=sqrt(D); rot:=trunc(sqrt(D+0.5));
write('Den regelbundna kedjebråksutvecklingen av sqrt(');
writeln(D:1,') är:',rot:1,', följt av perioden');
i:=0; p0:=0; q0:=1; b0:=rot;

1: i:=i+1; p1:=b0*q0-p0; q0:=(D-sqr(p1))div q0; p0:=p1;
```

```
b0:=(rot+p0)div q0;
if b0<>*rot then begin write(b0:1,',');  goto 1 end;
writeln(b0:1,',...');  writeln('Perioden genomlöpt! i=',i:1);
end.
```

Idén bakom datorprogrammet. När man hunnit ett stycke på väg i utvecklingen (2), kan situationen beskrivas på följande sätt:

$$x = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \ldots + \frac{1|}{|b_{n-1}} + \frac{1|}{|x_n}, \tag{6}$$

där

$$x_n = b_n + \frac{1|}{|b_{n+1}} + \frac{1|}{|b_{n+2}} + \ldots \tag{7}$$

Antag nu, att vi vid utvecklingen av $x = \sqrt{D}$ kommit fram till att $x_n = (\sqrt{D} + p_n)/q_n$. (För $n = 0$ har man ju $x_0 = x = \sqrt{D} = (\sqrt{D} + 0)/1$, alltså $p_0 = 0$ och $q_0 = 1$.) Då blir $b_n = [x_n]$, som beräknas som `(rot+pn)div qn`. Vidare blir

$$\frac{\sqrt{D} + p_n}{q_n} = b_n + \frac{\sqrt{D} - (b_n q_n - p_n)}{q_n} = b_n + \frac{\sqrt{D} - p_{n+1}}{q_n}, \tag{8}$$

som ger

$$x_{n+1} = \frac{q_n}{\sqrt{D} - p_{n+1}} = \frac{q_n(\sqrt{D} + p_{n+1})}{D - p_{n+1}^2} = \frac{\sqrt{D} + p_{n+1}}{q_{n+1}}, \tag{9}$$

där $q_{n+1} = (D - p_{n+1}^2)/q_n$. Den springande punkten är tydligen, att q_n går jämnt upp i talet $D - p_{n+1}^2$. Försök att bevisa detta! Om Du studerar programmet, skall Du finna att det är ovanstående formler för p_{n+1} och q_{n+1}, som är återgivna för $n = 0$.

Några frågor. Provkör datorprogrammet för $D = 18$. Kontrollera att programmet svarar ”`4, följt av perioden 4,8,...`” Detta betyder, att

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|8} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|8} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|8} + \ldots \tag{10}$$

Kör nu programmet för alla $D \leq 24$, som inte är jämna kvadrattal. Försök svara på följande frågor:

1. Kan Du finna *någon* regelbundenhet i resultaten? Vad blir utvecklingen om $D = x^2 + 1$, där x är heltal? Utvecklingen om $D = x^2 - 1$? Utvecklingen om $D = x^2 + 2$?

2. Försök komma underfund med, vilka D-värden som ger periodlängden 1 och vilka som ger periodlängden 2.

3. Kör några större värden på D, och försök uppskatta, hur lång perioden kan bli, när den är som längst!

Kedjebråk och approximationer. Den viktigaste tillämpningen av kedjebråk är inom approximationsteorin. Om man avbryter utvecklingen (2) efter n delnämnare, och beräknar

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \ldots + \frac{1|}{|b_n} = \frac{A_n}{B_n}, \tag{11}$$

visar det sig, att de rationella talen A_n/B_n utgör goda approximationer av x. Man kan visa, att

$$\left| x - \frac{A_n}{B_n} \right| \leq \frac{1}{b_{n+1} B_n^2}. \tag{12}$$

EXEMPEL. Om utvecklingen (5) av talet e ovan avbryts omedelbart före delnämnaren 6, fås

$$2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} = \frac{193}{71} = 2.718310. \tag{13}$$

För denna approximation gäller att

$$|e - 2.718310| = 0.000028 < 0.000033 = \frac{1}{6 \cdot 71^2}. \tag{14}$$

Ekvationerna $x^2 - Dy^2 = \pm 1$. Utgående från (12) visar man lätt, att *approximationen A_n/B_n till $\sqrt{D}$ för vissa, lämpligt valda värden på n, är så god, att $A_n^2 - DB_n^2 = \pm 1$.* (Eftersom $\sqrt{D}$ är irrationellt, kan aldrig $A_n^2 - DB_n^2$ bli $= 0$, och eftersom uttrycket är ett heltal, är de till absoluta beloppet minsta värdena, som det kan anta, ± 1.) Man kan med andra ord lösa de diofantiska ekvationerna

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1 \tag{15}$$

med hjälp av kedjebråksutvecklingen för $\sqrt{D}$. (Diofantiska ekvationer är ekvationer, där *heltalsvärden* på de obekanta söks.) Det återstår att finna de ovan omtalade värdena på n, för vilka A_n/B_n utgör en tillräckligt god approximation av $\sqrt{D}$ för att $|A_n^2 - DB_n^2|$ skall anta ett så lågt värde som 1. Detta kan ske på följande sätt:

Antag, att x och y satisfierar $x^2 - Dy^2 = \pm 1$. Då finner man i tur och ordning att

$$\begin{gathered}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - D = \pm\frac{1}{y^2},\\ \left(\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right)\left(\frac{x}{y} + \sqrt{D}\right) = \pm\frac{1}{y^2},\\ \frac{x}{y} - \sqrt{D} \approx \pm\frac{1}{2\sqrt{D}y^2},\end{gathered} \tag{16}$$

eftersom $x/y \approx \sqrt{D}$. Om alltså för något n delnämnaren b_{n+1} i kedjebråksutvecklingen av $\sqrt{D}$ blir så stor som $\approx 2\sqrt{D}$, kan villkoret (12) uppfyllas. Men $2\sqrt{D} \approx 2b_0$, och vi har tidigare sett, att *sista delnämnaren i varje period är just* $2b_0$. Om vi alltså avbryter kedjebråksutvecklingen omedelbart före en av dessa maximala delnämnare och beräknar motsvarande rationella approximation A_n/B_n till $\sqrt{D}$, satisfierar A_n och B_n en av de diofantiska ekvationerna (15).

EXEMPEL. $D = 2$ ger de diofantiska ekvationerna $x^2 - 2y^2 = \pm 1$. Kedjebråksutvecklingen (4) för $\sqrt{2}$ ger, om den avbryts strax före alla ställen, där delnämnaren $2b_0 = 2$ står, d.v.s. var som helst, följande approximationer till $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{99}{70}, \quad \frac{239}{169}, \quad \frac{577}{408}, \quad \frac{1393}{985}, \quad \ldots \tag{17}$$

Dessa approximationer ger i tur och ordning

(18)

$$1^2-2\cdot 1^2 = -1,\ 3^2-2\cdot 2^2 = 1,\ 7^2-2\cdot 5^2 = -1,\ 17^2-2\cdot 12^2 = 1,\ \ldots,$$

alltså varannan gång en lösning till $x^2-2y^2 = -1$ och varannan gång en lösning till $x^2 - 2y^2 = +1$. — Man kan bevisa, att alla lösningar till $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ kan fås på detta sätt.

Några uppgifter. Med hjälp av datorprogrammet kan Du angripa följande frågeställningar:

1. Beräkna de minsta lösningarna till de diofantiska ekvationerna $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ för alla $D \leq 24$, som inte är jämna kvadrattal. Har alltid ekvationen $x^2 - Dy^2 = -1$ någon lösning? Kan Du bevisa något i den ena eller andra riktningen?

2. Redan för måttliga värden på D blir minsta lösningen till $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ väldigt stor. Kan Du beräkna minsta lösningen för $D = 94$?

3. Försök bevisa påståendet som gjordes i samband med formel (9) ovan, att q_n alltid går jämnt upp i talet $D - p_{n+1}^2$. Ledning: Ett induktionsbevis, som utnyttjar att $q_0 = 1$ går jämnt upp i $D - p_1^2$ är inte särskilt komplicerat!

4. Om Du klarat punkt 3 ovan, är Du nära ett bevis för att utvecklingen av $\sqrt{D}$ i regelbundet kedjebråk alltid blir *periodisk.* Bevisa

först att talen p_n och q_n i formel (8) är begränsade. Sedan följer att antalet kombinationer av p_n och q_n som kan förekomma i utvecklingen är ändligt. Alltså måste, förr eller senare, för några värden på m och n, $p_m = p_n$ och $q_m = q_n$, varvid kalkylen upprepas från denna punkt, och utvecklingen alltså blir periodisk!

5. Använd kedjebråksutvecklingarna, som Du fått fram med hjälp av datorprogrammet, till att ange rationella approximationer med en noggrannhet motsvarande 3 korrekt avrundade decimaler för alla $\sqrt{D}$ för $D \leq 24$.

Litteraturen om kedjebråk är tyvärr knapp, men en trevlig liten bok är dock

Schmidt, A.L., *Kædebrøker.* Gyldendal, Köpenhamn 1967.