

Periodiska decimalbråk

HANS RIESEL

K T H

Inledning. Du har säkert lagt märke till att decimalerna i vissa enkla tal såsom $1/3 = 0.333\dots$ eller $1/11 = 0.0909\dots$, består av en upprepning av en ständigt återkommande följd av samma siffror. Sådana tal kallas *periodiska decimalbråk*. Det visar sig, att varje rationellt tal p/q , förvandlat till decimalbråk, ger antingen ett *avslutat decimalbråk* (såsom $5/8 = 0.625$), ett *rent periodiskt decimalbråk* (såsom $1/37 = 0.027027\dots$) eller ett *orent periodiskt decimalbråk* (såsom $1/6 = 0.1666\dots$), där perioden föregås av en eller flera siffror, som bildar den s.k. *aperiodiska delen*.

Uppgiften. Du skall med hjälp av nedanstående datorprogram försöka komma underfund med lagarna efter vilka de olika fallen uppträder.

```

Program Perdec(input,output);
Label 1;
Var p,q,t,i,j,s : integer;
    rester      : array[0..2000] of integer;

Begin write('Ge q för ber. av p/q: '); read(q); writeln;
for p:=1 to q-1 do begin
    write(p:1, '/', q:1, '=0. '); for j:=0 to q do rester[j] :=-1;
    t:=p; rester[p] :=0;
    for i:=1 to q do begin
        t:=10*t; s:=t Div q; t:=t Mod q; if rester[t] =-1 then

```

```

begin
write(s:1); rester[t] :=i; end
else
  begin if t=p then begin writeln(s:1,'...');
writeln(
  'Rent periodiskt decimalbråk.Antalsiffror=',i:1);
goto 1 end;
if t=0 then begin writeln;
writeln(' Avslutat decimalbråk!');
goto 1 end;
writeln(s:1,'...');
write(' Örent periodiskt bråk. Aperiodiska delen har ');
write(rester[t] :1,' siffr');
if (rester[t] )>1 then write('or')
else write('a'); write('. Periodlängden
är ');
writeln(i-rester[t] :1);
goto 1 end
end;
1: writeln; end
end.

```

Programmet gör följande: Efter inmatning av nämnaren q beräknas decimalbråksutvecklingarna för alla tal p/q , där $1 \leq p \leq q - 1$. Dessa utvecklingar skrivs ut, jämte en karakterisering av utvecklingens typ. Mata in programmet och kör det för $q = 6$ och verifiera att Du får

$$1/6 = 0.1666\dots, \quad \text{orent periodiskt}$$

$$2/6 = 1/3 = 0.3333\dots, \quad \text{rent periodiskt}$$

$$3/6 = 1/2 = 0.5, \quad \text{avslutat}$$

$$4/6 = 2/3 = 0.6666\dots, \quad \text{rent periodiskt}$$

$$5/6 = 0.8333\dots, \quad \text{orent periodiskt.}$$

Vilka tal p/q ger *avslutade* decimalbråk? Vilka tal ger *orena, periodiska* decimalbråk?

Rena, periodiska decimalbråk. Du kan använda datorprogrammet till att undersöka de rena periodiska decimalbråken. Försök att svara på följande frågor:

1. Antag att nämnaren q inte innehåller några faktorer 2 eller 5. Antag vidare att täljaren p inte har några faktorer gemensamma med q , så att bråket p/q alltså inte kan förkortas. Jämför periodlängderna för de olika bråken p/q , då $1 \leq p \leq q-1$. Vad finner Du för resultat?
2. I vissa fall är perioden för $1/q$ ovanligt lång, $q-1$ siffror. Kan Du karakterisera de q -värden som ger denna maximala periodlängd?
3. För de fall att $1/q$ har maximal periodlängd enligt punkt 2 ovan, står de olika perioderna som fås för alla talen p/q i en enkel relation till varandra. Hur?
4. Det finns något som i förströelsematematiken brukar kallas cykliska tal. Ett sådant är 142857. Ett sådant tals egenskaper visas enklast med följande uppställning:

$$1 \times 142857 = 142857$$

$$2 \times 142857 = 285714$$

$$3 \times 142857 = 428571$$

$$4 \times 142857 = 571428$$

$$5 \times 142857 = 714285$$

$$6 \times 142857 = 857142$$

$$7 \times 142857 = 999999$$

En (liten multiplikator) \times (ett cykliskt tal) ger alltså ett resultat, som är det cykliska talet med någon eller några siffror flyttade från början till slutet av talet. Försök att känna igen det cykliska talet 142857. Kan Du förklara talets egenskaper mot bakgrund av periodiska decimalbråksutvecklingar? Var kommer nästa cykliska tal,

0588235294117647,

ifrån?

5. För de *primtal* q , för vilka periodlängden l i decimalbråksutvecklingen av $1/q$ inte är maximal, vad kan sägas om l ? Lämpliga testfall är $q = 13$ och $q = 37$. Är de perioder, som uppträder, också cykliska tal? Kan Du bringa något system i de olika perioderna?
6. Om $1/q_1$ har periodlängden l_1 och $1/q_2$ har periodlängden l_2 , vilken periodlängd får då $1/q_1q_2$? Lämpliga testfall är $q_1 = 37$, $q_2 = 41$ och $q_1 = 7$, $q_2 = 11$. Kan Du formulera en allmän regel, som har att göra med faktorerna i q_1 och q_2 ?
7. Kan Du finna något samband mellan periodlängden för $1/q$, där q är en faktor i $10^n - 1$ och n ? Ange alla tal, som har en 7-siffrig, periodisk decimalbråksutveckling.

Talsystem med annan bas än 10. Genom några enkla ändringar i datorprogrammet kan Du lätt utföra ovanstående undersökning för ett talsystem med en annan bas B än 10. Det som skall ändras är faktorn 10 i satsen $t:=10*t$, som ändras till $t:=B*t$. (Det kan vara praktiskt att deklarerar variabeln B , och läsa in den i början av körningen.) Om $B > 10$, måste också utskriften av " B -alerna" (motsvarigheten till decimalerna) ändras. Du måste införa symboler för siffrorna motsvarande $10, 11, \dots, B - 1$, lämpligen A, B, C, \dots . I det hexadecimala talsystemet t.ex., där $B = 16$, får man sätta $10 = A, 11 = B, 12 = C, 13 = D, 14 = E$ och $15 = F$. Sedan får man ändra utskriftssatsen `write(s:1)` (och motsvarande satser som använder `writeln`) för siffrorna i perioden till

```
if s<10 then write(s:1) else write(chr(s+55):1)
```

Efter att ha infört dessa ändringar i programmet, provkör och försök att svara på följande frågor:

1. Undersök periodlängden för olika baser för t.ex. bråket $1/7$. Hur går det, om Du väljer baser som är kongruenta mod 7, t.ex. baserna 3, 10 och 17? Eller baserna 2, 9 och 16?
2. Låt q vara ett primtal och undersök periodlängden för $1/q$ för olika baser B . Kan Du säga något om de periodlängder som uppstår? Finns det för ett valt värde på q alltid baser B , som ger den maximala periodlängden $q - 1$? (Sådana tal B kallas i talteorin för *primitiva rötter* till primtalet q .)
3. Om Du har hittat en primitiv rot till q , kan Du härleda andra? Kan Du finna alla primitiva rötter, utgående från en viss av dem? Hur många primitiva rötter $< q$ har primtalet q ?

Om Du vill veta, hur en stor matematiker har behandlat problemet, kan Du läsa i

Gauss, C.F., *Untersuchungen über höhere Arithmetik*. Chelsea Publishing Company 1965, s 366–373 samt s 453.