

S_{k-1} étant une fonction entièrement connue de y_2 .
L'équation (12) nous donnera alors :

$$(13) \quad [x_2^{k-1}] = \frac{S_{k-1}}{N x_2'} + \frac{C_{k-1}}{N x_2'}$$

C_{k-1} désignant une constante d'intégration que nous choisirons d'une manière arbitraire. Une fois cette constante choisie, $[x_2^{k-1}]$ sera entièrement déterminé.

Connaissant à la fois $\frac{dx_2^{k-1}}{dy_1}$ et $[x_2^{k-1}]$ nous pourrions regarder x_2^{k-1} comme complètement connu.

Ayant choisi x_1^{k-1} et x_2^{k-1} de façon à satisfaire aux équations (10) et (10 bis), les équations (9) et (9 bis) nous donneront $\frac{dx_1^k}{dy_1}$ et $\frac{dx_2^k}{dy_1}$ sous la forme de séries trigonométriques en y_1 , n'ayant pas de terme tout connu. Elles nous feront donc connaître x_1^k et x_2^k à une fonction arbitraire près de y_2 , de sorte qu'on peut recommencer la même opération sur les équations analogues à (9) et (9 bis) mais correspondant à une valeur de k plus élevée d'une unité, et ainsi de suite.

On pourra donc par la méthode que j'ai vu d'exposer calculer par récurrence x_1^0 et x_2^0 , x_1^1 et x_2^1 , ..., x_1^k et x_2^k , ... ; mais il reste plusieurs points à discuter :

1^o Dans quels cas les séries ainsi obtenues sont-elles convergentes ?

2^o Comment faut-il choisir les constantes C_1 , C_2 , ..., C_{k-1} ?

3^o Quelles sont les propriétés des fonctions définies par les séries qui précèdent ?

C'est à cette discussion que nous consacrerons les paragraphes suivants.

112
§ 3. Construction des Surfaces Asymptotiques
(Première Approximation)

Nous nous contenterons dans ce paragraphe d'écrire et de discuter les équations de nos surfaces trajectoires en négligeant les termes en μ et ne tenant compte que des termes en $\sqrt{\mu}$.

Nous supposons donc que x_1 et x_2 sont définies en fonction de y_1 et de y_2 par les équations suivantes :

$$x_1 = x_1^0 + \sqrt{\mu} x_1' = x_1^0,$$

$$x_2 = x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2' = x_2^0 + \sqrt{\frac{2\mu}{N}} ([K] + C_1).$$

D'après cela, x_1 serait une constante et x_2 une fonction de y_2 seulement indépendante de y_1 .

Revenons à notre premier exemple du § 1. Ce que nous dirons s'appliquerait également aux deux autres exemples, mais c'est sur le premier que je veux insister parce que c'est un cas particulier du problème des trois Corps.

Nous avons vu que l'on pouvait représenter la situation du système par le point P qui a pour coordonnées rectangulaires :

$$\cos y_1' e^{\xi \cos y_2'}; \sin y_1' e^{\xi \cos y_2'}, \xi \sin y_2'$$

où

$$y_1' = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad y_2' = \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \quad \xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - l}{L + l} = \frac{-x_2'}{x_1'}$$

$$y_1 = g - t, \quad y_2 = l.$$

Nous avons observé de plus que les variables

$$x_1' = x_1 + x_2$$

$$x_2' = x_1 - x_2$$

forment avec y_1' et y_2' un système de variables canoniques.

Nous pouvons donc regarder ξ, y_1' et y_2' comme

un système particulier de coordonnées, définissant la position du point P dans l'espace, de sorte que toute relation entre x, y_1 et y_2 est l'équation d'une surface.

Mais pour amener les équations à la forme que nous leur avions donnée dans le paragraphe précédent, nous avons dû faire un autre changement de variables.

Nous avons posé dans ce paragraphe :

$$x''_1 = ax_1 + bx_2, \quad y''_1 = dy_1 - cy_2$$

$$x''_2 = cx_1 + dx_2, \quad y''_2 = -by_1 + ay_2$$

en choisissant les nombres entiers a, b, c, d de façon à annuler le nombre que nous avons appelé x''_2 .

Après ce changement de variables, nous avons supprimé les accents devenus inutiles, et nous avons restitué le nom de x_1, x_2, y_1, y_2 à nos nouvelles variables indépendantes x''_1, x''_2, y''_1 et y''_2 .

En conséquence, les variables que nous avons appelées x_1, x_2, y_1 et y_2 dans tout le calcul qui remplit le §2, et auxquelles nous conserverons désormais ce nom, ne sont pas les mêmes que celles que nous avions désignées par les mêmes lettres dans le premier exemple du §1, c'est à dire $G, L, g-t$ et l .

Il est clair que notre nouvel y_1 et notre nouvel y_2 sont des fonctions linéaires de :

$$y'_1 = \frac{1}{2}(g-t+l) \text{ et de } y'_2 = \frac{1}{2}(g-t-l)$$

et que le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1 est une fonction linéaire et fractionnaire de ξ .

Nous devons conclure de là que l'on peut définir complètement la position du point P dans l'espace par le nouvel y_1 , le nouvel y_2 et le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1 de telle façon que toute relation entre y_1, y_2 et $\frac{x_2}{x_1}$ est l'équation d'une surface.

Que ce système particulier de coordonnées est

tel que l'on peut augmenter y_1 ou y_2 d'un multiple de 2π sans que le point P change.

Dans ces conditions, il est clair que l'équation exacte de nos surfaces trajectoires sera :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + x_2' \sqrt{\mu} + x_2'' \mu + \dots}{x_1^0 + x_1' \sqrt{\mu} + x_1'' \mu + \dots}$$

et que l'équation approximative, en négligeant les termes en μ sera :

$$(1) \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + x_2' \sqrt{\mu}}{x_1^0 + x_1' \sqrt{\mu}} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0} \sqrt{\frac{2}{N} ([F_1'] + C_1)}.$$

Nous nous proposons tout d'abord de construire les surfaces représentées par cette équation approximative (1).

Observons d'abord que $y_1 = 0$ est l'équation d'une certaine surface S et que la portion de cette surface qui nous sera utile est une portion de surface sans contact.

En effet il suffit de montrer que l'on a :

$$\frac{dy_1}{dt} \geq 0.$$

Or il en est évidemment ainsi, car si l'on pose

$$F = F_0' + \mu F_1' + \mu^2 F_2' + \dots$$

il vient :

$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 - \mu \frac{dF_1'}{dx_1} - \mu^2 \frac{dF_2'}{dx_1} + \dots$$

Le paramètre μ étant très petit, $\frac{dy_1}{dt}$ est de même signe que n_1 , et n_1 est une constante qui est toujours de même signe.

Donc $\frac{dy_1}{dt}$ est toujours de même signe et ne peut s'annuler.

C. G. F. D.

La position d'un point P sur la surface S sera définie par les deux autres coordonnées y_2 et $\frac{x_2}{x_1}$, ce système de coordonnées est tout à fait analogue aux coordonnées polaires, c'est à dire que les courbes :

$$\frac{x_2^2}{x_1} = \text{const.}$$

sont des courbes fermées concentriques et que le point P ne change pas quand l'autre coordonnée y_2 augmente de 2π .

Reprenons les surfaces définies par l'équation (1) et étudions leurs intersections avec la portion de surface S qui a pour équation $y_1 = 0$.

Je remarque d'abord que ϵ étant très petit, ces intersections différeront fort peu des courbes $\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$

Mais pour étudier plus complètement la forme de ces courbes d'intersection, il faut d'abord rechercher quelles sont les propriétés de la fonction

$$[F_1'].$$

Revenons aux notations de $\mathbb{S}^3$ (1^{re} partie, Chapitre III). Dans ce paragraphe nous avons posé :

$$F_1' = \sum A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + b),$$

A et b étant des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0 , comme nous n'avons pas ici que deux degrés de liberté, j'écrirai simplement :

$$F_1' = \sum A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + b).$$

En faisant ensuite :

$$y_1 = n_1 t, \quad y_2 = n_2 t + t_0, \quad w = (n_1 m_1 + n_2 m_2) t + m_2 t_0 + b,$$

nous trouvons :

$$F'_1 = \sum A \sin w.$$

Je posais ensuite :

$$\psi = \sum A \sin w,$$

la sommation indiquée par le signe $\sum$ s'étendant à tous les termes tels que :

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0;$$

d'où

$$w = m_2 w_2 + b.$$

Dans le cas qui nous occupe, n_2 est nul; la condition $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$ se réduit à $m_1 = 0$, et on a $y_2 = w_2$; il vient donc :

$$\psi = \sum A \sin (m_2 w_2 + b) = \sum A \sin (m_2 y_2 + b).$$

D'après la définition de $[F'_1]$, il suffit pour obtenir cette quantité de supprimer dans l'expression F'_1 tous les termes où m_1 n'est pas nul; il vient donc :

$$[F'_1] = \sum A \sin (m_2 y_2 + b) = \psi.$$

Ainsi la fonction que nous appelons ici $[F'_1]$ est la même que nous désignons par ψ dans la 1^{re} partie.

$[F'_1]$ est par conséquent une fonction périodique de y_2 et cette fonction est finie; elle doit donc passer au moins par un maximum et par un minimum.

Nous supposons pour fixer les idées que $[F'_1]$ varie de la façon suivante quand y_2 varie depuis 0 jusqu'à 2π .

Pour $y_2 = 0$ $[F'_1]$ passe par un maximum égal à φ_1 .

Pour $y_2 = \eta_1$ $[F'_1]$ passe par un minimum égal à φ_2 .

Pour $y_2 = \eta_2$ $[F'_1]$ passe par un maximum égal à φ_3 .

Pour $y_2 = \eta_3$ $[F'_1]$ passe par un minimum égal à φ_4 .

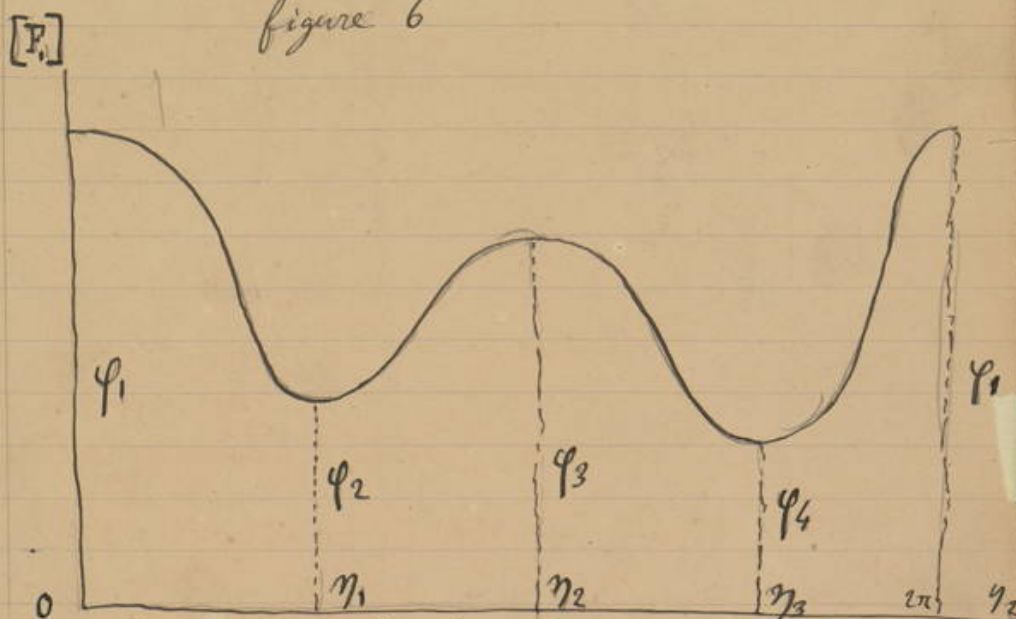
Pour $y_2 = 2\pi$ $[F'_1]$ reprend la valeur φ_1 .

$$\varphi_1 > \varphi_3 > \varphi_2 > \varphi_4.$$

Ces hypothèses peuvent être représentées par la courbe suivante dont l'abscisse est y_i et l'ordonnée $[F_i]$:

figure 6

On note
l'union



Ayant ainsi fixé les idées, je puis construire les courbes

$$y_1 = 0, \quad \frac{x^2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0} \sqrt{\frac{1}{N}} ([F_i] + C_1).$$

Nous verrons que selon la valeur de la constante d'intégration C_1 , ces courbes affecteront des formes différentes.

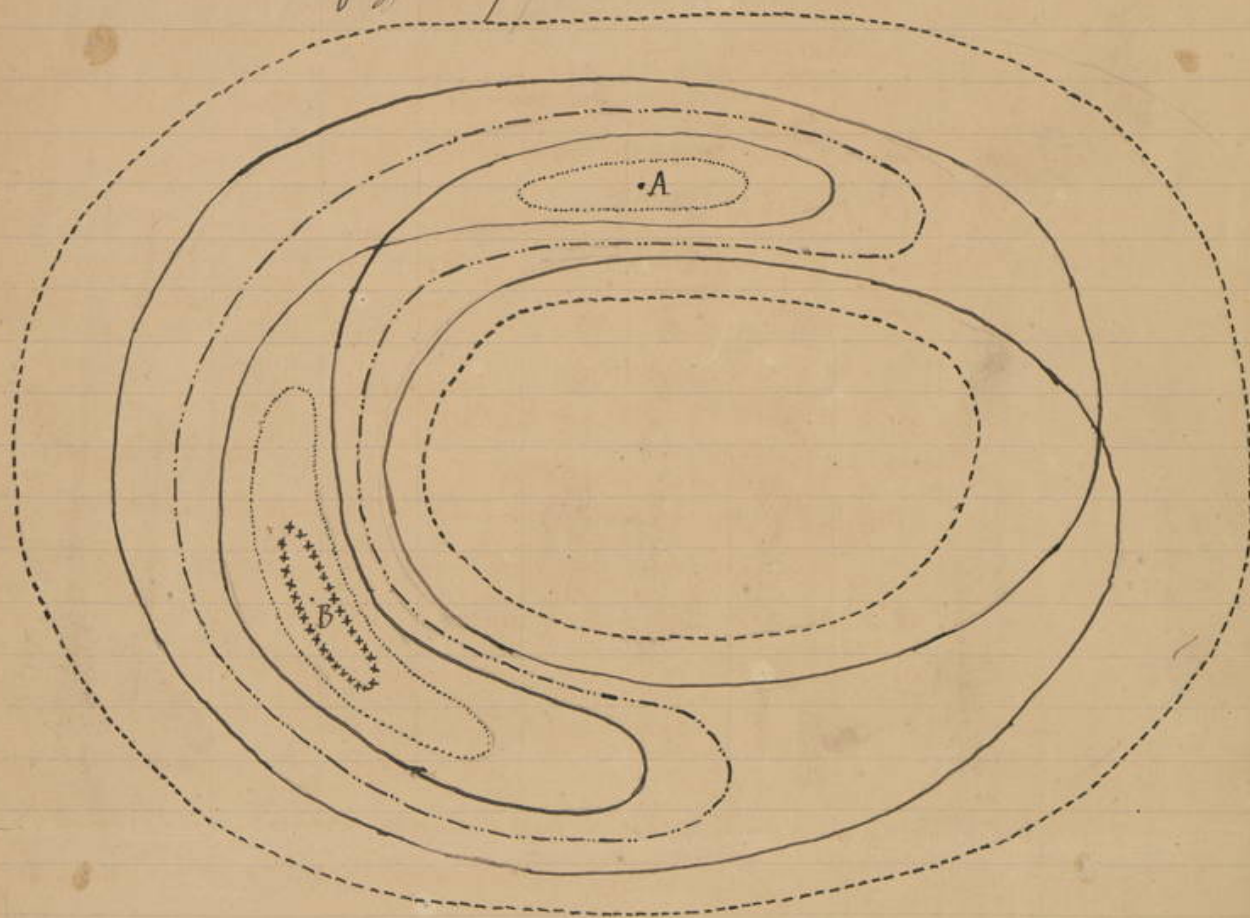
Dans la figure (7), j'ai représenté par un trait plein — les deux courbes $C_1 = -\varphi_4$ et $C_1 = -\varphi_2$; les deux courbes ont chacune un point double dont les coordonnées sont respectivement :

$$\frac{x^2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \quad y_2 = \eta_3$$

et :

$$\frac{x^2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \quad y_2 = \eta_1.$$

figure 7



J'ai représenté par un trait pointillé -----
les deux branches d'une courbe correspondant à une
valeur de $C_1 = -\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait mixte - une
courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre
 $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait ponctué les
deux branches d'une courbe correspondant à une valeur
de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$.

Pour $C_1 = -\varphi_3$ l'une de ces deux branches
se réduit à un point représenté sur la figure en A,
 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}$, $\varphi_2 = \eta_2$; l'autre branche est représentée
sur la figure par le trait + + + + +.

Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, cette seconde branche subsiste seule; pour $C_1 = -\varphi_1$, elle se réduct à son tour à un point représenté en B sur la figure et ayant pour coordonnées :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \quad y_2 = 0.$$

Enfin pour $C_1 < -\varphi_1$, la courbe devient toute entière imaginaire.

Les surfaces définies par l'équation (1) ont une forme générale qu'il est aisé de déduire de celle des courbes que nous venons de construire.

Considérons en effet une quelconque de ces courbes et par tous ses points faisons passer une des lignes dont l'équation générale est :

$$y_2 = \text{const.}, \quad \frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$$

129

L'ensemble des lignes ainsi construites constitue une surface fermée qui sera précisément l'une des surfaces définies par l'équation (1).

On voit par là que ces surfaces seront en général des surfaces fermées triplement connexes (c'est à dire ayant mêmes connexions que le tore).

Pour $C_1 > -\varphi_4$ ou pour C_1 compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$ on trouve deux pareilles surfaces, intérieures l'une à l'autre dans le premier cas, extérieures l'une à l'autre dans le second.

Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, ou entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$ on n'a plus qu'une seule surface triplement connexe; enfin pour $C_1 < -\varphi_1$ la surface cesse complètement d'exister.

Passons aux quatre surfaces remarquables :

$$C_1 = -\varphi_1, -\varphi_2 - \varphi_3 \text{ et } -\varphi_4.$$

Les surfaces $C_1 = -q_2$ et $C_1 = -q_4$ présentent une courbe double et ont mêmes connexions que la surface engendrée par la révolution d'un limaçon de Pascal à point double, ou d'une lemniscate autour d'un axe qui ne rencontre pas la courbe.

La surface $C_1 = -q_3$ se réduit à une seule surface fermée triplement connexe et à une courbe fermée isolée; enfin la surface $C_1 = -q_1$ se réduit à une courbe fermée isolée.

Dans le § 3 (1^{re} Partie, Chapitre III) nous avons envisagé l'équation :

$$\frac{d\psi}{dt\sigma_2} = 0$$

qui portait le n° 15 dans ce paragraphe; nous avons vu qu'à chacune des racines de cette équation correspond une solution périodique. Mais dans le cas qui nous occupe, et d'après une remarque que nous venons de faire, cette équation peut s'écrire :

$$\frac{[dF_1]}{dy_2} = 0,$$

de telle sorte que les solutions périodiques correspondront aux maxima et aux minima de $[F_1]$.

Dans le cas actuel, ces maxima, de même que les minima, seront au nombre de deux.

Nous aurons donc deux solutions périodiques instables correspondant aux deux courbes doubles des surfaces $C_1 = -q_2$ et $-q_4$ et deux solutions périodiques stables, correspondant aux deux courbes fermées isolées des surfaces $C_1 = -q_3$ et $-q_1$.

Mais voyons de plus près en quoi consiste cette correspondance.

Envisageons en particulier la solution

périodique qui correspond à la courbe double de $C_1 = -\eta_1$. Cette solution pourra d'après ce que nous avons vu dans le §3 (1^{re} Partie - Chapitre III) se mettre sous la forme suivante :

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= \xi_0 + \mu \xi_1 + \mu^2 \xi_2 + \dots \\ x_2 &= \xi'_0 + \mu \xi'_1 + \mu^2 \xi'_2 + \dots \\ y_1 &= \zeta_0 + \mu \zeta_1 + \mu^2 \zeta_2 + \dots \\ y_2 &= \zeta'_0 + \mu \zeta'_1 + \mu^2 \zeta'_2 + \dots \end{aligned}$$

où l'on a :

$$\xi_0 = x_1^0, \quad \xi'_0 = x_2^0, \quad \zeta_0 = \eta_1 t, \quad \zeta'_0 = \eta_3$$

et où $\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, \zeta_1$ etc sont des fonctions périodiques de t .

Cette solution périodique serait représentée géométriquement par une courbe trajectoire fermée qui aurait pour équations :

$$(3) \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \mu \theta_1, \quad y_2 = \eta_3 + \mu \theta_2$$

θ_1 et θ_2 étant des fonctions de q , et de μ qui restent finies quand μ s'annule.

D'autre part la courbe double de $C_1 = -\eta_1$ a pour équations :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \quad y_2 = \eta_3$$

Cela montre que ces deux courbes diffèrent infiniment peu l'une de l'autre si l'on regarde μ comme une quantité infiniment petite et on peut faire correspondre les deux courbes point par point de façon que la distance de deux points correspondants soit du même ordre de grandeur que μ .

Comme la solution périodique définie par

les deux équations (2) est instable, on pourra faire passer par la courbe définie par les équations (3) deux surfaces trajectoires asymptotiques :

Voyons quelle relation il y a entre ces surfaces asymptotiques et la surface $C_1 = -q_1$ que nous venons de construire.

D'après ce que nous avons vu au § 5 (1^{re} Partie, Chapitre III), ces surfaces asymptotiques auront pour équations :

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 &= \xi_1^0 + \xi_1^1 \sqrt{\mu} + \xi_1^2 \mu + \xi_1^3 \mu \sqrt{\mu} + \dots \\ x_2 &= \xi_2^0 + \xi_2^1 \sqrt{\mu} + \xi_2^2 \mu + \xi_2^3 \mu \sqrt{\mu} + \dots \end{aligned}$$

Les séries qui entrent dans les seconds membres des équations (4) sont des séries convergentes développées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et les quantités $\xi_1^0, \xi_1^1, \xi_1^2$ etc sont des fonctions de y_1 et de y_2 sur lesquelles nous ne savons qu'une chose, c'est qu'elles sont périodiques de période 2π par rapport à y_1 .

De plus la surface définie par les équations (4) doit passer par la courbe définie par les équations (3), ce qui veut dire qu'en substituant dans les seconds membres de (4) les valeurs de y_1 et de y_2 tirées des deux dernières équations (2), on doit retomber sur les deux premières équations (2). On doit donc avoir :

$$\begin{aligned} \xi_0^0 + \mu \xi_1^0 + \dots &= \xi_1^0 (\xi_0^0 + \mu \xi_1^0 + \dots, \xi_0^1 + \mu \xi_1^1 + \dots) \\ &+ \sqrt{\mu} \xi_1^1 (\xi_0^0 + \mu \xi_1^0 + \dots, \xi_0^1 + \mu \xi_1^1 + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Ce qui prouve qu'on doit avoir :

$$\xi_1^0(\xi_0^0, \xi_0^1) = x_1^0, \quad \xi_2^0(\xi_0^0, \xi_0^1) = x_2^0, \quad \xi_1^1(\xi_0^0, \xi_0^1) = 0, \quad \xi_2^1(\xi_0^0, \xi_0^1) = 0$$

Il est aisé de voir à quoi se réduisent les surfaces asymptotiques quand on suppose $\mu = 0$, on trouve alors simplement

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0.$$

On a donc identiquement :

$$\xi_1^0 = x_1^0, \quad \xi_2^0 = x_2^0.$$

Les surfaces asymptotiques devant être des surfaces trajectoires, les fonctions de μ , de η , et de η_2 définies par les équations (4) devront satisfaire identiquement aux équations (3) du paragraphe précédent. On verrait donc par le même calcul que dans le paragraphe précédent que

$$\xi_1' = 0, \quad \xi_2' = \sqrt{\frac{2}{N}([E] + C_1)}.$$

C_1 étant une constante qu'il s'agit de déterminer. C'est ce que nous ferons à l'aide de l'équation :

$$\xi_2'(\xi_0', \xi_0') = \xi_2'(x_1, \eta_2) = 0.$$

La fonction ξ_2' ne dépendant que de η_2 , il suffira d'y remplacer η_2 par η_3 ce qui donnera

$$\sqrt{\frac{2}{N}(\eta_4 + C_1)} = 0$$

ou

$$C_1 = -\eta_4.$$

Donc la surface $C_1 = -\eta_4$ a pour équation :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\xi_2^0 + \xi_2' \sqrt{\mu}}{\xi_1^0 + \xi_1' \sqrt{\mu}}.$$

Elle ne diffère donc de la surface asymptotique (4) que par des termes de l'ordre de μ .

Cette surface à ligne double $C_1 = -\eta_4$ peut donc être regardée comme une première approximation de la surface asymptotique cherchée et on peut faire correspondre les deux surfaces point par point de telle façon que la distance de deux points correspondants soit de même ordre de grandeur que μ .

De là on peut tirer diverses conséquences :

1^o En première approximation les surfaces asymptotiques

sont des surfaces fermées, c'est là un résultat que les approximations suivantes confirmeront.

3° Toute surface asymptotique étant une surface trajectoire, son intersection par la portion de surface sans contact S qui a pour équation $y_1 = 0$ sera une courbe invariante C (cf. §4, Chapitre II, 1^{re} partie).

Considérons donc la Courbe C'

$$y_1 = 0, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0} \sqrt{\frac{2}{N}} \left([E] - \frac{1}{2} \right).$$

Cette courbe différera infiniment peu (aux quantités près de l'ordre de μ) de la courbe invariante C . Sa conséquente différera aussi infiniment peu de la conséquente de C , c'est à dire de C elle-même. Donc la courbe C' différera infiniment peu (aux quantités près de l'ordre de μ) de sa propre conséquente. Ce sera donc, pour employer le langage du paragraphe cité, une courbe pininvariante aux quantités près de l'ordre de μ .

3° La Courbe C' est une courbe fermée; la Courbe $C^{(1)}$ qui en diffère infiniment peu sera donc une courbe quasi fermée et de telle façon que la distance des deux points de fermeture soit de l'ordre de μ . Ainsi la surface asymptotique coupe la surface $y_1 = 0$, suivant une courbe quasi fermée.

Si l'on faisait $\mu = 0$, la solution la plus générale des équations données serait :

(1) Tous ces raisonnements supposent que dans les équations (4) des surfaces asymptotiques, les séries des seconds membres sont convergentes quel que soit y_2 pourvu que μ soit suffisamment petit; c'est à ce que des considérations empruntées au « Calcul des Limites » permettent d'établir aisément. Voir ce que j'ai dit à ce sujet page 112 et aussi ce que j'ai dit du Calcul des Limites dans l'introduction.

$$x_1 = \text{const.} \quad x_2 = \text{const.} \quad y_1 = -t \frac{dH_0'}{dx_1} + \text{const.},$$

$$y_2 = -t \frac{dH_0'}{dx_2} + \text{const.}$$

Par conséquent si les valeurs initiales de x_1 et de x_2 étaient $x_1^0 + \delta x_1$, $x_2^0 + \delta x_2$, x_1 et x_2 resteraient constamment égaux à $x_1^0 + \delta x_1$ et $x_2^0 + \delta x_2$; de même $-\frac{dH_0'}{dx_1}$ et $-\frac{dH_0'}{dx_2}$ conserveraient des valeurs constantes et l'on aurait :

$$-\frac{dH_0'}{dx_1} = n_1 - L \delta x_1 - M \delta x_2 + \delta^2 n_1,$$

$$-\frac{dH_0'}{dx_2} = -M \delta x_1 - N \delta x_2 + \delta^2 n_2$$

$\delta^2 n_1$ et $\delta^2 n_2$ étant des infiniment petits du 2^e ordre quand δx_1 et δx_2 sont des infiniment petits du 1^{er} ordre.

Soit alors y_2^0 la valeur initiale de y_2 quand on fait $y_1 = 0$; faisons croître le temps jusqu'à ce que y_1 devienne égal 2π , alors y_2 sera devenu égal à :

$$y_2^0 - \frac{2\pi M}{n_1} \delta x_1 - \frac{2\pi N}{n_1} \delta x_2 + \delta^2 y_2^0$$

$\delta^2 y_2^0$ étant infiniment petit du 2^e ordre, si on regarde δx_1 et δx_2 comme des infiniment petits du 1^{er} ordre.

Si donc nous supposons $\mu = 0$ et qu'un point P appartenant à la portion de surface sans contact $y_1 = 0$, ait pour coordonnées

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1, \quad x_2 = x_2^0 + \delta x_2, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = y_2^0$$

son conséquent aura pour coordonnées

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1, \quad x_2 = x_2^0 + \delta x_2, \quad y_1 = 2\pi, \quad y_2 = y_2^0 - \frac{2\pi M}{n_1} \delta x_1 - \frac{2\pi N}{n_1} \delta x_2 + \delta^2 y_2^0$$

Si l'on ne suppose plus $\mu = 0$, le conséquent de ce même point P aura pour coordonnées :

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1 + \mu \omega_1, \quad x_2 = x_2^0 + \delta x_2 + \mu \omega_2, \quad y_1 = 2\pi, \quad y_2 = y_2^0 - \frac{2\pi M}{n_1} \delta x_1 - \frac{2\pi N}{n_1} \delta x_2 + \delta^2 y_2^0 + \mu \omega_3$$

w_1, w_2, w_3 étant des fonctions de $\mu, y_2^0, \delta x_1$ et δx_2 qui sont finies quand μ s'annule.

Imaginons maintenant que le point P appartienne à la surface $C_1 = -\varphi_4$.

Si alors y_2 n'est pas très voisin de y_2^0 , l'expression $[F_1] - \varphi_4$ n'est pas infiniment petite, et par conséquent si μ est très petit :

$$\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2^0}{x_1^0}$$

est précisément du même ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$; d'où l'on conclut que $x_1 - x_1^0 = \delta x_1$ est du même ordre de grandeur que μ et $x_2 - x_2^0 = \delta x_2$ du même ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$.

Si donc le point P (appartenant à la surface $C_1 = -\varphi_4$) a pour coordonnées $x_1, x_2, y_1 = 0$ et y_2 ; si son conséquent P' a pour coordonnées $x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, y_1 = 2\pi$ et $y_2 + \Delta y_2$; Δx_1 et Δx_2 sont au moins de l'ordre de μ et Δy_2 est précisément de l'ordre de $\sqrt{\mu}$. La distance PP' est donc de l'ordre $\sqrt{\mu}$.

Si donc on considère la courbe,

$$y_1 = 0, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0} \sqrt{\frac{2}{N} ([F_1] - \varphi_4)},$$

qui ainsi que nous venons de le voir est une courbe péninvariante, la distance d'un point P quelconque de cette courbe (à moins qu'il ne soit très voisin du point double) à son conséquent est ^{un} infiniment petit du même ordre que $\sqrt{\mu}$ et non pas un infiniment petit d'ordre supérieur.

§4. Construction Exacte des Surfaces Asymptotiques

Reprenons les séries auxquelles nous sommes parvenus dans le §2.

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + x_1^1 \sqrt{\mu} + x_1^2 \mu + x_1^3 \mu \sqrt{\mu} + \dots \\ x_2 &= x_2^0 + x_2^1 \sqrt{\mu} + x_2^2 \mu + x_2^3 \mu \sqrt{\mu} + \dots \end{aligned}$$

Les x_i^k sont des fonctions de y_1 et de y_2 , périodiques de période 2π par rapport à y_1 . Mais ces fonctions ne sont pas encore entièrement déterminées, car nous avons introduit dans le calcul du paragraphe 2 une suite de constantes d'intégration $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ que nous avons jusqu'ici laissées arbitraires.

Supposons d'abord que l'on ait donné à C_1 une valeur quelconque $\gamma - \varphi_1$; alors

$$[F_1] + C_1$$

est une fonction périodique de y_2 qui reste constamment positive, et x_2^1 est toujours réel. Cela ne suffirait pas toutefois pour déterminer complètement x_2^1 . Car on a :

$$x_2^1 = \pm \sqrt{\frac{g}{N} ([F_1] + C_1)}.$$

Il faut encore choisir entre les deux signes du radical; donnons par exemple à ce radical le signe +. Alors x_2^1 sera une fonction périodique de y_2 qui sera constamment réelle et positive.

Nous pourrions choisir ensuite toutes les autres constantes C_2, C_3 , etc, d'une manière tout à fait arbitraire.

Je dis que les x_i^k qui sont déjà périodiques de période 2π par rapport à y_1 sont également périodiques par rapport à y_2 .

Je suppose en effet que cela soit démontré pour :

$$\begin{array}{c} x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^{K-2} \\ x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^{K-2} \end{array}$$

Je dis que cela sera encore vrai pour x_1^{K-1} et x_2^{K-1} .

En effet l'équation (11) du §2 montre immédiatement que cela est encore vrai pour x_1^{K-1} .

L'équation (12) du §2 montre ensuite que :

$$\frac{d(x_2^1 [x_2^{K-1}])}{dy_2}$$

est une fonction connue de y_2 et que cette fonction est périodique de période 2π .

Cette fonction peut se développer en série trigonométrique procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de y_2 . On peut démontrer que cette série ne contient pas de terme tout connu ; car si elle en contenait un, on arriverait à des résultats contraires à la deuxième extension de théorème III (1^{re} Partie, Chapitre II §4). Je n'insiste pas davantage sur ce point qui n'importe pas à mon objet principal.

Si cette série ne contient pas de terme tout connu, $x_2^1 [x_2^{K-1}]$ sera une fonction périodique de y_2 et comme (d'après la façon dont nous avons choisi C_1), x_2^1 est une fonction périodique réelle et positive de y_2 et que cette fonction ne s'annule pas, $[x_2^{K-1}]$ sera une fonction périodique de y_2 et cette fonction restera réelle et finie.

E. B. F. D.

137 Malheureusement en choisissant C_1 comme nous venons de le faire, les séries auxquelles nous parvenons ne sont pas convergentes (C'est ce qui fait que j'insiste peu sur ce 1^{er} cas.) Quoique divergentes elles peuvent cependant rendre des services au même

titre que les séries de M. Lindstedt et dans des cas où les méthodes habituelles sont en défaut.

Observons que dans les intégrations successives qui donnent par récurrence les x_i^k , il ne s'introduit pas de petits diviseurs. Si donc nos séries divergent, ce n'est pas pour la même raison que les séries ordinaires de la Mécanique Céleste. C'est au contraire parce que les différentiations peuvent introduire de grands multiplicateurs. Cette circonstance peut plutôt être regardée comme facilitant l'emploi de ces séries; les termes qui devraient détruire la convergence se présenteront en effet moins vite que s'ils étaient dus à de petits diviseurs.

Supposons maintenant qu'on ait donné à C_1 une valeur $< -\eta_4$. Alors

$$x_2' = \sqrt{\frac{2}{N}([F] + C_1)}$$

n'est pas toujours réel. Supposons par exemple que, pour la valeur choisie de C_1 , x_2' reste réel quand y_2 varie depuis η_5 jusqu'à η_6 . Je vais considérer une valeur η_7 de y_2 comprise entre η_5 et η_6 :

$$\eta_5 < \eta_7 < \eta_6$$

et je vais chercher à définir les x_i^k pour toutes les valeurs de y_2 comprises entre η_5 et η_7 .

J'observe d'abord que x_2' est susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire, à cause du double signe du radical; donnons d'abord par exemple à ce radical le signe +.

Imaginons que l'on ait calculé successivement

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^1, & x_1^2, & \dots, & x_1^{k-2}, & & & \\ x_2^1, & x_2^2, & & & x_2^{k-2}, & & \end{array}$$

L'équation (11) du §2 nous permet alors de calculer sans difficulté x_1^{k-1} et l'équation (12) des

même paragraphe nous donne :

$$\frac{d(x_2' [x_2^{K-1}])}{dy_2}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$x_2' [x_2^{K-1}] = \theta(y_2) + C_{K-1}$$

$\theta(y_2)$ étant une fonction entièrement connue de y_2 et C_{K-1} une constante d'intégration.

Nous déterminerons cette constante par la condition

$$\theta(\eta_5) + C_{K-1} = 0.$$

Alors bien que x_2' s'annule pour $y_2 = \eta_5$, la fonction

$$[x_2^{K-1}] = \frac{\theta(y_2) - \theta(\eta_5)}{x_2'}$$

reste finie pour $y_2 = \eta_5$.

Nous avons donc complètement déterminé les fonctions x_i^K pour $\eta_5 < y_2 < \eta_3$ et nous appellerons $x_{0,i}^K$ les fonctions de y_2 ainsi déterminées.

Supposons que l'on recommence le calcul en donnant au radical le signe $-$. On trouvera pour les fonctions x_i^K de nouvelles valeurs que l'appellera $x_{1,i}^K$ et qui seront d'ailleurs la continuation analytique des premières.

Imaginons ensuite que l'on remplace C_1 par une constante nouvelle C_1' très voisine de C_1 .

Alors le radical

$$\sqrt{\frac{2}{N} ([F] + C_1')}$$

sera réel toutes les fois que y_2 sera compris entre η_7 et une certaine valeur η_8 très voisine de η_6 .

Cela posé, nous allons par le procédé exposé ci-dessus calculer les fonctions x_i^K pour les valeurs de

y_2 comprises entre η_7 et η_8 , d'abord en faisant :

$$x_2' = + \sqrt{\frac{2}{N}} ([F_1] + C_1')$$

(nous appellerons $x_{2,i}^k$ les fonctions ainsi calculées),
puis en faisant

$$x_2' = - \sqrt{\frac{2}{N}} ([F_1] + C_1')$$

(nous appellerons $x_{2,i}^k$ les fonctions ainsi calculées.)

Nous allons ensuite construire les quatre branches de courbes :

$$1^{\circ} \quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{0,1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{0,2}(y_2)$$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_5$ à $y_2 = \eta_7$.

$$2^{\circ} \quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{1,1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{1,2}(y_2)$$

que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_5$ jusqu'à $y_2 = \eta_7$.

$$3^{\circ} \quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{2,1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{2,2}(y_2)$$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

$$4^{\circ} \quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{3,1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{3,2}(y_2)$$

que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

Dans ces formules nous avons posé :

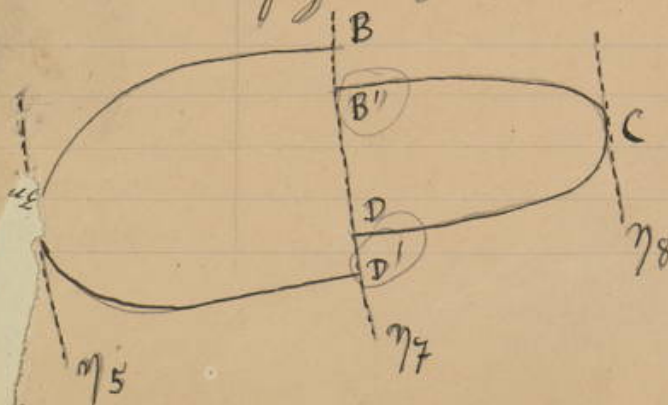
$$\varphi_{p,q}(y_2) = x_{p,q}^0 + x_{p,q}^1 \sqrt{\mu} + \dots + x_{p,q}^k \mu^{\frac{k}{2}}.$$

La première et la seconde de ces courbes se raccorderont et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_5$.

La troisième et la quatrième courbes se raccorderont également et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_8$.

C'est ce qu'indique la figure 8 où les trois

figure 8



arcs pointillés représentant
les trois courbes

$y_2 = \eta_5, \eta_7, \eta_8$
où l'arc AB représente
la 1^{ère} de nos quatre branches
de courbe, l'arc AD

la seconde, l'arc B'C la 3^{me} et l'arc DC la quatrième.

Nous regarderons C_1 comme une donnée, mais C'_1 est resté jusqu'ici arbitraire. Nous déterminerons C'_1 par la condition que la 1^{re} et la 3^{me} courbes se raccordent et que les points B et B' se confondent, ce qui s'exprime analytiquement par les conditions :

$$(3) \quad \varphi_{0,1}(\eta_1) = \varphi_{2,1}(\eta_1), \quad \varphi_{0,2}(\eta_1) = \varphi_{2,2}(\eta_1).$$

Ces deux équations ne sont d'ailleurs pas distinctes et se ramènent à une seule.

En nous appuyant encore sur la deuxième extension du théorème III (1^{re} partie Chapitre II § 4) nous pourrions démontrer que si C'_1 est déterminé par les équations (3), les équations

$$(3 \text{ bis}) \quad \varphi_{1,1}(\eta_1) = \varphi_{3,1}(\eta_1), \quad \varphi_{1,2}(\eta_1) = \varphi_{3,2}(\eta_1)$$

seront aussi satisfaites aux quantités près de l'ordre de $\mu^{\frac{K+1}{2}}$; c'est à dire que la 2^{de} et la 4^{me} courbes se raccorderont aux quantités près de cet ordre, ou que la distance DD' est un infiniment petit de même ordre que $\mu^{\frac{K+1}{2}}$.

Mais je dois faire ici la même observation que plus haut; les séries (1) auxquelles on parvient de la sorte ne sont pas convergentes bien qu'elles puissent rendre des services si on les manie avec précaution.

Aussi n'insisterai-je pas davantage sur tous ces points et ai-je hâte d'arriver aux cas où les séries (1) convergent.

D'après ce que nous avons vu au § 5 (1^{re} Partie Chapitre III) et rappelle dans le paragraphe précédent, il existe des surfaces asymptotiques ayant pour équations :

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 &= \xi_1^0 + \xi_1^1 \sqrt{\mu} + \xi_1^2 \mu + \dots \\ x_2 &= \xi_2^0 + \xi_2^1 \sqrt{\mu} + \xi_2^2 \mu + \dots \end{aligned}$$

Nous conserverons à ces équations le même numéro (4) que dans le paragraphe précédent.

Voyons d'abord quelles conséquences nous pouvons immédiatement déduire des principes posés dans les paragraphes cités.

- 1^o Les fonctions ζ_i^k sont périodiques par rapport à y_i .
- 2^o Elles sont finies et réelles.
- 3^o Les séries (4) sont convergentes pour les valeurs suffisamment petites de μ . Nous pouvons même prendre μ assez petit pour que ces séries restent convergentes pour une valeur donnée quelconque de y_i .

Nous allons chercher à définir nos fonctions ζ_i^k pour toutes les valeurs de y_i comprises entre 0 et 2π .

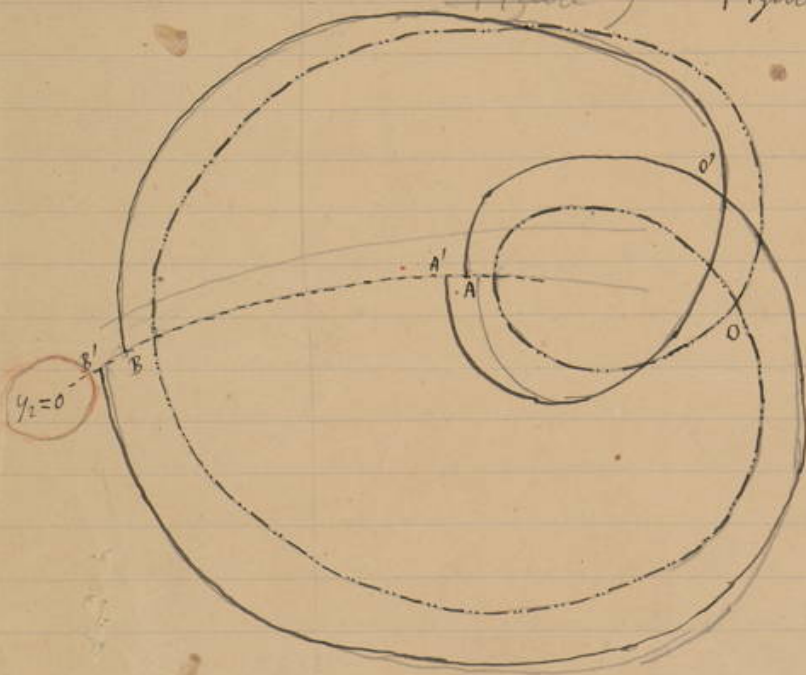
Nous avons déjà vu dans le paragraphe précédent que :

$$\zeta_1^0 = x_1^0, \quad \zeta_2^0 = x_2^0, \quad \zeta_1^1 = 1, \quad \zeta_2^1 = \pm \sqrt{\frac{2}{N}([R_2] - q_4)},$$

en admettant que ce soit la surface asymptotique correspondant à $C_1 = -q_4$ que nous nous proposons de construire.

Figure 9

Figure 9



Dans la figure 9 j'ai représenté par un trait pointillé ----- la courbe $y_1 = y_2 = 0$, par un trait mixte la courbe

$$y_1 = 0, \quad \frac{x^2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0} \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] - \varphi_4)}$$

que nous avons appris à construire dans le paragraphe précédent. J'ai figuré en O le point double de cette courbe, en O' le point d'intersection de la surface $y_1 = 0$ et de la trajectoire T représentant la solution périodique instable qui correspond d'après ce que nous avons vu à $C_1 = -\varphi_4$. La distance OO' est comme je l'ai dit du même ordre de grandeur que μ .

J'ai représenté ensuite en trait plein — en $BO'A'$ et $AO'B'$ les intersections de $y_1 = 0$ avec les deux nappes de surfaces asymptotiques qui vont passer par la trajectoire fermée T ; j'ai arrêté ces deux branches de courbes aux points A, B, A', B' parce que je conviens de faire varier y_2 depuis 0 jusqu'à 2π .

Le radical :

$$\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] - \varphi_4)}$$

est toujours réel, mais il est susceptible d'un double signe. Donnons lui par exemple le signe $+$ quand y_2 varie depuis 0 jusqu'à η_3 (valeur de y_2 qui donne $[F_1] = \varphi_4$) et le signe $-$ quand y_2 varie depuis η_3 jusqu'à 2π . Appelons ξ_2' le radical ainsi défini.

La surface asymptotique étant une surface trajectoire les fonctions (4) devront satisfaire aux équations (3) du $\mathcal{S}^2$; nous pourrions donc calculer les fonctions ξ_i^k par récurrence par le procédé de ce $\mathcal{S}^2$.

Mais il nous reste à voir comment on peut déterminer

les constantes d'intégration $C_2, C_3, \dots$, que ce procédé de calcul introduit.

Supposons que l'on ait calculé successivement par ce procédé

$$\xi_1^0, \xi_1^1, \dots, \xi_1^{k-2}, \xi_1^{k-1},$$

$$\xi_2^0, \xi_2^1, \dots, \xi_2^{k-2}, \frac{d\xi_2^{k-1}}{dy_1},$$

ainsi que les constantes d'intégration :

$$C_1, C_2, \dots, C_{k-2}.$$

L'équation (12) du §2 nous donne :

$$\frac{d(\xi_2^1 [\xi_2^{k-1}])}{dy_2}$$

sous la forme d'une fonction connue de y_2 . Nous pouvons donc écrire :

$$[\xi_2^{k-1}] = \frac{\theta(y_2) + C_{k-1}}{\xi_2^1},$$

$\theta(y_2)$ étant une fonction entièrement connue de y_2 et C_{k-1} une constante d'intégration. Mais nous savons que $[\xi_2^{k-1}]$ doit rester fini et que ξ_2^1 s'annule pour $y_2 = \eta_3$; nous déterminerons donc la constante C_{k-1} par la condition

$$\theta(\eta_3) + C_{k-1} = 0.$$

Ainsi ce procédé permet de déterminer sans ambiguïté les constantes C_k et les fonctions ξ_i^k et nous fait ainsi connaître l'équation de la branche de courbe $BO'A'$.

En opérant de la même façon, mais en changeant le signe du radical, on aurait obtenu l'équation de la branche de courbe $B'O'A$.

Ainsi, si l'on choisit convenablement les constantes d'intégration, les séries (1) convergent pour les petites valeurs de μ et nous fournissent alors les équations des surfaces asymptotiques.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la distance BB' est un infiniment petit de même ordre que μ , de sorte que la courbe invariante $BO'B'$ est quasi fermée et que la distance des points de fermeture est de l'ordre de μ .

De plus, nous avons vu à la fin du même paragraphe que la distance du point B à son conséquent est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$, c'est à dire infiniment grande par rapport à la distance BB' des deux points de fermeture.

Donc en vertu du Corollaire du Théorème III (1^{re} Partie Chapitre II §4) la courbe $BO'B'$ est non seulement quasi fermée, mais rigoureusement fermée de telle sorte que les deux points B et B' se confondent.

De même la courbe invariante AOA' est rigoureusement fermée et les deux points A et A' se confondent.

Donc les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées.

Mais au début de ce travail, nous avons montré que pour établir la stabilité, il suffit de démontrer l'existence de surfaces trajectoires fermées.

Donc dans le cas particulier qui nous occupe, la stabilité peut être regardée comme rigoureusement établie.

Si nous étions partis de la solution périodique instable qui correspond à $C_1 = -\varphi_2$, nous aurions démontré par des raisonnements tout semblables que la surface asymptotique correspondante est une surface fermée et qu'elle présente la même forme générale que la surface $C_1 = -\varphi_2$ que nous avons construite dans le paragraphe précédent et dont l'intersection avec $y_1 = 0$ est représentée sur la figure 7.

§ 5. Solutions Périodiques du 2^{me} Genre

La surface asymptotique que nous venons de construire est une surface fermée à courbe double et possède par conséquent deux nappes.

Une pareille surface divisera donc l'espace en trois régions :

- 1^o Une région R_1 intérieure à la fois aux deux nappes.
- 2^o Une région R_2 comprise entre les deux nappes.
- 3^o Une région R_3 extérieure aux deux nappes.

Si nous considérons une courbe trajectoire, cette courbe ne pourra couper la surface asymptotique sans quoi par un point de l'espace passeraient deux trajectoires ce qui n'est pas possible.

Ainsi, si notre point représentatif est originairement dans une de ces trois régions, il y restera toujours.

La stabilité est donc, comme j'ai dit plus haut, rigoureusement démontrée.

Appelons moyen mouvement la quantité suivante : soit q_1 la quantité dont y_1 a augmenté pendant un temps très long, q_2 la quantité dont y_2 a augmenté dans le même temps. Le moyen mouvement sera la limite du rapport $\frac{q_1}{q_2}$ quand le temps tend vers l' ∞ .

Dans toute la région R_2 , le moyen mouvement est constant; il y a donc libration.

Dans la région R_3 on peut faire passer une infinité de courbes fermées représentant des solutions périodiques. En effet à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_2}{n_1}$ correspond une équation $\frac{d\psi}{dt} = 0$ et à chaque racine de cette équation correspond une solution périodique. Parmi ces solutions périodiques une infinité seront instables.

Choisissons une de ces solutions instables, la surface asymptotique correspondante partagera la région R_3 en trois régions partielles :

R'_1 , extérieure aux deux nappes; R'_2 région de libration comprise entre les deux nappes; R'_3 intérieure aux deux nappes.

De même en envisageant d'autres surfaces asymptotiques la région R'_1 et la région R'_3 se trouveront de nouveau subdivisées en trois régions partielles.

Occupons nous maintenant des régions de libration et en particulier de R_2 et voyons si cette région peut comme R_3 être subdivisée en trois régions partielles. Il suffit pour cela de démontrer que dans la région R_2 on peut faire passer une infinité de courbes fermées représentant des solutions périodiques.

On peut y arriver par les considérations suivantes. Écrivons les équations :

$$x_1 = x_1^0 + \mu x_1^2,$$

$$x_2 = x_2^0 \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{2}{N}([E] + C)} + \mu u_2^2.$$

Ces équations sont à des quantités près de l'ordre μ celles de surfaces que nous avons construites (voir figure 8) elles satisfont donc approximativement aux équations (3) du §². Quant à u_2^2 c'est une

Je me propose de modifier fonction de y_1 et de y_2 qui ne diffère de x_2^2 que par une fonction de y_2 de telle sorte que

$$\frac{du_1^2}{dy_1} = \frac{dx_2^2}{dy_1}.$$

Cette fonction u_1^2 doit d'ailleurs rester toujours finie.

Je me propose de modifier la forme de la fonction F qui entre dans nos équations différentielles de façon que

ces équations (1) satisfont exactement aux équations (3) du §2.

Je cherche donc une fonction F^* telle que les équations :

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF^*}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF^*}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF^*}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF^*}{dx_2} \end{aligned}$$

admettent des surfaces trajectoires représentées précisément par ces équations (1).

Voici comment nous déterminerons cette fonction F^* .

Observons d'abord que x_1^0 et x_2^0 sont déterminés par les deux équations simultanées

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C, \quad \frac{dF_0}{dx_2^0} = 0.$$

On peut lire de ces deux équations x_1^0 et x_2^0 en fonctions de C . Nous regarderons donc désormais x_1^0 et x_2^0 comme des fonctions connues de C .

D'autre part $[F_1]$ est une fonction de y_2 , de x_1^0 et de x_2^0 , ce qui nous permet de le regarder comme une fonction connue de C .

Les équations (1) nous donneront par conséquent x_1 et x_2 en fonctions de y_2 de C et de C_1 .

Remarquons que si x_1 et x_2 sont définis par ces équations,

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2 = dS$$

est une différentielle exacte, de sorte que :

$$\frac{dx_1}{dy_2} = \frac{du_2}{dy_1}$$

Résolvons maintenant les équations (1) par rapport à x_1 et à x_2 il viendra

$$C = F^*(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

$$C_1 = \Phi^*(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

La fonction F^* est ainsi définie et on aura en employant la notation de Jacobi :

$$[F^*, \Phi^*] = 0,$$

ce qui signifie que

$$\Phi^* = \text{const.}$$

est une intégrale des équations (2).

La solution la plus générale de ces équations (2) s'écrit alors :

$$(x) \quad \frac{dS}{dy_1} = x_1, \quad \frac{dS}{dy_2} = x_2, \quad \frac{dS}{dC} = C' + t, \quad \frac{dS}{dC_1} = C'_1,$$

C et C'_1 étant deux nouvelles constantes d'intégration.

Cherchons à former effectivement F^* ou du moins à nous rendre compte de l'ordre de grandeur de la différence :

$$F - F^*$$

Où x_1^2 est défini par la condition suivante :

$$F(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1) - C$$

doit être une quantité de même ordre que $\mu\sqrt{\mu}$. (Cf. l'équation (II) du §2.

Donc comme $\frac{dF_0}{dx_2^0}$ est nul, la fonction

$$F(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu u_2^2) - C$$

sera encore de même ordre que $\mu\sqrt{\mu}$, quelle que soit la fonction u_2^2 .

D'ailleurs on a identiquement :

$$F^*(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu u_2^2) = C.$$

Donc la différence

$$F - F^*$$

regardée comme fonction de μ , de C , de C_1 , de y_1 et de y_2 est de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$.

Posons maintenant :

$$\xi_2 \sqrt{\mu} = x_2 - x_2^0$$

Des deux équations (1) on tirera facilement C_1 et C en fonctions de x_1, ξ_2, y_1, y_2 et μ ; on voit alors sans peine que C et C_1 peuvent être développés suivant les puissances positives de $\sqrt{\mu}$, les coefficients étant des fonctions finies de x_1 , de ξ_2 , de y_1 et de y_2 .

Nous venons de voir $F' - F'^*$ est une fonction de μ , de y_1 , de y_2 , de C et de C_1 , dont le développement suivant les puissances de μ commence par un terme en $\mu\sqrt{\mu}$; si nous y remplaçons C et C_1 par leurs valeurs en fonctions de μ , de x_1 , de ξ_2 , de y_1 et de y_2 , nous verrons que cette différence $F' - F'^*$ est une fonction développée suivant les puissances de μ , dont les coefficients dépendent de x_1, ξ_2, y_1 et y_2 et qui commence par un terme en $\mu\sqrt{\mu}$.

Par conséquent la fonction :

$$\frac{F' - F'^*}{\mu\sqrt{\mu}} = F'(\mu, x_1, \xi_2, y_1, y_2)$$

ne devient pas infinie pour $\mu = 0$.

Par le changement de variable que nous venons de faire les équations (2) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF'^*}{dy_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF'^*}{dx_1}, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{dF'^*}{\sqrt{\mu} dy_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF'^*}{\sqrt{\mu} d\xi_2}. \end{aligned}$$

De même les équations proposées :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF'}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF'}{dx_i}$$

doivent se réduire à :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF'}{dy_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF'}{dx_1}, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{dF'}{\sqrt{\mu} dy_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF'}{\sqrt{\mu} d\xi_2}. \end{aligned}$$

Nous formerons en outre les équations suivantes :

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{d}{dy_1} (F_1^* + \varepsilon F_1') & \frac{dy_1}{dt} &= - \frac{d}{dx_1} (F_1^* + \varepsilon F_1') \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{d}{\sqrt{\mu} dy_2} (F_1^* + \varepsilon F_1') & \frac{dy_2}{dt} &= - \frac{d}{\sqrt{\mu} d\xi_2} (F_1^* + \varepsilon F_1') \end{aligned}$$

qui se réduisent à (2 bis) pour $\varepsilon = 0$ et à (3) pour $\varepsilon = \mu \sqrt{\mu}$.

D'après ce que nous avons vu plus haut, les équations (2) et par conséquent les équations (2 bis) peuvent s'intégrer exactement; nous en avons donné par les équations (4) la solution générale.

Si l'on discute cette solution générale et si on cherche à la construire en conservant le même mode de représentation géométrique que dans les paragraphes précédents, on verra qu'il existe une infinité de surfaces trajectoires fermées.

Ces surfaces qui ont pour équation :

$$(5) \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{2}{N} (2[F_1] + C_1)} + \mu u_2^2}{x_1^0 + \mu x_1^2}$$

diffèrent peu des surfaces que nous avons construites dans le §3 et dont l'équation s'écrivait :

$$(6) \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{2}{N} (2[F_1] + C_1)}}{x_1^0}$$

Elles ont même forme générale que les surfaces définies par l'équation (6). Si donc nous faisons les mêmes hypothèses que dans le §3 au sujet des maxima et des minima de (F_1') , deux de nos surfaces (5) seront des surfaces fermées à courbe double; ce seront celles qui correspondent aux valeurs $-\eta_2$ et $-\eta_4$ de la constante C_1 . Les autres se composent de une ou deux nappes fermées.

La surface fermée à courbe double sera pour nos équations (2 bis) une surface asymptotique

et elle partagera l'espace en trois régions comme nous l'avons dit plus haut.

Parmi ces régions, je distingue la région R_2 comprise entre les deux nappes qui est une région dite de libération et je me propose de montrer que dans cette région, on peut tracer une infinité de trajectoires fermées correspondant à des solutions périodiques.

Revenons en effet aux équations (4) qui nous font connaître la solution générale des équations (1) et (2bis). D'après la forme des équations (1), nous pouvons écrire :

$$S = \alpha y_1 + \beta y_2 + \theta(y_1, y_2) + \sqrt{\frac{\mu}{2N}} \int \sqrt{([E] + C)} dy_2$$

α et β étant des fonctions de C et de C_1 , seulement et $\theta(y_1, y_2)$ une fonction réelle et périodique de y_1 et de y_2 .

On en déduit :

$$C_1' = \frac{dS}{dC_1} = \frac{d\alpha}{dC_1} y_1 + \frac{d\beta}{dC_1} y_2 + \frac{d\theta}{dC_1} + \sqrt{\frac{\mu}{2N}} \int \frac{dy_2}{\sqrt{([E] + C_1)}}$$

Nous donnerons à C_1 une valeur déterminée qui devra être plus petite que $-\varphi_1$ puisque nous nous supposons placés dans la région R_2 .

La surface fermée qui correspond à cette valeur de C_1 présentant les mêmes connexions que C_0 lors, nous pouvons en faire le tour de deux manières, différentes : 1° En regardant y_2 comme constant ; 2° en regardant y_1 comme constant.

Quand on aura fait le tour de la surface en regardant y_2 comme constant, y_1 aura augmenté de 2π et $\frac{dS}{dC_1}$ aura augmenté de

$$2\pi \frac{d\alpha}{dC_1}$$

Quand on aura fait le tour de la surface en

regardant y_1 comme constant, y_2 sera revenu à la même valeur, mais l'intégrale

$$\int \frac{dy_2}{V([R_1] + C_1)}$$

aura augmenté d'une certaine période v définie comme il suit :

Supposons que les valeurs de y_2 pour lesquelles le radical $V([R_1] + C_1)$ est réel soient les valeurs comprises entre η_5 et η_6 , on aura :

$$v = 2 \int_{\eta_5}^{\eta_6} \frac{dy_2}{V([R_1] + C_1)}$$

Quand notre intégrale augmentera de v , $\frac{dS}{dC_1}$ augmentera de

$$v \sqrt{\frac{\mu}{2N}}$$

Pour que la solution qui correspond à cette valeur de C_1 soit périodique, il faut donc et il suffit que ces deux quantités :

$$2\pi \frac{da}{dC_1} \quad \text{et} \quad v \sqrt{\frac{\mu}{2N}}$$

soient commensurables entre elles.

Cette condition sera évidemment satisfaite pour une infinité de valeurs de C_1 ; notre région R_2 contient donc une infinité de trajectoires fermées, représentant des solutions périodiques.

Ainsi si K est un nombre commensurable quelconque, l'équation :

$$(7) \quad 2\pi \frac{da}{dC_1} = Kv \sqrt{\frac{\mu}{2N}}$$

(qui contient C_1 parce que $\frac{da}{dC_1}$ et v sont des fonctions de C_1) nous donnera une valeur de C_1 correspondant à une solution périodique.

Pour discuter cette équation, il me faut chercher ce que c'est que $\frac{da}{dC_1}$.

Il me suffit pour cela de rappeler que :

$$a = x_1^0 + \mu [x_1^2]$$

et que :

$F_0(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1) + \mu F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2)$ doit se réduire à C aux quantités près de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$. On en conclut :

$$-n_1 x_1^2 - \frac{N}{2} (x_2^1)^2 + F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2) = 0$$

d'où

$$-n_1 [x_1^2] - C_1 - [F_1] + [F_1] = 0$$

et :

$$\frac{da}{dC_1} = -\frac{\mu}{n_1}.$$

$\frac{da}{dC_1}$ est donc une constante, indépendante de C_1 , de sorte que l'équation (7) peut s'écrire

$$(7bis) \quad \frac{v}{\sqrt{\mu}} = \text{const.}$$

Pour discuter cette équation nouvelle, il convient de chercher comment varie v quand on fait varier C_1 depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_1$.

Pour $C_1 = -\varphi_4$, v est infini ; C_1 variant depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_2$, v décroît d'abord jusqu'à un certain minimum, pour croître ensuite de nouveau jusqu'à l'infini.

Pour $C_1 < -\varphi_2$, v peut admettre deux valeurs correspondant aux deux nappes de la surface et que l'on peut envisager séparément. (Cf figure 7)

La première nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-\varphi_2$ jusqu'à $-\varphi_3$.

La seconde nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-q_2$ et $-q_1$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-q_2$ jusqu'à $-q_1$.

Ainsi v admet trois minima au moins et reste toujours supérieur à une certaine limite positive.

Si donc nous regardons l'équation (7 bis) comme définissant C_1 en fonction de μ , C_1 sera fonction continue de μ , mais nous pourrions prendre μ assez petit pour que cette équation n'admette aucune racine.

Ainsi il est certain qu'il existe toujours une infinité de solutions périodiques; mais quand on fera décroître μ , toutes ces solutions disparaîtront l'une après l'autre.

Il résulte de ce qui précède que les équations (4) admettent ^{pour} une infinité de solutions périodiques; les principes du Chapitre III (1^{re} Partie) nous permettent d'affirmer qu'il y en a encore une infinité pour les valeurs suffisamment petites de ε . Comme μ est très petit, nous voulons conclure qu'il existera une infinité de solutions périodiques pour $\varepsilon = \mu\sqrt{\mu}$, c'est à dire pour les équations (3) qui sont déduites par un changement de variable très simple des équations proposées.

Par conséquent, si nous revenons à ces équations proposées, nous voyons que dans la région de libération R_2 il y a une infinité de trajectoires fermées représentant des solutions périodiques.

Mais si faisant décroître μ d'une manière continue, on suit une de ces trajectoires fermées, on la verra se déformer aussi d'une façon continue et disparaître ensuite pour une certaine valeur de μ . Ainsi pour $\mu = 0$ toutes les solutions

périodiques de la région R_2 auront disparu l'une après l'autre. Ce n'est pas ainsi que se comportaient les solutions périodiques étudiées dans le Chapitre III, 1^{re} Partie et qui subsistaient encore pour $\mu = 0$.

On peut démontrer que dans le voisinage d'une trajectoire fermée représentant une solution périodique, soit stable, soit instable, il passe une infinité d'autres trajectoires fermées. Cela ne suffit pas, en toute rigueur, pour conclure que toute région de l'espace, si petite qu'elle soit, est traversée par une infinité de trajectoires fermées⁽¹⁾, mais cela suffit pour donner à cette hypothèse un haut caractère de vraisemblance.

Je regrette également de ne pouvoir montrer ici, comment le théorème IV du Chapitre II, (1^{re} Partie) peut être utilisé pour l'étude de la distribution des trajectoires fermées dans l'espace.

(1) Les travaux récents de M. Cantor nous ont appris en effet (pour employer le langage de ce savant géomètre) qu'un ensemble peut être parfait, sans être continu.

Chapitre II

Résumé Général des Résultats

§1. Résultats Positifs.

Nos résultats s'appliquent aux équations de la dynamique toutes les fois qu'il n'y a que deux degrés de liberté; ils s'appliquent donc spécialement à un cas particulier du problème des trois corps qui est celui

+ la masse

- 1° où l'excentricité de la planète troublée étant nulle, le mouvement de la planète troublante reste képlérien.
- 2° où l'excentricité de la planète troublante est nulle, celle de la planète troublée pouvant être quelconque.
- 3° où l'inclinaison des orbites est nulle.

Lorsqu'il n'y a que deux degrés de liberté, la situation du système peut être représentée par la position d'un point dans l'espace, ce qui permet d'énoncer les résultats obtenus sous une forme géométrique.

Toute solution peut être représentée par une courbe gauche appelée trajectoire; les trajectoires fermées correspondent aux solutions périodiques. Il y a toujours une infinité de trajectoires fermées, mais ces trajectoires fermées peuvent être réparties en deux classes.

1° Les trajectoires stables. Si la position initiale du point représentatif est très voisine d'une trajectoire stable, ce point restera éternellement très près de cette trajectoire.

2° Les trajectoires instables qui ne jouissent pas de la même propriété.

Il y a une infinité de trajectoires fermées stables et une infinité de trajectoires fermées instables.

Dans le voisinage d'une trajectoire fermée instable, il y a une infinité de trajectoires dites asymptotiques qui jouissent de la propriété suivante:

Le point représentatif qui parcourt une trajectoire asymptotique est pour $t = -\infty$ infiniment rapproché de la trajectoire fermée correspondante; il s'en éloigne ~~beaucoup~~ asymptotiquement, finit par en être très éloigné, puis s'en rapproche asymptotiquement de manière à en être de nouveau infiniment près pour $t = +\infty$.

On voit sans peine qu'il doit exister des trajectoires qui s'éloignent asymptotiquement d'une trajectoire fermée instable et d'autres qui s'en rapprochent asymptotiquement, mais le résultat difficile à établir et véritablement inattendu, c'est que ce sont les mêmes trajectoires asymptotiques, qui après s'être éloignées asymptotiquement d'une trajectoire fermée s'en rapprochent ensuite asymptotiquement de la même trajectoire fermée.

L'ensemble des trajectoires asymptotiques relatives à une même solution périodique instable, forme une surface dite asymptotique.

Les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées à courbe double présentant les mêmes connexions que la surface qu'engendrerait la révolution d'un limaçon à point double ou d'une lemniscate autour d'un axe ne rencontrant pas la courbe.

Chacune de ces surfaces partage donc l'espace en trois régions.

Dans chacune de ces trois régions, il y a encore une infinité de trajectoires fermées instables, et par conséquent une infinité de surfaces asymptotiques. Il en résulte que chacune de ces trois régions peut à son tour être subdivisée en trois autres et ainsi de suite.

Cette subdivision peut être continuée à l'infini et on peut la pousser assez loin pour que le volume de chaque région partielle soit aussi petit qu'on le veut.

Comme aucune trajectoire ne peut passer d'une région dans l'autre, on doit conclure que la stabilité est rigoureusement démontrée; qu'il est possible, étant donnée la position initiale du point représentatif de la situation du système, de trouver une région d'où ce point ne pourra sortir et d'assigner à cette région, sinon ses limites précises, du moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises.

Il y a donc trois sortes de trajectoires:

1^{re} Les trajectoires fermées correspondant aux solutions périodiques et dont il est aisé par les principes du Chapitre III (1^{re} Partie) de trouver les équations sous forme d'égalités où entrent des séries convergentes.

2^{re} Les trajectoires asymptotiques dont nous venons de parler en détail. En ce qui les concerne, nous avons donné dans le Chapitre précédent le moyen de former l'équation des surfaces asymptotiques; quand on possèdera cette équation, on pourra en déduire l'équation des trajectoires asymptotiques elles-mêmes par une application convenable des principes des *Vorlesungen über Dynamik*.

3^{re} Les trajectoires les plus générales qui ne rentrent dans aucune des deux premières catégories.

Nous pouvons affirmer (l' théorème I. Chapitre II, 1^{re} Partie) que si l'on envisage une portion de l'espace quelconque, si petite qu'elle soit, il y aura toujours des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

Il est même hautement vraisemblable que toute portion de l'espace est traversée par une infinité de trajectoires fermées. S'il en est ainsi, et si nous considérons une trajectoire quelconque de la 3^{me}

catégorie, nous pouvons toujours trouver une trajectoire de l'une des deux premières catégories qui pendant un temps aussi long qu'on veut, s'en écarte aussi peu qu'on veut, & qui permettrait de trouver l'équation avec telle approximation qu'on voudrait.

§2. Résultats Négatifs.

Je voudrais terminer l'exposé des résultats généraux de ce mémoire en appelant particulièrement l'attention sur les conclusions négatives qui en découlent. Ces conclusions sont pleines d'intérêt, mais seulement parce qu'elles font mieux ressortir l'échec des résultats obtenus, mais parce qu'elles peuvent, en vertu précisément de leur nature négative, s'étendre immédiatement aux cas plus généraux, tandis que les conclusions positives ne peuvent se généraliser sans une démonstration spéciale.

La plus importante de ces conclusions négatives, peut s'énoncer ainsi :

Mécanisme
En dehors de l'intégrale des forces vives, les équations de la dynamique n'admettent en général aucune intégrale qui soit à la fois une fonction analytique et uniforme.

Mécanisme
Si en effet une pareille intégrale existait et si l'on avait,

$$\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = \text{Const.},$$

Φ étant une fonction uniforme, l'équation $\Phi = \text{Const.}$ devrait être l'équation générale des surfaces trajectoires fermées et en donnant à la constante différentes valeurs, on devrait retrouver les équations des diverses surfaces asymptotiques. Mais chaque surface asymptotique a une courbe double et en tous les points de cette courbe double les quatre dérivées partielles de Φ devraient s'annuler.

Mais dans le voisinage d'une de ces courbes doubles passe une infinité d'autres courbes doubles de sorte que l'on devrait trouver dans le voisinage d'un point donné une infinité de courbes le long desquelles les quatre dérivées de Φ s'annulent à la fois. Cette fonction Φ ne saurait donc être analytique.

C. P. F. D.

Ce résultat ne cesserait d'être vrai que dans le cas exceptionnel où les deux nappes d'une infinité de surfaces asymptotiques viendraient à se confondre en une seule.

En effet le raisonnement qui précède est en défaut si l'on peut admettre que dans une région déterminée, il n'y a pas de surface asymptotique à courbe double; pour cela il faut que quand la Constante varie, entre certaines limites, l'équation :

$$\Phi = \text{Const.}$$

représente une série de surfaces sans courbe double s'enveloppant mutuellement. On peut alors intégrer complètement les équations différentielles et on reconnaît sans peine que, parmi ces surfaces sans courbe double, il y en a une infinité qui sont sillonnées par une infinité de trajectoires fermées représentant des solutions périodiques. Ces surfaces ainsi sillonnées par des trajectoires fermées doivent être regardées comme des surfaces asymptotiques dont les deux nappes se sont confondues.

Il existe donc certainement des équations différentielles de la forme des équations de la dynamique qui admettent une intégrale analytique et uniforme, mais cela n'arrivera qu'exceptionnellement et l'on peut dire que l'on ne rencontrera de pareilles équations que si on les fabrique tout exprès.

Il est aisé de voir que ce cas exceptionnel ne se rencontrera pas dans le problème des trois corps. On

qu'il se produisît, il faudrait en effet que la condition suivante fût remplie :

Soit

$$A \cos (m_1 y_1 + m_2 y_2)$$

un terme quelconque de la fonction perturbatrice (A étant fonction de x_1 et de x_2 et m_1 et m_2 étant des entiers)

Il faudrait que A s'annulât toutes les fois que l'on aurait :

$$m_1 \frac{dH_0}{dx_1} + m_2 \frac{dH_0}{dx_2} = 0$$

ou du moins qu'elle arrivât pour une infinité de ces termes, à savoir pour tous ceux où le rapport $\frac{m_1}{m_2}$ serait compris entre certaines limites.

Il faudrait que tous les termes de la fonction perturbatrice disparaissent au moment où ils deviennent séculaires.

Or il n'en est pas ainsi, donc en dehors de l'intégrale des forces vives et dans le cas particulier qui nous occupe, le problème des trois corps n'admet pas d'intégrale analytique et uniforme.

Cela montre en même temps que les séries habituellement employées en Mécanique Céleste, et en particulier les séries de M. Lindstedt ne sont pas convergentes, car leur convergence entraînerait l'existence d'une intégrale analytique et uniforme.

Ainsi se trouve confirmé un résultat que M. Bruns avait obtenu par une voie entièrement différente.

Chapitre III

Tentatives de Généralisation.

Est-il permis d'espérer qu'on puisse étendre les résultats précédents aux cas où les équations de la dynamique comportent plus de deux degrés de liberté, par conséquent au cas général du problème des n corps.

C'est possible, mais ce ne sera pas sans un nouvel effort.

Je croyais, en commençant ce travail, que la solution du problème, une fois trouvée pour le cas particulier que j'ai traité, se généraliserait immédiatement sans qu'on ait à vaincre aucune difficulté nouvelle en dehors de celles qui sont dues au nombre plus grand des variables et à l'impossibilité d'avoir la représentation géométrique. Je me trompais.

Aussi crois-je devoir insister un peu ici sur la nature des obstacles qui s'opposent à cette généralisation.

S'il y a p degrés de liberté, la situation du système peut être représentée par la position d'un point dans l'espace à $2p-1$ dimensions. La plupart des conclusions de la Première Partie sont encore vraies et n'ont à subir aucun changement.

Il existe donc une infinité de solutions périodiques représentées par des trajectoires fermées et se classant en stables et en instables, ou même en catégories plus nombreuses, d'après la nature de leurs exposants caractéristiques. Il existe aussi une infinité de solutions asymptotiques.

L'ensemble des trajectoires asymptotiques relatives à une même trajectoire fermée instable forme une multiplicité à p dimensions; il me semble très

probable, quoique p n'ait pas achevé le calcul, que cette multiplicité est fermée (comme le sont les surfaces asymptotiques envisagées dans les Chapitres qui précèdent); mais comme elle n'a que p dimensions, elle ne partage pas en deux ou plusieurs régions l'espace à $2p-1$ dimensions, car du moment que $p \geq 2$, on a $2p-1 \geq p+1$.

Nous ne pouvons donc conclure à la stabilité.

Les difficultés que l'on rencontrait autrefois en Mécanique. C'est-à-dire et qui s'opposaient à la convergence des séries tenaient, comme on le sait, à la présence de certains ^{petits} diviseurs; j'ai trouvé le moyen de tourner ces difficultés et c'est ce qui m'a permis d'arriver pour le cas de $p=2$ aux résultats que j'ai exposés dans ce travail; mais un obstacle analogue se dresse devant nous dès que $p \geq 2$. Si en effet les anciens petits diviseurs ont disparu, nous rencontrons de nouveaux petits diviseurs qui sont ceux que j'ai appelés (D) dans le § 5 (1^{re} Partie, Chapitre III). La difficulté étant de même nature que celle qui a déjà été vaincue, on peut espérer que des moyens analogues permettront d'en venir à bout, mais malgré mes efforts, je n'ai pu encore les trouver.

J'ai cherché également à étendre au cas général le calcul du § 2 (2^{me} Partie Chapitre I) en laissant de côté la question de convergence qui ne peut être regardée comme résolue que dans le cas des multiplicités asymptotiques à p dimensions que nous venons de définir. Les séries qu'on obtient de la sorte peuvent en effet, même lorsqu'elles divergent, être utiles dans certains cas aux astronomes et peut être guider les géomètres vers la solution définitive.

Supposons trois degrés de liberté et écrivons les équations (1) du § 3 (1^{re} Partie, Chapitre III) en

~~Ensuite de là~~ faisant les mêmes hypothèses que dans ce paragraphe.

Cherchons ensuite trois fonctions de y_1, y_2, y_3 .

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2, y_3),$$

$$x_2 = \Phi_2(y_1, y_2, y_3),$$

$$x_3 = \Phi_3(y_1, y_2, y_3),$$

Satisfaisant aux équations :

$$\frac{dx_1}{dy_1} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_1}{dy_2} \frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_1}{dy_3} \frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_1} = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dy_1} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_2}{dy_2} \frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_2}{dy_3} \frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_2} = 0,$$

$$\frac{dx_3}{dy_1} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_3}{dy_2} \frac{dF}{dx_2} + \frac{dx_3}{dy_3} \frac{dF}{dx_3} + \frac{dF}{dy_3} = 0,$$

ou ce qui revient au même aux équations :

$$F = C, \quad \frac{dx_1}{dy_2} = \frac{dx_2}{dy_1}, \quad \frac{dx_3}{dy_2} = \frac{dx_2}{dy_3}, \quad \frac{dx_1}{dy_3} = \frac{dx_3}{dy_1}.$$

Nous supposons que x_1, x_2, x_3 peuvent se développer suivant les puissances de μ ou de $\sqrt{\mu}$ et que pour $\mu=0$, elles se réduisent à des constantes x_1^0, x_2^0, x_3^0 .

Nous poserons ensuite comme plus haut :

$$\frac{dF_0}{dx_1^0} = -n_1, \quad \frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_2, \quad \frac{dF_0}{dx_3^0} = -n_3.$$

Si entre n_1, n_2, n_3 il n'y a aucune relation linéaire à coefficients entiers, on peut développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de μ ; chaque terme est périodique à la fois par rapport à y_1 , à y_2 et à y_3 . Mais il s'introduit des petits diviseurs.

Si entre n_1, n_2 et n_3 il y a une relation linéaire et une seule à coefficients entiers :

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$

les calculs peuvent se poursuivre absolument comme dans le § 2 du Chapitre I. Les trois fonctions x_1, x_2 et x_3 se développent suivant les puissances de $\sqrt{t}$ et elles sont au moins doublement périodiques, si l'on veut dire qu'elles ne changent pas quand y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π de telle façon que $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ ne change pas; il y a encore de petits diviseurs.

Il reste un troisième cas, le plus intéressant de tous, qui est celui où il y a entre n_1, n_2, n_3 deux relations linéaires à coefficients entiers.

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$

$$m'_1 n_1 + m'_2 n_2 + m'_3 n_3 = 0.$$

On peut alors développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de $\sqrt{t}$ et de façon que ces fonctions soient périodiques, si l'on veut dire qu'elles ne changent pas quand y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π et de telle sorte que $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ et $m'_1 y_1 + m'_2 y_2 + m'_3 y_3$ ne changent pas. Il n'y a plus de petits diviseurs, mais le calcul de ces fonctions n'est pas sans certaines difficultés.

161 En première approximation, la détermination de ces fonctions dépend de l'intégration d'un système d'équations différentielles qui ont la forme canonique des équations de la dynamique, mais avec deux degrés de liberté seulement. Dans presque toutes les applications, ces équations dépendront d'un paramètre très petit par rapport auquel on pourra développer, de manière qu'on pourra leur appliquer les conclusions des Chapitres I et II (P^{re} Partie).

Dans les approximations suivantes, on n'aura plus à effectuer que des quadratures.

Ce n'est pas tout; le problème des n corps présente des difficultés spéciales qu'on ne rencontre pas dans le cas général. Sans doute ces difficultés

ne sont pas aussi essentielles que celles dont j'ai signalé plus haut l'existence, et un peu d'attention doit suffire pour permettre d'en triompher.

Mais j'en dois dire ici quelques mots.

Dans le problème des n corps, F_0 ne dépend pas de toutes les variables linéaires x_i ; par conséquent, non seulement le hessian de F_0 par rapport aux variables x_i est nul, mais le hessian d'une fonction arbitraire de F_0 par rapport est encore nul.

(Cf la note au bas de la page 120). Cela vient du fait suivant: si $\mu = 0$, c'est à dire dans le mouvement képlérien, les périhélie, sont fixes.

Cette difficulté n'existait pas dans le cas que nous avons traité (1^{er} exemple §1, Chapitre I, Deuxième Partie) parce que nous avons pris pour variable, non pas g longitude du périhélie, mais $g - t$. Elle n'existerait pas non plus avec une loi d'attraction autre que la newtonienne.

Voici quelles en sont les étranges conséquences:

Nous avons vu qu'il y a deux sortes de solutions périodiques: les solutions du 1^{er} genre, dont nous avons parlé dans le Chapitre III (1^{re} Partie) et qui subsistent quelque petit que soit μ , et les solutions du 2^d genre dont nous avons parlé dans le §5 (Chapitre I, 2^{me} Partie) et qui disparaissent l'une après l'autre quand on fait décroître μ .

Dans le cas du problème des trois corps, si l'on fait $\mu = 0$, les orbites des deux petits corps se réduisent à deux ellipses képlériennes. Que deviennent alors les solutions périodiques du 1^{er} genre quand on fait $\mu = 0$? En d'autres termes quelles sont les solutions périodiques des équations du mouvement képlérien? les unes correspondentes

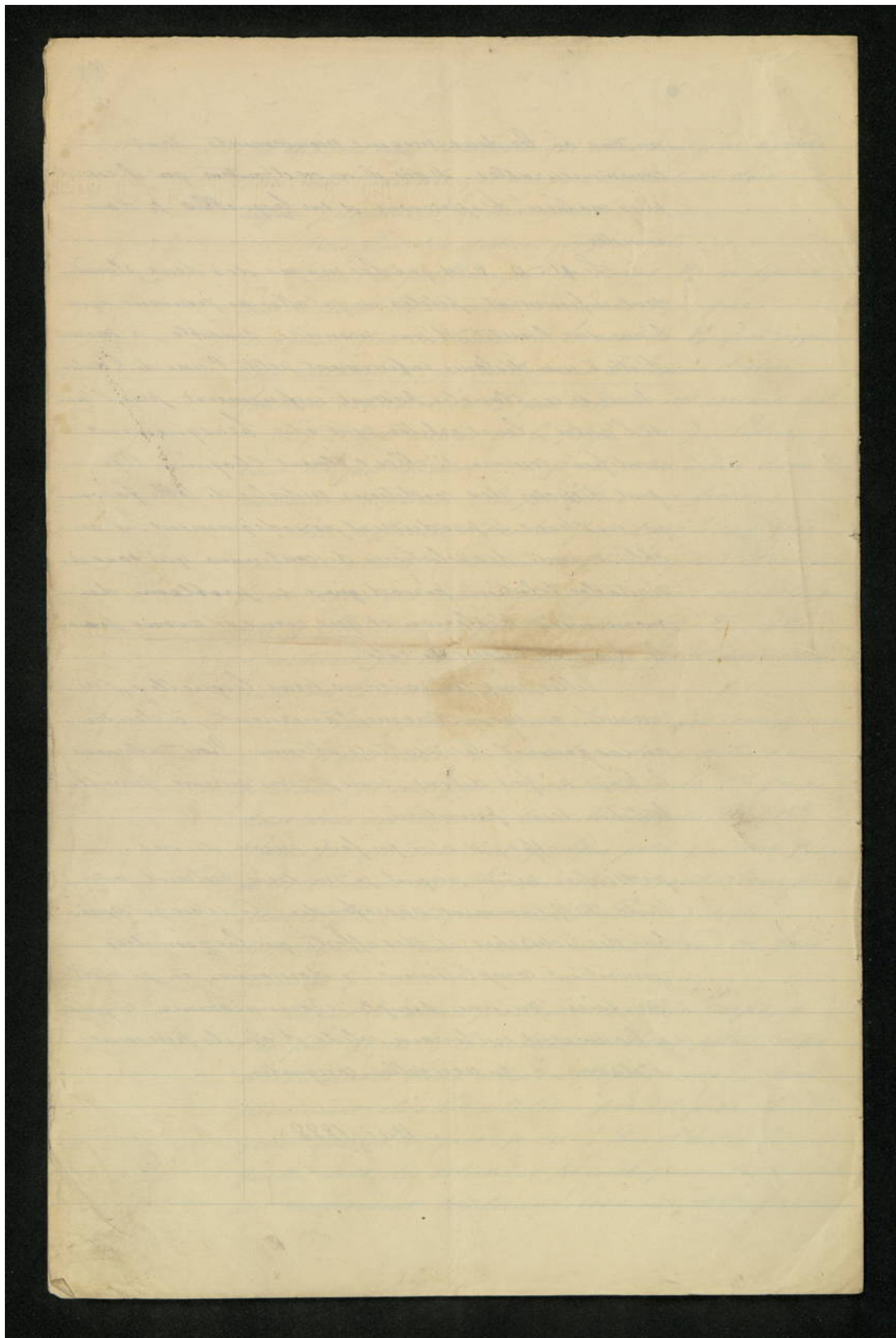
au cas où les deux moyens mouvements sont commensurables. Mais il en est d'autres qu'il est plus malaisé d'apercevoir et sur lesquelles je dois insister.

Si $\mu = 0$, c'est que les masses des deux planètes sont infiniment petites et qu'elles ne peuvent agir l'une sur l'autre d'une manière sensible, à moins d'être à une distance infiniment petite l'une de l'autre. Mais si ces planètes passent infiniment près l'une de l'autre, leurs orbites vont être brusquement modifiées comme si elles s'étaient choquées. On peut disposer des conditions initiales de telle façon que ces chocs se produisent périodiquement et on obtient ainsi des solutions discontinues qui sont de véritables solutions périodiques du problème du mouvement képlérien et que nous n'avons pas le droit de laisser de côté.

Telles sont les raisons pour lesquelles j'ai renoncé, au moins momentanément, à étendre au cas général les résultats obtenus. Non seulement le temps me fait défaut, mais je crois qu'une pareille tentative serait prématurée.

En effet, si n'ai pu faire encore de cas particulier même auquel je me suis restreint une étude suffisamment approfondie. Ce n'est qu'après bien des recherches et des efforts que les géomètres connaîtront complètement ce domaine, où je n'ai pu faire qu'une simple reconnaissance et qu'ils, y trouveront un terrain solide d'où ils puissent s'élancer à de nouvelles conquêtes.

Mai 1888



Notes A et B
relatives au Mémoire Intitulé
Sur le Problème des Trois Corps
Et les Equations de la Dynamique.

LAFONT ET C^{IE} LIA

Note A

Sur la Divergence des Séries de M. Lindstedt.

J'ai annoncé plus haut sans démonstration que les séries proposées par M. Lindstedt ne sont pas convergentes. Je crois nécessaire de revenir sur ce sujet avec plus de détails, mais je veux auparavant rappeler en quoi consiste la méthode de M. Lindstedt. Je l'exposerai, il est vrai, avec des notations différentes de celles qu'avait adoptées ce savant astronome, car je desirais, pour plus de clarté, conserver celles dont j'ai fait usage plus haut.

Mettons les équations de la dynamique sous la même forme que dans la seconde partie du présent mémoire et écrivons :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}$$

F sera une fonction donnée des quatre variables x_1, x_2, y_1 et y_2 et nous aurons :

$$F = F_0 + \mu F_1$$

F_0 sera une fonction de x_1 et de x_2 , indépendante de y_1 et de y_2 ; μ sera un coefficient très petit, de sorte que μF_1 sera la fonction perturbatrice.

C'est en effet sous cette forme que se présentent les problèmes de Dynamique et en particulier les problèmes de la Mécanique Céleste.

Si μ était nul, x_1 et x_2 seraient des constantes. Si μ n'est pas nul mais très petit, et qu'on appelle

ξ_1 et ξ_2 les valeurs initiales de x_1 et de x_2 , les différences $x_1 - \xi_1$ et $x_2 - \xi_2$ seront du même ordre de grandeur que μ .

Si donc nous appelons n_1 et n_2 les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et de $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$ les différences :

$$-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1 \quad \text{et} \quad -\frac{dF_0}{dx_2} - n_2$$

seront du même ordre de grandeur que μ , ce qui nous permettra de poser :

$$-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1 = \mu \varphi_1(x_1, x_2),$$

$$-\frac{dF_0}{dx_2} - n_2 = \mu \varphi_2(x_1, x_2),$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions de x_1 et de x_2 qui ne sont pas très grandes.

Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu \frac{dF_1}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \mu \frac{dF_1}{dy_2},$$

$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 + \mu \left(\varphi_1 - \frac{dF_1}{dx_1} \right), \quad \frac{dy_2}{dt} = n_2 + \mu \left(\varphi_2 - \frac{dF_1}{dx_2} \right).$$

Supposons maintenant que x_1, x_2, y_1, y_2 au lieu d'être regardés directement comme des fonctions de t soient regardés comme des fonctions de deux variables :

$$w_1 \quad \text{et} \quad w_2$$

et que l'on pose :

$$w_1 = \lambda_1 t + w_1, \quad w_2 = \lambda_2 t + w_2.$$

w_1 et w_2 seront des constantes d'intégration arbitraires ; λ_1 et λ_2 seront des constantes que la suite du calcul déterminera complètement.

Les équations du mouvement deviennent alors :

(1)

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \frac{dx_1}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dx_1}{dw_2} - \mu \frac{dF_1'}{dy_1} &= 0, \\
 \lambda_1 \frac{dx_2}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{dw_2} - \mu \frac{dF_1'}{dy_2} &= 0, \\
 \lambda_1 \frac{dy_1}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dy_1}{dw_2} - n_1 - \mu \left(\varphi_1 - \frac{dF_1'}{dx_1} \right) &= 0, \\
 \lambda_1 \frac{dy_2}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dy_2}{dw_2} - n_2 - \mu \left(\varphi_2 - \frac{dF_1'}{dx_2} \right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Posons maintenant :

(2)

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \mu^3 x_1^3 + \dots, \\
 x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \mu^3 x_2^3 + \dots, \\
 y_1 - w_1 &= \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \dots, \\
 y_2 - w_2 &= \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \dots, \\
 \lambda_1 &= \lambda_1^0 + \mu \lambda_1^1 + \mu^2 \lambda_1^2 + \dots, \\
 \lambda_2 &= \lambda_2^0 + \mu \lambda_2^1 + \mu^2 \lambda_2^2 + \dots.
 \end{aligned}$$

Je suppose que les coefficients λ_i^k sont des constantes et que les coefficients y_i^k et x_i^k sont des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de w_1 et de w_2 .

Je supposerai d'ailleurs comme je l'ai toujours fait jusqu'ici que F_1' est une série trigonométrique dépendant des sinus et cosinus des multiples de y_1 et y_2 et que les coefficients de cette série sont des fonctions holomorphes de x_1 et de x_2 .

Dans ces conditions, si dans les premiers membres des équations (1) je substitue à la place de $\lambda_1, \lambda_2, y_1, y_2, x_1$ et x_2 leurs valeurs (2), j'aurai quatre fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ et il est clair que les coefficients des diverses puissances de μ seront des séries ordonnées suivant les lignes trigonométriques des multiples de w_1 et w_2 .

J'appelle :

$$\phi_1, \phi_2, \phi_1' \text{ et } \phi_2'$$

Ces quatre fonctions :

Cela posé, le théorème de M. Liouville consiste en ceci :

Il est possible de déterminer les $2q+2$ constantes

$$\lambda_1^0, \lambda_1', \dots, \lambda_1^q, \\ \lambda_2^0, \lambda_2', \dots, \lambda_2^q.$$

et les $4q$ séries trigonométriques :

$$x_1', \dots, x_1^q, \\ x_2', \dots, x_2^q, \\ y_1', \dots, y_1^q, \\ y_2', \dots, y_2^q$$

de façon à annuler dans

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_1' \text{ et } \Phi_2'$$

les termes indépendants de μ et les coefficients des q premières puissances de μ , de façon, en d'autres termes, à satisfaire aux équations du mouvement aux quantités près de l'ordre de μ^{q+1} .

On trouve d'abord :

$$\lambda_1^0 = n_1, \lambda_2^0 = n_2, x_1^0 = \xi_1 + \omega_1, x_2^0 = \xi_2 + \omega_2,$$

ω_1 et ω_2 étant des constantes d'intégration que nous supposons de l'ordre de μ .

Supposons que l'on ait déterminé par un calcul préalable :

$$\lambda_i^0, \lambda_i', \dots, \lambda_i^{q-1}, \\ x_i', \dots, x_i^{q-1}, \\ y_i', \dots, y_i^{q-1},$$

et que l'on se propose de déterminer

$$\lambda_1^q, \lambda_2^q, x_1^q, x_2^q, y_1^q, y_2^q.$$

Pour cela, écrivons que le coefficient de μ^q est nul dans Φ_1, Φ_2, Φ_1' et Φ_2' .

Il vient :

(3)

$$n_1 \frac{dx_1^q}{dw_1} + n_2 \frac{dx_1^q}{dw_2} = X_{11}$$

$$n_1 \frac{dx_2^q}{dw_1} + n_2 \frac{dx_2^q}{dw_2} = X_{21}$$

$$n_1 \frac{dy_1^q}{dw_1} + n_2 \frac{dy_1^q}{dw_2} + \lambda_1^q = Y_{11}$$

$$n_1 \frac{dy_2^q}{dw_1} + n_2 \frac{dy_2^q}{dw_2} + \lambda_2^q = Y_{21}$$

X_{11}, X_{21}, Y_{11} et Y_{21} étant des fonctions connues.

x_{11}, x_{21}, y_{11} et y_{21} sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2 .

Pour que l'intégration des équations (3) soit possible il faut :

1^o que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable ce qui est toujours permis de supposer.

2^o que dans les séries trigonométriques x_{11} et x_{21} , les termes tout connus soient nuls. Il en est effectivement ainsi; mais la démonstration de ce fait important est délicate et ne saurait trouver place ici; je me borne à dire qu'elle doit être fondée sur l'emploi des invariants intégraux.

3^o que dans les séries trigonométriques y_{11} et y_{21} , les termes tout connus se réduisent à λ_1^q et λ_2^q ; comme λ_1^q et λ_2^q sont deux inconnues, nous déterminons ces inconnues par cette condition.

L'intégration des équations (3) est alors possible. Leur intégration introduira quatre constantes arbitraires. A chaque approximation nouvelle, nous aurons ainsi quatre constantes d'intégration de plus; nous leur donnerons des valeurs quelconques et nous ne conserverons d'autre constantes arbitraires que w_1, w_2, w_1 et w_2 .

Ainsi les séries de M. Lindstedt sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2 ; elles sont développées suivant les puissances de μ et aussi

suivant les puissances des deux constantes w_1 et w_2 .

Ces séries d'après le théorème de M. Lindstedt satisfont formellement aux équations du mouvement. Si donc elles étaient uniformément convergentes, elles nous donneraient l'intégrale générale de ces équations.

Je dis que cela n'est pas possible.

En effet supposons qu'il en soit ainsi & que nos séries convergent uniformément pour toutes les valeurs du temps et pour les valeurs suffisamment petites de μ , de w_1 et de w_2 .

Il est clair que λ_1 et λ_2 sont aussi des séries ordonnées suivant les puissances de μ , w_1 et w_2 .

Pour certaines valeurs de w_1 et w_2 le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est commensurable. Les solutions particulières qui répondent à ces valeurs des constantes d'intégration sont alors des solutions périodiques.

Nous avons vu plus haut que toute solution périodique admet un certain nombre d'exposants caractéristiques. Voyons comment on peut calculer ces exposants quand on possède l'intégrale générale des équations dérivées.

Soit :

$$x_1 = \psi_1(t, w_1, w_2, w_1', w_2'), \quad x_2 = \psi_2(t, w_1, w_2, w_1', w_2'),$$

$$y_1 = \psi_1'(t, w_1, w_2, w_1', w_2'), \quad y_2 = \psi_2'(t, w_1, w_2, w_1', w_2')$$

cette intégrale générale.

Supposons qu'en donnant à w_1, w_2, w_1' et w_2' des valeurs déterminées $w_1^0, w_2^0, w_1'^0, w_2'^0$, les fonctions $\psi_1, \psi_2, \psi_1', \psi_2'$ deviennent périodiques en t . Pour avoir les exposants caractéristiques de la solution périodique ainsi obtenue, nous formerons les seize dérivées partielles :

$$\begin{array}{cccc} \frac{dx_1}{dw_1}, & \frac{dx_2}{dw_1}, & \frac{dy_1}{dw_1}, & \frac{dy_2}{dw_1}, \\ \frac{dx_1}{dw_2}, & \frac{dx_2}{dw_2}, & \frac{dy_1}{dw_2}, & \frac{dy_2}{dw_2}, \end{array}$$

et nous y ferons ensuite

$$w_1 = w_1^0, w_2 = w_2^0, w_1 = w_1^0, w_2 = w_2^0.$$

Alors $\frac{dx_1}{dw_1}$ par exemple prendra la forme suivante:

$$\frac{dx_1}{dw_1} = e^{\alpha_1 t} \theta_1(t) + e^{\alpha_2 t} \theta_2(t) + e^{\alpha_3 t} \theta_3(t) + e^{\alpha_4 t} \theta_4(t)$$

les α étant des constantes et les θ des fonctions périodiques.

Les α sont alors les exposants caractéristiques cherchés.

Appliquons cette règle au cas qui nous occupe. Nous avons:

$$x_1 = \varphi_1(w_1, w_2, w_1, w_2),$$

φ_1 étant périodique en w_1 et en w_2 .

Il vient alors:

$$\frac{dx_1}{dw_1} = \frac{d\varphi_1}{dw_1}, \quad \frac{dx_1}{dw_2} = \frac{d\varphi_1}{dw_2} + \left(\frac{d\lambda_1}{dw_1} \frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{dw_1} \frac{d\varphi_1}{dw_2} \right) t$$

Les trois fonctions:

$$\frac{d\varphi_1}{dw_1}, \quad \frac{d\varphi_1}{dw_2}, \quad \text{et} \quad \frac{d\lambda_1}{dw_1} \frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{dw_1} \frac{d\varphi_1}{dw_2}$$

sont périodiques en w_1 et w_2 et par conséquent en t .

On trouverait pour $\frac{dx_1}{dw_2}$ et $\frac{dx_2}{dw_2}$ des expressions analogues.

Cela prouve que les exposants caractéristiques sont nuls.

Donc, si les séries de M. Lindstedt étaient convergentes, tous les exposants caractéristiques seraient nuls.

Dans quel cas en est-il ainsi :

Nous avons eu plus haut la manière de calculer les exposants caractéristiques (1^{re} Partie, Chapitre III, § 2 et 4)

Dans ce dernier paragraphe nous avons vu que les exposants caractéristiques relatifs aux x équations :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_0}{dy_i} + \mu \frac{dF_1}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_i} - \mu \frac{dF_1}{dx_i}$$

pourraient se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; nous avons appris à former l'équation qui donne le coefficient α_i de $\sqrt{\mu}$.

Rappelons comment se forme cette équation :

Nous avons posé dans le paragraphe cité

$$C_{ik}^{10} = -\frac{d^2 F_0}{dx_i dx_k}, \quad B_{ik}^2 = \frac{d^2 F_1}{dy_i dy_k}.$$

Dans ces dérivées secondes on suppose x_1 et x_2 remplacés par x_1^0 et x_2^0 , pendant que y_1 et y_2 sont remplacés par $n_1 t + w_1$, $n_2 t + w_2$. ⁽¹⁾ C_{ik}^{10} est donc une constante et B_{ik}^2 une fonction périodique de t . J'appelle b_{ik} le terme tout connu de cette fonction périodique.

Posons ensuite :

$$e_{11} = b_{11} C_{11}^0 + b_{12} C_{12}^0 \quad e_{21} = b_{21} C_{11}^0 + b_{22} C_{21}^0$$

$$e_{12} = b_{12} C_{12}^0 + b_{12} C_{22}^0 \quad e_{22} = b_{21} C_{12}^0 + b_{22} C_{22}^0$$

L'équation qui nous donne α_i s'écrira alors :

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \alpha_1^2 & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que cette équation ait toutes ses racines ^{réelles} nulles, il

(1) Inutile de rappeler ici que ces valeurs de x_1^0, x_2^0, n_1, n_2 sont celles qui correspondent à la solution périodique étudiée; ce ne sont pas celles dont nous avons fait usage plus haut dans l'exposé de la méthode de Lindstedt. Le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est donc commensurable.

faudrait que l'on eût :

$$e_{11} + e_{22} = 0$$

ou

$$(4) \quad b_{11} C_{11}^0 + 2b_{12} C_{12}^0 + b_{22} C_{22}^0 = 0$$

Or on a comme je l'ai démontré dans le paragraphe cité

$$n_1 b_{11} + n_2 b_{12} = n_1 b_{21} + n_2 b_{22} = 0.$$

Il faut donc pour que l'identité (4) ait lieu ou bien que :

$$(5) \quad b_{11} = 0$$

ou bien que :

$$(6) \quad n_2^2 C_{11}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_1^2 C_{22}^0 = 0.$$

Occupons nous d'abord de la relation (5). Si nous faisons dans la fonction perturbatrice F_1 ,
 $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $y_1 = n_1 t + w_1$, $y_2 = n_2 t + w_2$,
 F_1 deviendra une fonction périodique de t . Supposons cette fonction périodique développée en série trigonométrique, et soit ψ le terme tout connu, ψ sera une fonction périodique de w_1 , et w_2 et il viendra :

$$b_{ik} = \frac{d^2 \psi}{dw_i dw_k}.$$

Nous devons donc avoir :

$$(7) \quad \frac{d^2 \psi}{dw_1^2} = 0.$$

Nous pourrions toujours supposer que l'origine du temps a été choisie de telle sorte que w_2 soit nul et que ψ soit fonction périodique de w_1 seulement.

De plus la relation (7) devrait être (si les séries de M. Lindstedt convergent) satisfaite identiquement, et en effet si l'on admettait la convergence de ces séries, il y aurait une infinité de solutions périodiques correspondant à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$.

Si la relation (7) est une identité et si ψ est une fonction

périodique, cette fonction devra se réduire à une constante.

Voyons ce que cela veut dire.

La fonction perturbatrice F_1 étant périodique par rapport à y_1 et à y_2 pourra s'écrire :

$$F_1 = \sum A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2) + \sum B_{m_1 m_2} \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2),$$

les m_1 et les m_2 étant des entiers, pendant que $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ sont des fonctions données de x_1 et de x_2 .

On aura alors

$$\psi = \sum A_{m_1 m_2}^0 \cos(m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2) + \sum B_{m_1 m_2}^0 \sin(m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2),$$

la sommation représentée par le signe $\sum$ s'étendant à tous les termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0,$$

et $A_{m_1 m_2}^0$ et $B_{m_1 m_2}^0$ représentant ce que deviennent $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ quand on y remplace x_1 et x_2 par x_1^0 et x_2^0 .

Comme les termes périodiques doivent disparaître de ψ , on aura

$$A_{m_1 m_2}^0 = B_{m_1 m_2}^0 = 0.$$

Ainsi les coefficients $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ du développement de la fonction perturbatrice doivent s'annuler quand on y donne à x_1 et à x_2 des valeurs telles que :

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0.$$

Ou bien encore on doit pouvoir donner au rapport $\frac{n_1}{n_2}$ des valeurs commensurables sans introduire dans la fonction perturbatrice F_1 des termes séculaires.

Il est clair qu'il n'en est pas ainsi dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons examiné et qu'on n'y peut donner au rapport des moyens mouvements une valeur commensurable sans introduire dans la fonction perturbatrice des termes séculaires.

Passons maintenant à la condition (6) qui peut s'écrire

$$\left(\frac{dF_0}{dx_1}\right)^2 \frac{d^2 F_0}{dx_1^2} - 2 \frac{dF_0}{dx_1} \frac{dF_0}{dx_2} \frac{d^2 F_0}{dx_1 dx_2} + \left(\frac{dF_0}{dx_2}\right)^2 \frac{d^2 F_0}{dx_2^2} = 0$$

Elle exprime que la courbe

$$F_0(x_1, x_2) = \text{Const.}$$

a un point d'inflexion au point $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$.

Comme cette condition doit être remplie pour toutes les valeurs de x_1^0 et de x_2^0 qui correspondent à un rapport $\frac{n_1}{n_2}$ commensurable, la courbe $F_0(x_1, x_2)$ devra se réduire à un système de droites.

C'est un cas très particulier que nous laissons de côté; car il est évident que rien de pareil n'arrive dans le problème des trois corps.

Ainsi, dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons étudié et par conséquent aussi dans le cas général, les séries de M. Lindstedt ne convergent pas uniformément pour toutes les valeurs des constantes arbitraires d'intégration qu'elles contiennent.

On peut présenter cette démonstration sous une autre forme.

Soit :

$$(8) \quad \begin{aligned} x_1 &= \theta_1(\mu, \omega, \omega_2, w_1, w_2), & x_2 &= \theta_2(\mu, \omega, \omega_2, w_1, w_2), \\ y_1 - w_1 &= \mu \theta'_1(\mu, \omega, \omega_2, w_1, w_2), & y_2 - w_2 &= \mu \theta'_2(\mu, \omega, \omega_2, w_1, w_2) \end{aligned}$$

les séries de M. Lindstedt. Nous avons vu que les fonctions θ et θ' sont ordonnées suivant les puissances de μ, ω , et ω_2 et qu'elles sont périodiques en w_1 et w_2 .

Des équations :

$$y_1 - w_1 = \mu \theta'_1, \quad y_2 - w_2 = \mu \theta'_2$$

nous pouvons par la formule de Lagrange développer $y_1 - w_1$ et $y_2 - w_2$ développées suivant les puissances de μ et exprimées non plus en fonctions de w_1 et de w_2 , mais en fonctions de y_1 et y_2 , nous aurons alors :

$$(9) \quad \begin{aligned} y_1 - w_1 &= \mu \theta_1(\mu, \omega, \omega_2, y_1, y_2), & y_2 - w_2 &= \mu \theta_2(\mu, \omega, \omega_2, y_1, y_2) \end{aligned}$$

f_1 et f_2 sont des fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ , w_1 , et w_2 ; ce sont en outre des fonctions périodiques de y_1 et y_2 .

Dans les équations (8) substituons à la place de w_1 et w_2 leurs valeurs tirées de (9).

Il viendra :

$$(10) \quad x_1 = \eta_1(\mu, w_1, w_2, y_1, y_2), \quad x_2 = \eta_2(\mu, w_1, w_2, y_1, y_2),$$

η_1 et η_2 étant des fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ , w_1 , et de w_2 et suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et y_2 .

Des équations (10) nous pouvons tirer w_1 et w_2 et nous trouverons :

$$w_1 = \zeta_1(\mu, x_1, x_2, y_1, y_2),$$

$$w_2 = \zeta_2(\mu, x_1, x_2, y_1, y_2),$$

ζ_1 et ζ_2 étant des fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ , $x_1 - x_1^0$, $x_2 - x_2^0$ et les sinus et cosinus des multiples de y_1 et y_2 .

Comme w_1 et w_2 sont des constantes d'intégration, ζ_1 et ζ_2 seront des intégrales des équations (1); elles seront analytiques et uniformes au moins pour les valeurs suffisamment petites de w_1 et w_2 .

Or nous avons vu que les équations (1) ne pourraient admettre qu'une seule intégrale analytique et uniforme, l'intégrale des forces vives.

Donc les séries de M. Lindstedt ne peuvent être convergentes.

Je dois avant de terminer faire quelques remarques.

En premier lieu, la méthode dont je me suis servi pour trouver les séries de M. Lindstedt diffère beaucoup de celle qu'a exposée ce savant, mais les séries finalement obtenues sont les mêmes et d'ailleurs les démonstrations précédentes s'appliquent à toutes les séries de même forme.

Ce n'est pas tout. J'ai démontré que les séries qui nous occupent ne sont pas convergentes pour toutes les valeurs des constantes arbitraires qui y entrent. Il reste possible, quoique peut être peu vraisemblable, que ces séries deviennent convergentes pour certains systèmes particuliers de valeurs de ces constantes. ⁽¹⁾

En terminant, je dois déclarer que les considérations qui précèdent n'enlèvent rien au mérite pratique des développements de M. Lindstedt.

Ils ne convergent pas, donc ils ne peuvent donner une approximation indéfinie, mais ils peuvent donner assez rapidement une approximation très grande et très suffisante pour les besoins de la pratique.

Je serais désolé d'avoir jeté quelque discrédit sur ces séries, si je les ai choisies comme exemple pour développer des considérations qui s'appliquent également bien à tous les autres développements proposés, c'est précisément parce que je regarde la méthode de M. Lindstedt comme l'une des meilleures qui soit connue.

(1) Ce qu'il conviendrait surtout d'examiner, c'est si les séries ne convergent pas quand on donne à ω_1 et ω_2 des valeurs telles que $\frac{n_1}{n_2} = \frac{m_1}{m_2}$.

Addition à la Note B.

Dans la plupart des applications la valeur initiale de ξ sera très petite, en effet ξ s'annule avec l'excentricité et l'excentricité des orbites des corps célestes est toujours une très petite quantité.

Soit donc ξ_0 cette valeur initiale de ξ . Nous aurons:

$$0 < \xi_0 < 1.$$

Soit ensuite n , un nombre commensurable.
Posons

$$n^2 a_1^2 = 1$$

$$\frac{1}{2a_1} + \sqrt{a_1(1-e_1^2)} = C$$

$$\xi_1 = \frac{1 - \sqrt{1-e_1^2}}{1 + \sqrt{1-e_1^2}}$$

Nous pourrions choisir le nombre commensurable n , de telle façon que ξ_1 , quoique très petit, soit supérieur à ξ_0 . On aura alors,

$$0 < \xi_0 < \xi_1 < 1$$

A cette valeur commensurable n , correspondra au moins une solution périodique instable, à cette solution instable correspondront une infinité de solutions de la forme (2) que j'appelle solutions asymptotiques. A ce nombre commensurable n , correspondra donc une équation de la forme (3 bis)

$$(\xi_0 - \Theta)^2 - \mu (\Theta')^2 = 0.$$

D'ailleurs pour $\mu = 0$, Θ se réduit à ξ_1 et Θ' à 0.

Si donc μ est assez petit, l'expression

$$\Theta - |\Theta'| \sqrt{\mu}$$

(qui différera très peu de ξ_1) sera constamment supérieure à ξ_0 et constamment inférieure à un nombre fixe λ plus petit que 1 (et même très petit). On aura ainsi

$$\xi_0 < \Theta - |\Theta'| \sqrt{\mu} < \lambda < 1$$

Mais nous avons vu que si une inégalité de la forme

$$\xi < 1 - |O'|/\sqrt{\mu}$$

est satisfaite à un instant donné, elle le sera toujours, on aura donc à une époque quelconque :

$$\xi < 1 - |O'|/\sqrt{\mu} < 1 < 1$$

Ainsi l'excentricité restera toujours très petite, puisque ξ sera toujours inférieure à 1 qui est un nombre très petit.

Cela exclut la possibilité d'une rencontre entre la planète troublée et le Soleil. Cette rencontre ne pourrait en effet se produire que si l'excentricité (et par conséquent ξ) devenait égale à 1.

Mais il y a plus, nous pouvons assigner une limite inférieure à la distance de la planète troublée au Soleil.

En effet ce rayon vecteur est toujours plus grand que $a(1-e)$ il ne pourrait donc devenir très petit que si a devenait très petit ou e très voisin de 1. Nous venons de voir que, ξ restant inférieur à 1, e qui est lié à ξ par une relation très simple, restera aussi très petit et ne pourra se rapprocher de 1.

Le rayon vecteur ne pourrait donc devenir très petit que si a devenait très petit; mais cela est impossible à cause de l'équation de Jacobi.

$$\frac{1}{ea} + \sqrt{a(1-e)^2} + \mu\Omega = \text{const.}$$

Le second membre étant une constante, le premier membre doit rester limité; or si l'on fait tendre le rayon vecteur et a vers 0, $\frac{1}{ea}$ croît indéfiniment et les deux autres termes tendent vers des limites finies, le premier membre tendrait donc vers l'infini, ce qui est impossible.

D'autre part la distance des deux planètes troublée et troublante ne peut décroître non plus au delà de toute limite, car Ω devrait alors croître indéfiniment et comme le premier membre de l'équation de Jacobi doit rester fini,

il faudrait que l'un des deux autres termes de ce premier membre devînt aussi infini. Ce ne pourrait être $\frac{1}{2a}$ parce que si la distance des deux planètes est très petite, le rayon vecteur doit être très voisin de 1 et que ce rayon vecteur devant être compris entre $a(1-e)$ et $a(1+e)$, on aura :

$$a(1-e) < 1 < a(1+e) < 2a.$$

Ce ne pourrait être non plus $\sqrt{a(1-e)}$ parce que l'inégalité

$$a(1-\delta) < a(1-e) < 1$$

s'oppose à ce que a devienne infini.

Il est donc absurde de supposer que la distance de la planète troublée, tant au Soleil qu'à la planète troublante, puisse devenir très petite.

On peut présenter le résultat sous une forme plus précise encore :

Nous pouvons choisir deux surfaces asymptotiques,

$$\xi = \Theta - |\Theta'| \sqrt{\mu} \quad \text{et} \quad \xi = \Theta + |\Theta'| \sqrt{\mu}$$

de telle façon que la valeur initiale ξ_0 de ξ satisfasse à la double inégalité :

$$\Theta + |\Theta'| \sqrt{\mu} < \xi < \Theta - |\Theta'| \sqrt{\mu}$$

On aura alors à une époque quelconque :

$$\Theta + |\Theta'| \sqrt{\mu} < \xi < \Theta - |\Theta'| \sqrt{\mu}$$

Soient Θ^0 et Θ^1 les valeurs que prennent Θ et Θ' quand on y fait $\mu = 0$; Ces valeurs sont des constantes et j'ai pu choisir les deux surfaces asymptotiques de telle façon que la différence

$$\Theta^0 - \Theta^1$$

soit aussi petite que l'on veut.

Cela posé ξ va varier entre deux limites et la différence entre la limite supérieure et la limite inférieure sera du même ordre de grandeur que :

$$|\Theta - \Theta^0 - |\Theta'| \sqrt{\mu}| + |\Theta^0 - \Theta^1| + |\Theta^1 - \Theta^0 + |\Theta'| \sqrt{\mu}|$$

c'est à dire du même ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$.

On peut raisonner de la même manière sur a et e
et par conséquent, on peut dire :

Le grand axe (et il en est de même de l'excentricité)
varie entre deux limites et la différence entre la
limite supérieure et la limite inférieure est du même
ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$.

Note B

Nouvel exposé des résultats.

Il ne sera peut-être pas inutile de reprendre l'énoncé des principaux résultats obtenus dans ce mémoire, en les exprimant dans le langage habituel de l'astronomie.

Nous nous sommes placés dans un cas particulier et nous avons supposé :

1^o Que la masse de la planète troublée étant nulle, la planète troublante suit exactement les lois de Kepler.

2^o Que l'excentricité de la planète troublante étant nulle, cette planète décrit une circonférence d'un mouvement uniforme.

3^o Que l'inclinaison des deux orbites étant nulle, les deux planètes restent constamment dans un même plan.

La position de la planète troublante sera entièrement définie par sa longitude moyenne l' .

Pour définir la situation de la planète troublée, il faut se donner sa longitude moyenne l et ses éléments osculateurs à savoir :

Le grand axe a

L'excentricité e

La longitude du périhélie ω .

Nous prendrons

Pour unité de longueur le rayon constant de l'orbite de la planète troublante.

Pour unité de masse la masse du Soleil augmentée de la masse de la planète troublante.

~~Ces diverses quantités sont liés par une~~

Nous choisirons l'origine du temps et l'unité de temps de telle sorte que

$$l' = t$$

Nous appellerons μ la masse de la planète troublante et $\mu \Omega$ la fonction perturbatrice.

Ω sera une fonction uniforme de a , e , $l - l'$ et $l' - \omega$, périodique par rapport à ces deux dernières variables.

Ces diverses quantités sont liées par une relation connue depuis longtemps sous le nom d'intégrale de Jacobi.

Cette relation s'écrit :

$$(1) \quad \frac{1}{2a} + \sqrt{a(1-e^2)} + \mu \Omega = \text{Const.}$$

Je regarderai la constante qui entre dans le second membre de la relation (1) comme une donnée de la question. Nous supposons que cette constante soit notablement plus grande que $\frac{3}{2}$, ce qui arrivera toujours dans les applications.

Introduisons maintenant une variable auxiliaire en posant :

$$\xi = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}}$$

ξ est donc une fonction de e seulement et on voit sans peine que quand ξ varie de 0 à 1, e (que nous regarderons comme essentiellement positif) variera de 0 à 1, le mouvement étant direct ; et que quand ξ varie de 1 à $+\infty$ l'excentricité e variera de 1 à 0, le mouvement étant rétrograde. Il résulte de là que e est fonction uniforme de ξ .

La relation (1) montre aussitôt que a est fonction uniforme de ξ , de $l - l'$ et de $l' - \omega$ et qu'elle est périodique par rapport à ces deux dernières variables.

Cela posé, le problème admettra une infinité

de solutions particulières que nous appellerons solutions périodiques et qui fourniront des propriétés suivantes.

On aura :

$a = \varphi_1(t)$, $e = \varphi_2(t)$, $l - l' = n_1 t + \varphi_3(t)$, $l' - \omega = n_2 t + \varphi_4(t)$
 n_1 et n_2 étant des constantes dont le rapport est commensurable; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 étant des fonctions périodiques du temps dont la période est le plus petit commun multiple de $\frac{2\pi}{n_1}$ et de $\frac{2\pi}{n_2}$. (Il résulte de là que $\cos(l - l')$, $\sin(l - l')$, $\cos(l' - \omega)$ et $\sin(l' - \omega)$ sont aussi des fonctions périodiques du temps.)

Parmi les solutions périodiques, nous distinguerons celles du 1^{er} genre, pour lesquelles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, n_1$ et n_2 sont développables suivant les puissances croissantes de μ .

Il existe aussi des solutions périodiques du 2^d genre, pour lesquelles ce développement n'est pas possible et qui disparaissent pour les petites valeurs de μ .

Occupons nous spécialement des solutions du 1^{er} genre.

A chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspondent au moins deux solutions périodiques du 1^{er} genre.

Nous distinguerons les solutions du 1^{er} genre en stables et instables.

Supposons que les valeurs de $a, e, l - l', l' - \omega$, soient à l'origine du temps, infiniment voisines des valeurs qui correspondent à une solution périodique; si elles en restent infiniment voisines pendant un temps infiniment long, la solution sera stable; elle sera instable dans le cas contraire.

On démontre qu'à toute valeur commensurable

du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspondent au moins une solution périodique stable et au moins une solution instable.

Considérons en particulier les solutions instables. Soit donc :

$$a = \varphi_1(t), e = \varphi_2(t), l - l' = n_1 t + \varphi_3(t), l' - \tau = n_2 t + \varphi_4(t)$$

une solution périodique instable.

Il existera une infinité de solutions particulières qui pour t négatif et très grand prendront la forme suivante :

$$(2) \quad a = \varphi_1 + \psi_1, e = \varphi_2 + \psi_2, l - l' = n_1 t + \varphi_3 + \psi_3, l' - \tau = n_2 t + \varphi_4 + \psi_4$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 et ψ_4 étant des fonctions développables suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$, de $A e^{\alpha t}$, de $\cos \frac{2\pi t}{\lambda}$ et $\sin \frac{2\pi t}{\lambda}$. A désigne une constante arbitraire d'intégration, λ est la période de la solution périodique considérée; enfin α est un nombre positif développable selon les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Il existera également une infinité de solutions particulières qui pour t positif et très grand prendront la forme suivante :

$$(2bis) \quad a = \varphi_1 + \psi'_1, e = \varphi_2 + \psi'_2, l - l' = n_1 t + \varphi_3 + \psi'_3, l' - \tau = n_2 t + \varphi_4 + \psi'_4$$

$\psi'_1, \psi'_2, \psi'_3$ et ψ'_4 étant des fonctions développables suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$, de $B e^{-\alpha t}$, de $\cos \frac{2\pi t}{\lambda}$ et $\sin \frac{2\pi t}{\lambda}$. B désigne une nouvelle constante d'intégration.

Mais ce que rien ne permettait de prévoir, ce sont les mêmes solutions particulières qui prendront la forme (2) pour t négatif et très grand et la forme (2bis) pour t positif et très grand.

Entre les quatre relations (2) éliminons le temps t et la constante d'intégration A , il viendra :

$$(3) \quad (\alpha - \theta)^2 - \mu(\theta')^2 = 0, (e - \theta_1)^2 - \mu(\theta'_1)^2 = 0$$

$\theta, \theta', \theta_1$ et θ'_1 étant des fonctions périodiques de $l' - \tau$ et $l - l'$ ordonnées suivant les puissances de μ .

Observons que les relations (2) ne sont vraies que pour t négatif et très grand et qu'au contraire

les relations (3) qu'on en déduit, sont encore vraies pour toutes les valeurs du temps pourvu que μ soit assez petit.

Des relations (3) nous tirerons

$$a = \theta \pm \theta' \sqrt{\mu}, \quad e = \theta, \pm \theta' \sqrt{\mu}$$

et par conséquent

$$\xi = (H) \pm (H') \sqrt{\mu}$$

(H) et (H') étant des fonctions de même forme que $\theta, \theta', \theta_1$ et θ'_1 .

Il résulte de là que si l'on a à une époque quelconque :

$$(3bis) \quad (\xi - (H))^2 - \mu (H')^2 = 0$$

Cette relation subsistera pour toutes les valeurs du temps.

Supposons que l'on ait à l'origine des temps

$$(4) \quad \xi < (H) - |H'| \sqrt{\mu}$$

Je dis que cette inégalité sera satisfaite pour toutes les valeurs du temps, et en effet elle ne pourrait cesser de l'être sans que $(\xi - (H))^2 - \mu (H')^2$ devînt nul; or nous venons de voir que cette quantité ne pourrait être nulle à une époque quelconque à moins d'être toujours nulle.

Pour des conditions initiales convenables, on voit donc que ξ sera assujéti à rester toujours plus petit que $(H) - |H'| \sqrt{\mu}$. Si, comme cela arrivera toujours dans les applications, ξ est très petit, e sera une fonction croissante de ξ .

L'inégalité

$$\xi < (H) - |H'| \sqrt{\mu}$$

entraîne la suivante :

$$e < \theta, -|\theta'| \sqrt{\mu}$$

On a ainsi une limite supérieure de l'excentricité et la relation (1) permettrait d'en déduire une limite supérieure (ou inférieure suivant les cas) pour le grand

axe a .

Pour la même raison si on a à l'origine des temps

$$(4bis) \quad \Theta - |\Theta'| \sqrt{\mu} < \xi < \Theta + |\Theta'| \sqrt{\mu}$$

ces inégalités subsisteront toujours; c'est le cas où il y a ce qu'on appelle libration.

Enfin si on a à l'origine des temps

$$(4ter) \quad \xi > \Theta + |\Theta'| \sqrt{\mu}$$

cette inégalité subsistera toujours.

A chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspond au moins une solution instable et par conséquent au moins une inégalité analogue à (4), (4bis) ou (4ter). Nous aurons donc une infinité d'inégalités de cette nature et chacune d'elles nous donnera pour a et pour e une limite supérieure ou inférieure. En choisissant convenablement parmi ces inégalités, on peut resserrer autant qu'on le veut les limites entre lesquelles a et e restent comprises.

Dans le cas particulier qui nous occupe, la stabilité est donc entièrement démontrée.

Mais il me reste une remarque à faire.

Précisément dans ce cas particulier, M. Hill, dans ses recherches sur la lune, (*American Journal* tome I) a donné une démonstration de la stabilité en se servant seulement de l'intégrale de Jacobi.

C'est ce qu'a refait depuis M. Bohlén avec plus de détails (*Acta Mathematica*, tome X)

Mais il y a une très grande différence entre les résultats qu'ont obtenus ces deux géomètres et ceux que j'enonce ici.

M. M. Hill et Bohlén démontrent seulement que la distance de la planète troublée au soleil ne peut croître indéfiniment; ils ne démontrent pas qu'elle ne peut pas s'annuler; d'ailleurs

La limite supérieure qu'ils lui assignent est extrêmement éloignée de la limite précise.

J'ajouterai que le raisonnement de M. M. Hill et Bohlin ne prouve pas que l'excentricité ne peut pas devenir très voisine de 1 et même que le mouvement ne peut pas devenir rétrograde.

Au contraire, la méthode que je propose permet d'obtenir pour le grand axe a et pour l'excentricité e , des limites supérieures et inférieures qui sont, sinon les limites précises elles-mêmes, du moins aussi rapprochées qu'on le veut des limites précises.

Je démontre aussi que le grand axe restera constamment compris entre deux limites très resserrées, que l'excentricité restera toujours très petite et que le mouvement restera toujours direct.

Note C

Sur les Invariants Intégraux

Soit :

$$(1) \quad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

un système d'équations différentielles où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$ telles que :

$$(2) \quad \frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \dots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0$$

Soit une solution de ce système d'équations dépendant de n constantes arbitraires :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

Cette solution s'écrit :

$$x_1 = \varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$x_2 = \varphi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\dots$$

$$x_n = \varphi_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Il s'agit de démontrer que l'intégrale

$$J = \int dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \Delta dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$\text{où } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{d\alpha_1} & \frac{dx_2}{d\alpha_1} & \dots & \frac{dx_n}{d\alpha_1} \\ \frac{dx_1}{d\alpha_2} & \frac{dx_2}{d\alpha_2} & \dots & \frac{dx_n}{d\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_1}{d\alpha_n} & \frac{dx_2}{d\alpha_n} & \dots & \frac{dx_n}{d\alpha_n} \end{vmatrix}$$

est une constante,

On a en effet :

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\Delta}{dt} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

et

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$$

Δ_k étant le déterminant Δ dans la k^{e} colonne duquel on a remplacé :

$$\frac{dx_k}{dx_1}, \frac{dx_k}{dx_2}, \dots, \frac{dx_k}{dx_n}$$

par

$$\frac{d^2 x_k}{dx_1 dt}, \frac{d^2 x_k}{dx_2 dt}, \dots, \frac{d^2 x_k}{dx_n dt}$$

Mais on a

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k$$

d'où :

$$\frac{d^2 x_k}{dx_i dt} = \frac{dX_k}{dx_i} \frac{dx_i}{dx_i} + \frac{dX_k}{dx_2} \frac{dx_2}{dx_i} + \dots + \frac{dX_k}{dx_n} \frac{dx_n}{dx_i}$$

On déduit de là :

$$\Delta_k = \Delta \frac{dX_k}{dx_k}$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \left(\Delta \frac{dX_1}{dx_1} + \Delta \frac{dX_2}{dx_2} + \dots + \Delta \frac{dX_n}{dx_n} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$\Delta dx_1 dx_2 \dots dx_n = 0$$

C. Q. F. D.

185

Supposons maintenant qu'au lieu de la relation (2) nous ayons :

(263)

$$\frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \dots + \frac{dMX_n}{dx_n} = 0$$

M étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \dots, x_n$:

Je dis que

$$J = \int M dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int M \Delta dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$\frac{dJ}{dt}$

est une constante.

On a en effet :

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left(\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n$$

Il faut montrer que :

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = 0$$

On a en effet (en vertu des équations (1))

$$\frac{dM}{dt} = X_1 \frac{dM}{dx_1} + X_2 \frac{dM}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dM}{dx_n}$$

et, (d'après ce que nous venons de voir :

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \dots + \frac{dX_n}{dx_n} \right)$$

Il vient donc :

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = \Delta \left(\frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \dots + \frac{dMX_n}{dx_n} \right) = 0$$

C. Q. F. D.

Passons maintenant aux équations de la dynamique.

Soient les équations

$$(1bis) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Soit une solution contenant deux constantes arbitraires α et β et s'écrivant :

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha, \beta)$$

$$y_i = \psi_i(t, \alpha, \beta)$$

Je dis que :

$$J = \int (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2 + \dots + dx_n dy_n) = \int \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx_i}{d\alpha} \frac{dy_i}{d\beta} - \frac{dx_i}{d\beta} \frac{dy_i}{d\alpha} \right) d\alpha d\beta$$

est une constante.

Il vient en effet :

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(\frac{d^2 x_i}{dt d\alpha} \frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2 y_i}{dt d\beta} \frac{dx_i}{d\alpha} - \frac{d^2 x_i}{dt d\beta} \frac{dy_i}{d\alpha} - \frac{d^2 y_i}{dt d\alpha} \frac{dx_i}{d\beta} \right) d\alpha d\beta$$

Il vient ensuite :

$$\frac{d^2 x_i}{dt d\alpha} = \sum_K \frac{d^2 F}{dy_i dx_K} \frac{dx_K}{d\alpha} + \sum_K \frac{d^2 F}{dy_i dy_K} \frac{dy_K}{d\alpha}$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt d\beta} = \sum_K \frac{d^2 F}{dy_i dx_K} \frac{dx_K}{d\beta} + \sum_K \frac{d^2 F}{dy_i dy_K} \frac{dy_K}{d\beta}$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt d\alpha} = - \sum_K \frac{d^2 F}{dx_i dx_K} \frac{dx_K}{d\alpha} - \sum_K \frac{d^2 F}{dx_i dy_K} \frac{dy_K}{d\alpha}$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt d\beta} = - \sum_K \frac{d^2 F}{dx_i dx_K} \frac{dx_K}{d\beta} - \sum_K \frac{d^2 F}{dx_i dy_K} \frac{dy_K}{d\beta}$$

On conclut de là que :

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{d^2 x_i}{dt d\alpha} \frac{dy_i}{d\beta} - \frac{d^2 y_i}{dt d\alpha} \frac{dx_i}{d\beta} \right) &= \sum \sum \left(\frac{d^2 F}{dy_i dx_K} \frac{dx_K}{d\alpha} \frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2 F}{dy_i dy_K} \frac{dy_K}{d\alpha} \frac{dy_i}{d\beta} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2 F}{dx_i dx_K} \frac{dx_K}{d\alpha} \frac{dx_i}{d\beta} + \frac{d^2 F}{dx_i dy_K} \frac{dx_i}{d\alpha} \frac{dy_K}{d\beta} \right) \end{aligned}$$

Le second membre ne change pas quand on permute α et β , on a donc :

$$\sum \left(\frac{d^2 x_i}{dt d\alpha} \frac{dy_i}{d\beta} - \frac{d^2 y_i}{dt d\alpha} \frac{dx_i}{d\beta} \right) = \sum \left(\frac{d^2 x_i}{dt d\beta} \frac{dy_i}{d\alpha} - \frac{d^2 y_i}{dt d\beta} \frac{dx_i}{d\alpha} \right)$$

Cette égalité exprime que la quantité sous le signe $\int$ dans l'expression de $\frac{dJ}{dt}$ est nulle et par conséquent que

$$\frac{dJ}{dt} = 0$$

C. Q. F. D.

Il me reste à envisager le dernier des invariants intégraux qui se présente dans le cas du problème des n corps.

Reprenons les équations de la dynamique, mais en posant :

$$F = T + U$$

T ne dépend que des y et U des x seulement.

De plus T est homogène de degré 2 et U homogène

de degré - 1.

Prenons une solution

$$x_i = q_i(t, \alpha), \quad y_i = \psi_i(t, \alpha)$$

ne dépendant que d'une seule constante arbitraire α .

Considérons l'intégrale simple :

$$J = \int \sum \left(2x_i \frac{dy_i}{d\alpha} + y_i \frac{dx_i}{d\alpha} \right) d\alpha + 3(C_1 - C_0)t$$

C_1 et C_0 étant les valeurs constantes de la fonction F aux extrémités de l'arc le long duquel on intègre.

Il vient :

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(2 \frac{dx_i}{dt} \frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{dy_i}{dt} \frac{dx_i}{d\alpha} + 2x_i \frac{d^2 y_i}{dt d\alpha} + y_i \frac{d^2 x_i}{dt d\alpha} \right) d\alpha + 3(C_1 - C_0)$$

Il vient :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dT}{dy_i} = \frac{dT}{dy_i} / \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{dV}{dx_i}$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt d\alpha} = \sum_k \frac{d^2 T}{dy_i dy_k} \frac{dy_k}{d\alpha} / \quad \frac{d^2 y_i}{dt d\alpha} = - \frac{d^2 V}{dx_i dx_k} \frac{dx_k}{d\alpha}$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \sum \left(2 \frac{dT}{dy_i} \frac{dy_i}{d\alpha} + y_i \frac{dT}{dy_i dy_k} \frac{dy_k}{d\alpha} - \frac{dx_i}{d\alpha} \frac{dV}{dx_i} - 2x_i \frac{d^2 V}{dx_i dx_k} \frac{dx_k}{d\alpha} \right) d\alpha + 3(C_1 - C_0)$$

Mais en vertu du théorème des fonctions homogènes

on a :

$$\sum_i y_i \frac{d^2 T}{dy_i dy_k} = \frac{dT}{dy_k} / \quad \sum_i x_i \frac{d^2 V}{dx_i dx_k} = - 2 \frac{dV}{dx_k}$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(3 \frac{dT}{dy_i} \frac{dy_i}{d\alpha} + 3 \frac{dV}{dx_i} \frac{dx_i}{d\alpha} \right) d\alpha + 3(C_1 - C_0)$$

ou

$$\frac{dJ}{dt} = 3 \int (dT + dV) + 3(C_1 - C_0)$$

Or d'après la définition de C_1 et C_0 on a

$$C_0 - C_1 = \int dF = \int (dT + dV)$$

Il vient donc

$$\frac{dJ}{dt} = 0$$

C. L. F. D.

Note D

Sur les Equations Linéaires
à Coefficients Périodiques

On sait qu'une fonction de x périodique et de période 2π peut se développer en une série de la forme suivante.

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_n \cos nx + \dots \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_n \sin nx + \dots$$

J'ai montré dans le Bulletin Astronomique (Novembre 1886) que si la fonction $f(x)$ est finie et continue ainsi que ses $p-2$ premières dérivées et si sa $p-1^{\text{e}}$ dérivée est finie, mais peut devenir discontinue en un nombre limité de points, on peut trouver un nombre positif K tel que l'on ait, quelque grand que soit n

$$|n^p A_n| < K, \quad |n^p B_n| < K$$

Si $f(x)$ est une fonction analytique, elle sera finie et continue ainsi que toutes ses dérivées. On pourra donc trouver un nombre K tel que :

$$|n^2 A_n| < K, \quad |n^2 B_n| < K.$$

Il résulte de là que la série

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + \dots \\ + |B_1| + |B_2| + \dots + |B_n| + \dots$$

Converge et par conséquent que la série (1) est absolument et uniformément convergente.

Cela posé, considérons un système d'équations différentielles linéaires :

$$\frac{dx_1}{dt} = q_{1,1} x_1 + q_{1,2} x_2 + \dots + q_{1,n} x_n$$

$$\frac{dx_2}{dt} = q_{2,1} x_1 + q_{2,2} x_2 + \dots + q_{2,n} x_n$$

$$\frac{dx_n}{dt} = q_{n,1} x_1 + q_{n,2} x_2 + \dots + q_{n,n} x_n$$

(2)

Les n^2 coefficients $\psi_{i,k}$ sont des fonctions de t périodiques et de période 2π .

Les équations (2) ne changent donc pas quand on change t en $t + 2\pi$. Cela pose^{rait} soient :

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= \psi_{1,1}(t), x_2 = \psi_{1,2}(t), \dots, x_n = \psi_{1,n}(t) \\ x_1 &= \psi_{2,1}(t), x_2 = \psi_{2,2}(t), \dots, x_n = \psi_{2,n}(t) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$x_1 = \psi_{n,1}(t), x_2 = \psi_{n,2}(t), \dots, x_n = \psi_{n,n}(t)$
 n solutions, linéairement indépendantes, des équations (2).

Les équations ne changent pas quand on change t en $t + 2\pi$, les n solutions reviennent :

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_{1,1}(t + 2\pi), \dots, x_n = \psi_{1,n}(t + 2\pi) \\ x_1 &= \psi_{2,1}(t + 2\pi), \dots, x_n = \psi_{2,n}(t + 2\pi) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$x_1 = \psi_{n,1}(t + 2\pi), \dots, x_n = \psi_{n,n}(t + 2\pi)$$

Elles devront donc être des combinaisons linéaires des n solutions (3) de sorte qu'on aura :

$$(4) \quad \begin{aligned} \psi_{1,1}(t + 2\pi) &= A_{1,1}\psi_{1,1}(t) + A_{1,2}\psi_{2,1}(t) + \dots + A_{1,n}\psi_{n,1}(t) \\ \psi_{2,1}(t + 2\pi) &= A_{2,1}\psi_{1,1}(t) + A_{2,2}\psi_{2,1}(t) + \dots + A_{2,n}\psi_{n,1}(t) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\psi_{n,1}(t + 2\pi) = A_{n,1}\psi_{1,1}(t) + A_{n,2}\psi_{2,1}(t) + \dots + A_{n,n}\psi_{n,1}(t)$$

Les A étant des coefficients constants.

On aura d'ailleurs de même (avec les mêmes coefficients)

$$\begin{aligned} \psi_{1,2}(t + 2\pi) &= A_{1,1}\psi_{1,2}(t) + A_{1,2}\psi_{2,2}(t) + \dots + A_{1,n}\psi_{n,2}(t) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Cela pose^{rait} formons l'équation en S :

$$(5) \quad \begin{vmatrix} A_{1,1} - S & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} - S & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} - S \end{vmatrix} = 0$$

Soit S_1 l'une des racines de cette équation. D'après la théorie des substitutions linéaires, il existera toujours n coefficients constants

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$

tels que si l'on pose :

$$\theta_{1,1}(t) = B_1 \psi_{1,1}(t) + B_2 \psi_{2,1}(t) + \dots + B_n \psi_{n,1}(t)$$

et de même :

$$\theta_{1,i}(t) = B_1 \psi_{1,i}(t) + B_2 \psi_{2,i}(t) + \dots + B_n \psi_{n,i}(t)$$

on ait :

$$\theta_{1,1}(t+2\pi) = S_1 \theta_{1,1}(t)$$

et de même :

$$\theta_{1,i}(t+2\pi) = S_i \theta_{1,i}(t)$$

Ponons :

$$S_i = e^{2\alpha_i \pi}$$

il viendra :

$$e^{-\alpha_1(t+2\pi)} \theta_{1,1}(t+2\pi) = S_1 e^{-\alpha_1 \pi - \alpha_1 t} \theta_{1,1}(t) = e^{-\alpha_1 t} \theta_{1,1}(t)$$

Cette équation exprime que :

$$e^{-\alpha_1 t} \theta_{1,1}(t)$$

est une fonction périodique que nous pourrions développer en une série trigonométrique :

$$\lambda_{1,1}(t)$$

Si les fonctions périodiques $\psi_{i,k}(t)$ sont analytiques, il en sera de même des solutions des équations différentielles (2) et de $\lambda_{1,1}(t)$. La série $\lambda_{1,1}(t)$ sera donc absolument et uniformément convergente.

De même

$$e^{-\alpha_i t} \theta_{1,i}(t)$$

sera une fonction périodique qu'on pourra représenter par une série trigonométrique :

$$\lambda_{1,i}(t)$$

Nous avons donc une solution particulière des équations (2) qui s'écrit :

$$(6) \quad x_1 = e^{\alpha_1 t} \lambda_{1,1}(t), \quad x_2 = e^{\alpha_2 t} \lambda_{1,2}(t), \dots, \quad x_n = e^{\alpha_n t} \lambda_{1,n}(t).$$

A chaque racine de l'équation (5) correspond une solution de la forme (6).

Si l'équation (5) a toutes ses racines distinctes,

nous aurons n solutions de cette forme linéairement indépendantes et la solution générale s'écrira :

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{\alpha_1 t} \lambda_{1,1}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t} \lambda_{2,1}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t} \lambda_{n,1}(t) \\ x_2 &= C_1 e^{\alpha_1 t} \lambda_{1,2}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t} \lambda_{2,2}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t} \lambda_{n,2}(t) \\ &\dots \\ x_n &= C_1 e^{\alpha_1 t} \lambda_{1,n}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t} \lambda_{2,n}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t} \lambda_{n,n}(t) \end{aligned}$$

Les C sont des constantes d'intégration, les α sont des constantes et les λ sont des séries trigonométriques absolument et uniformément convergentes.

Voyons maintenant ce qui arrive quand l'équation (5) a une racine double, par exemple quand $\alpha_1 = \alpha_2$. Reprenons la formule (7), faisons-y

$$C_3 = C_4 = \dots = C_n = 0$$

et faisons-y tendre α_2 vers α_1 . Il vient :

$$x_1 = e^{\alpha_1 t} \left[C_1 \lambda_{1,1}(t) + C_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} \lambda_{2,1}(t) \right]$$

ou en posant $C_1 = C'_1 - C_2$

$$C_2 = \frac{C'_2}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

il viendra :

$$x_1 = e^{\alpha_1 t} \left[C'_1 \lambda_{1,1}(t) + C'_2 \frac{e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} \lambda_{2,1}(t) - \lambda_{1,1}(t)}{\alpha_2 - \alpha_1} \right]$$

Il est clair que la différence

$$\lambda_{2,1}(t) - \lambda_{1,1}(t)$$

s'annulera pour $\alpha_2 = \alpha_1$. Nous pourrions donc poser :

$$\lambda_{2,1}(t) = \lambda_{1,1}(t) + (\alpha_2 - \alpha_1) \lambda'(t)$$

il vient ainsi :

$$x_1 = e^{\alpha_1 t} \left[C'_1 \lambda_{1,1} + C'_2 \lambda_{1,1} \frac{e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} + C'_2 \lambda'(t) e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} \right]$$

et à la limite (pour $\alpha_2 = \alpha_1$) :

$$x_1 = C'_1 e^{\alpha_1 t} \lambda_{1,1} + C'_2 e^{\alpha_1 t} [t \lambda_{1,1} + \lim \lambda'(t)]$$

On verrait que la limite de $\lambda'(t)$ pour $\alpha_2 = \alpha_1$ est encore une série trigonométrique absolument et

uniformément convergente.

Ainsi l'effet de la présence d'une racine double dans l'équation (5) a été d'introduire dans la solution des termes de la forme suivante :

$$e^{\alpha t} t \lambda(t)$$

$\lambda(t)$ étant une série trigonométrique.

On verrait sans peine qu'une racine triple introduirait des termes de la forme :

$$e^{\alpha t} t^2 \lambda(t)$$

et ainsi de suite.

Je n'insiste pas sur tous ces ~~détails~~ points de détail. Ces résultats sont bien connus par les travaux de M. M. Floquet, Callandreau, Bruns, Stieltjes et si j'ai donné ici la démonstration in extenso pour le cas général, c'est que son extrême simplicité me permettait de le faire en quelques mots.

Note E

Sur le Calcul des Limites.

L'une des plus belles découvertes de Cauchy (Comptes Rendus Tome XIV, page 1020), quoiqu'elle ait été peut-être peu remarquée de son temps, est celle qu'il a appelée le Calcul des limites et à laquelle nous conserverons ce nom, quelque mal justifié qu'il puisse être.

Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z) \end{aligned}$$

Si f_1 et f_2 peuvent être développées suivant les puissances croissantes de x, y et z , ces équations admettront une solution de la forme suivante :

$$y = \varphi_1(x) \quad z = \varphi_2(x)$$

φ_1 et φ_2 étant des séries développées suivant les puissances croissantes de x et s'annulant avec x .

Pour le démontrer, Cauchy remplace les deux fonctions f_1 et f_2 par une expression de la forme :

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{(1-\alpha x)(1-\beta y)(1-\gamma z)}$$

en choisissant M, α, β, γ de façon que chaque terme de f' ait un plus grand coefficient (en valeur absolue) que le terme correspondant de f_1 et de f_2 . En remplaçant ainsi f_1 et f_2 par f' , on augmente les coefficients de φ_1 et de φ_2 et comme ces deux séries sont convergentes après ce changement, elles devaient l'être également avant ce changement.

C'est le principe fondamental du Calcul des Limites, dont Cauchy a fait d'ailleurs beaucoup d'autres applications et que plusieurs géomètres ont notablement perfectionné depuis.

Le plus grand de ces perfectionnements est dû à M. Weierstrass qui a remplacé la fonction $f(x, y, z)$ de Cauchy par une autre plus simple qui peut jouer le même rôle.

Ecrivons les équations (1) sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z)$$

$$(1 \text{ bis}) \quad \frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z)$$

$$\frac{dx}{dt} = f_3(x, y, z) = 1$$

Remplaçons y ensuite f , f_1 et f_2 par la fonction de M. Weierstrass.

$$f(x, y, z) = \frac{M}{1 - \alpha(x + y + z)}$$

elles deviendront :

$$(2 \text{ bis}) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{1 - \alpha(x + y + z)}$$

Les équations (1 bis) sont satisfaites formellement par des séries :

$$x = \varphi(t) = t, \quad y = \varphi_1(t), \quad z = \varphi_2(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t .

De même les équations (2 bis) seront satisfaites par des séries

$$x = \varphi'(t), \quad y = \varphi_1'(t), \quad z = \varphi_2'(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t .

(On voit facilement d'ailleurs que $\varphi'(t) = \varphi_1'(t) = \varphi_2'(t)$)

Si M et α sont convenablement choisis, les coefficients des séries φ' sont plus grands que ceux des

séries φ ; or les séries φ' convergent ; donc les séries φ convergent également.

C. L. F. D.

Je n'insiste pas sur ces démonstrations qui sont devenues tout à fait classiques et qui se trouvent développées dans tous les traités un peu complets d'Analyse, par exemple dans le Cours d'Analyse de M. Jordan. (Tome III, page 87).

Mais on peut aller plus loin.

Imaginons que les fonctions f_1 et f_2 dépendent, non seulement de x, y et z , mais d'un certain paramètre arbitraire μ et qu'elles puissent se développer suivant les puissances croissantes de x, y, z et μ . Écrivons alors les équations (1) sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, \mu) = 1$$

$$(1^{er}) \quad \frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z, \mu)$$

$$\frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z, \mu)$$

On peut trouver trois séries

$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0) = t + x_0$, $y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$, $z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$ qui satisfassent formellement aux équations (1^{er}), qui soient développées suivant les puissances croissantes de t , de μ et de trois constantes d'intégration x_0, y_0, z_0 et qui enfin se réduisent respectivement à x_0, y_0 et z_0 pour $t = 0$.

Je dis que ces séries convergent pourvu que t, μ, x_0, y_0 et z_0 soient suffisamment petits.

En effet remplaçons f, f_1 et f_2 par la fonction :

$$f'(x, y, z, \mu) = \frac{M}{(1-\beta\mu)[1-\alpha(x+y+z)]}$$

Cette fonction f' peut être développée suivant les puissances de x, y, z et μ . On peut prendre M, α et β assez grands pour que chaque terme de f' soit plus grand que le terme correspondant de f, f_1 et de f_2 .

(2^{ter})

Nous obtiendrons ainsi les équations

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{(1-\beta\mu)[1-\alpha(x+y+z)]}$$

On peut trouver trois séries

$$x = \varphi'_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad y = \varphi'_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0) \\ z = \varphi'_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

développées suivant les puissances de t, μ, x_0, y_0, z_0 , satisfaisant aux équations (2^{ter}) et se réduisant respectivement à x_0, y_0, z_0 pour $t=0$.

En raisonnant comme le faisait Cauchy, on démontrerait que chaque terme des séries φ' est plus grand que le terme correspondant des séries φ . Or les séries φ' convergent, si t, μ, x_0, y_0 et z_0 sont assez petits. Donc les séries φ convergent également.

C. D. F. D.

On peut tirer de là diverses conséquences.

Nous venons de voir que x, y et z peuvent être développés suivant les puissances de t, μ, x_0, y_0 et z_0 pourvu que ces cinq variables, y compris t , soient suffisamment petites.

Je dis que x, y et z pourront encore être développés suivant les puissances des quatre variables μ, x_0, y_0 et z_0 , quelque grand que soit t pourvu que les quatre variables μ, x_0, y_0 et z_0 soient assez petites. Il y a toutefois un cas d'exception sur lequel je reviendrai.

En effet nous trouvons d'abord trois séries

$$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

qui définissent x, y et z pour les valeurs suffisamment petites de μ, x_0, y_0, z_0 et quand

$$|t| < p$$

p étant le rayon de convergence de ces séries. Si donc t est un point intérieur au cercle de convergence et si x_1, y_1 et z_1 sont les valeurs de x, y et z pour $t = t_1$, on voit que

x_1, y_1 et z_1 sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0 et z_0 , c'est à dire développables suivant les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Soient ensuite x_1^0, y_1^0 et z_1^0 les valeurs de x_1, y_1 et z_1 pour

$$\mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

Cela posé, on aura dans le voisinage du point $t = t_1$,

$$(3) \quad \begin{aligned} x &= \varphi_1'(t-t_1, \mu, x_1-x_1^0, y_1-y_1^0, z_1-z_1^0) \\ y &= \varphi_1''(t-t_1, \mu, x_1-x_1^0, y_1-y_1^0, z_1-z_1^0) \\ z &= \varphi_2'(t-t_1, \mu, x_1-x_1^0, y_1-y_1^0, z_1-z_1^0) \end{aligned}$$

Les séries φ_1', φ_1'' et φ_2' , tout à fait analogues aux séries φ, φ_1 et φ_2 sont définies comme il suit :

Elles satisfont aux équations différentielles, elles sont développées suivant les puissances de $t-t_1, \mu, x_1-x_1^0, y_1-y_1^0$ et $z_1-z_1^0$; elles se réduisent à x_1, y_1 et z_1 pour $t=t_1$.

Elles convergeront si $\mu, x_1-x_1^0, y_1-y_1^0, z_1-z_1^0$ sont assez petit et si

$$|t-t_1| < \rho_1$$

ρ_1 étant le rayon du nouveau cercle de convergence C_1 .

Si t est un point intérieur à ce nouveau cercle de convergence C_1 , on voit que x, y et z seront fonctions holomorphes de $\mu, x_1-x_1^0, y_1-y_1^0$ et $z_1-z_1^0$. Mais $x_1-x_1^0, y_1-y_1^0, z_1-z_1^0$ sont déjà fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0, z_0 . Donc, pour tout point t intérieur au cercle C_1 , les trois quantités x, y et z sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0, z_0 développables selon les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Supposons maintenant que le point t soit extérieur au cercle C_1 , le théorème sera encore vrai, il est clair en effet qu'il suffit pour le démontrer pour une valeur quelconque de t , de répéter le raisonnement précédent un nombre suffisant de fois.

Cette convergence sera d'ailleurs uniforme pour toute valeur de t inférieure à t_0 , quelque grand que soit t_0 .

On ne serait arrêté que dans un cas.

Le théorème de Cauchy cesse d'être vrai si les fonctions f , et f_1 ne sont plus holomorphes en x, y, z ; par exemple si elles deviennent infinies, ou cessent d'être uniformes.

Si on ne peut pas développer les fonctions f, f_1 et f_2 suivant les puissances croissantes de μ , de $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, il n'existera pas en général trois séries φ, φ_1 et φ_2 de la forme (3) satisfaisant aux équations différentielles.

On dit alors que le point

$$x=x_0, y=y_0, z=z_0$$

est un point singulier.

Si donc, en faisant varier t , on voyait le point mobile (x, y, z) passer par un point singulier notre théorème serait en défaut. Si t variant depuis $t=0$ jusqu'à $t=t_0$, le point mobile (x, y, z) ne passe par aucun point singulier, les trois fonctions x, y, z seront développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 pour toute valeur de t inférieure à t_0 . Mais si pour $t=t_0$, le point (x, y, z) se confond avec un point singulier, le théorème cessera d'être vrai pour les valeurs de t supérieures à t_0 .

Notre théorème comporte donc un cas d'exception. Mais ce cas ne se présentera pas dans le problème des trois corps et nous n'avons pas à nous en inquiéter. Soient en effet :

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$
les coordonnées des trois corps, r_{21}, r_{31}, r_{12} leurs
distances ^{mutuelles} naturelles, m_1, m_2 et m_3 leurs masses. Les
équations du problème seront de la forme suivante :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m_2 (x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3 (x_3 - x_1)}{r_{13}^3}$$

Le second membre de cette équation ne pourrait cesser d'être holomorphe en $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ que si l'une des trois distances r_{12}, r_{13}, r_{23} venait à s'annuler, c'est à dire si deux corps venaient à se choquer. Or nous n'appliquerons jamais notre théorème que quand on sera certain qu'un pareil choc ne peut se produire.

Ce théorème joue un grand rôle dans le présent mémoire.

Dans le § 5 (1^{re} Partie, Chapitre III) nous démontrons que certaines solutions particulières du problème, que nous appelons solutions asymptotiques, sont de la forme suivante.

Les quantités inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ peuvent ~~être~~ pour des valeurs de t négatives et très grandes être développées suivant les puissances d'un certain paramètre $\sqrt{\mu}$ et d'une certaine exponentielle e^{xt} , les coefficients étant des fonctions périodiques de t .

Nous en concluons que si t , est une quantité négative suffisamment grande en valeur absolue, les quantités $x_1, x_2, \dots, x_n$ peuvent être développées suivant les puissances de $t - t_0$ et de $\sqrt{\mu}$.

Si nous appliquons maintenant le théorème que nous venons de démontrer, nous verrons que, dans une solution asymptotique, les quantités $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, pour toutes les valeurs de t .

Ce même théorème peut servir également pour l'étude de ce que nous avons nommé le Conséquent d'un point donné.

Soit :

$$z = \varphi(x, y)$$

l'équation d'une surface S que nous supposons passer par l'origine O . Par l'origine O passe une trajectoire; imaginons que quand $\mu = 0$ cette trajectoire vienne au temps $t = \tau$ recouper la surface S en un point P dont les coordonnées seront :

$$x = a, y = b, z = c$$

D'après la terminologie que nous avons adoptée, le point P sera quand on suppose $\mu = 0$ le conséquent du point O .

Supposons de plus que dans le voisinage du point O , $\varphi(x, y)$ soit développable suivant les puissances de x et y , et dans le voisinage du point P suivant les puissances de $x - a$ et $y - b$.

Soit maintenant x_0, y_0, z_0 , un point A très voisin de O et appartenant à la surface S . Si l'on fait passer par ce point A une trajectoire, si on suppose que μ cesse d'être nul, mais reste très petit, on verra que cette trajectoire viendra, à une époque t très peu différente de τ couper la surface S en un point B très voisin de P .

Ce point B dont j'appellerai les coordonnées x, y, z , sera d'après notre terminologie le conséquent du point A .

Ce que je me propose de démontrer, c'est que x, y, z , peuvent se développer suivant les puissances croissantes de x_0, y_0, z_0 et μ .

En effet, d'après le théorème que nous venons d'établir, si x, y, z sont les coordonnées au temps t du point mobile qui décrit la trajectoire issue du point A , si de plus x_0, y_0, z_0, μ et $t - \tau$ sont suffisamment petits, on aura :

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= \psi_1(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0) \\ y &= \psi_2(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0) \\ z &= \psi_3(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

ψ_1, ψ_2 et ψ_3 étant des séries ordonnées suivant les puissances de $t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0$.

Ces séries se réduiront respectivement à a, b, c pour

$$t-\tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Comme $\varphi(x, y)$ est développable suivant les puissances de $x-a$ et $y-b$, si $x-a$ et $y-b$ sont assez petits, nous aurons également :

$$\varphi(x, y) = \psi_4(t-\tau, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

ψ_4 étant une série de même forme que ψ_1, ψ_2 et ψ_3 .

Ecrivons que le point x, y, z se trouve sur la surface S , nous aurons :

$$(5) \quad \psi_3 = \psi_4$$

Art. 26, pag 201.

La relation (5) peut être regardée comme une équation entre $t-\tau, \mu, x_0, y_0$ et z_0 et on peut chercher à la résoudre par rapport à $t-\tau$.

Pour :

$$t-\tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

cette relation est satisfaite, car on a

$$\psi_3 = \psi_4 = c.$$

D'après un théorème de Cauchy, sur lequel nous allons d'ailleurs revenir dans un instant, on pourra tirer de la relation (5) $t-\tau$ sous la forme suivante.

~~$$t-\tau = \theta(\mu, x_0, y_0, z_0)$$~~

$$(6) \quad t-\tau = \theta(\mu, x_0, y_0, z_0)$$

θ étant une série ordonnée suivant les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0 .

Il n'y aurait d'exception que si pour

$$t-\tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0$$

on avait

$$\frac{d\psi_3}{dt} = \frac{d\psi_4}{dt}$$

Or cette équation exprime que la trajectoire issue du point 0 pour $\mu=0$ va toucher la surface S au point P.

Mais il n'en sera pas ainsi, parce que nous supposerons toujours que S est une surface ou une portion de surface sans contact.

Dans les équations (4) remplaçons $t - \tau$ par θ et x, y, z par x_1, y_1, z_1 ; il viendra :

$$x_1 = \Theta_1(\mu, x_0, y_0, z_0)$$

$$y_1 = \Theta_2(\mu, x_0, y_0, z_0)$$

$$z_1 = \Theta_3(\mu, x_0, y_0, z_0)$$

Θ_1, Θ_2 et Θ_3 étant des séries développées selon les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0

C. L. F. G.

C'est de ce résultat (qui, malgré la longueur de la démonstration que nous venons d'en donner, est presque évident) que nous avons fait usage dans le lemme qui précède le théorème III (§4, Première Partie, Chapitre II)

Nous avons encore fait usage du même théorème pour démontrer l'existence des solutions périodiques dans le §1 (Première Partie, Chapitre III). A la fin de ce paragraphe, par exemple, nous considérons le cas où les équations différentielles ne contiennent pas explicitement le temps t .

Pour $\mu = 0$, nous avons supposé qu'il existe une solution périodique de période T :

$$x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$$

Nous avons appelé ensuite (en supposant que μ reste très petit, mais cesse d'être nul) $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur initiale de x_i pour $t = 0$ et $\varphi_i(0) + \beta_i + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = T + \tau$.

D'après le théorème que nous venons de démontrer, γ_i est une fonction développable suivant les puissances croissantes de μ , de τ et des β_i , si ces

quantités sont assez petites et il est évident d'ailleurs que cette fonction s'annule pour

$$\mu = \tau = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = 0.$$

C'est sur ce résultat que nous nous sommes appuyés dans le paragraphe que j'ai viens de citer.

Mais dans ce même paragraphe, nous avons encore appliqué un autre théorème de Cauchy.

Voici quel est ce théorème :

Si on a $n+p$ quantités $y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_p$ entre lesquelles ont lieu n relations :

$$f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

$$f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

(7)

$$\dots \dots \dots$$

$$f_n(y_1, y_2, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

Si les f sont développables suivant les puissances des x et des y et s'annulent avec ces $n+p$ variables,

Si enfin le déterminant fonctionnel des f par rapport aux y n'est pas nul quand les x et les y s'annulent à la fois,

On pourra tirer des équations (7) les n inconnues y sous la forme de séries développées suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Considérons en effet x_1 comme la seule variable indépendante, $x_2, x_3, \dots, x_p$ comme des paramètres arbitraires, nous pourrions remplacer les équations (7) par les n équations différentielles :

$$(8) \quad \frac{df_i}{dy_1} \frac{dy_1}{dx_1} + \frac{df_i}{dy_2} \frac{dy_2}{dx_1} + \dots + \frac{df_i}{dy_n} \frac{dy_n}{dx_1} + \frac{df_i}{dx_1} = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas dont nous venons de nous occuper.

En particulier si $f(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une fonction développable suivant les puissances de $y, x_1, x_2, \dots, x_n$,

Si quand les x et y s'annulent à la fois on a :

$$f=0 \quad \frac{df}{dy} \geq 0$$

Si enfin y est défini par l'égalité

$$f=0$$

y sera développable suivant les puissances des x .

C'est ainsi que dans le paragraphe cité (SI, Chapitre III, Première Partie) nous avons établi que l'on peut résoudre les n équations

$$(9) \quad \psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_n = 0$$

par rapport à n quelconques des $n+1$ inconnues ;

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \tau.$$

L'existence des solutions périodiques une fois démontrée, il reste à faire voir que ces solutions peuvent se développer suivant les puissances de μ et s'écrire :

$$x_i = \theta_{i,0}(t) + \mu \theta_{i,1}(t) + \mu^2 \theta_{i,2}(t) + \dots$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

$\theta_{i,0}(t), \theta_{i,1}(t)$, etc, étant des fonctions périodiques de t développables selon les sinus et cosinus des multiples de :

$$\frac{2\pi t}{T+\tau} = \lambda t.$$

D'après le théorème que nous avons déjà appliqué bien des fois, nous aurons

$$x_i = H_i[t-t_1, \mu, x_1^0 - \varphi_1(0), x_2^0 - \varphi_2(0), \dots, x_n^0 - \varphi_n(0)]$$

si $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ sont les valeurs initiales de $x_1, x_2, \dots, x_n$ pour $t=0$.

H_i sera développable suivant les puissances de

$$t-t_1, \mu, \text{ et } x_i^0 - \varphi_i(0)$$

si μ est assez petit et si t est assez voisin de t_1 et x_i^0 de $\varphi_i(0)$.

Nous prendrons

$$t = t_1 + \frac{t_1 \tau}{T}$$

De plus nous prendrons :

$$x_i^0 - \varphi_i(0) = \beta_i$$

Nous choisirons les β_i et τ de façon à obtenir

une solution périodique, c'est à dire de façon à satisfaire aux équations (9). Nous venons de voir que si τ et les β_i satisfont à ces équations (9), on pourra développer τ , β_1 , β_2 , ..., β_n suivant les puissances croissantes de μ et que τ et les β_i s'annuleront avec μ .

On aura donc

$$x_i = H_i\left(\frac{t_i \tau}{T}, \mu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\right) = K_i(\mu)$$

K_i étant une fonction développée suivant les puissances de μ .

K_i ne dépend pas seulement de μ , il dépend en core de t_i ; nous écrivons donc :

$$x_i = K_i(t_i, \mu)$$

on rappelant toutefois que K_i est développé suivant les puissances de μ , mais non pas suivant celles de t_i .

Cela posé, quand on augmente t_i de T , on augmente t de $T + \tau$ et comme on s'est arrangé de manière à avoir une solution périodique de période $T + \tau$, x_i ne doit pas changer; on a donc :

$$(10) \quad K_i(t_i + T, \mu) = K_i(t_i, \mu)$$

K_i étant développable suivant les puissances de μ , on peut écrire

$$K_i(t_i, \mu) = \theta_{i,0} + \theta_{i,1} \mu + \theta_{i,2} \mu^2 + \dots$$

$\theta_{i,0}, \theta_{i,1}, \theta_{i,2}$ etc ne dépendant que de t_i . L'identité (10) montre alors que $\theta_{i,k}$ ne change pas quand on change t_i en $t_i + T$. Donc $\theta_{i,k}$ est une fonction périodique et peut se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de

$$\frac{2\pi t_i}{T} = \frac{2\pi t}{T + \tau} = \lambda t$$

C. E. T. J.

Cauchy avait déjà appliqué le procédé du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles. Madame Kovalevski a considérablement simplifié la démonstration de Cauchy et a donné au théorème sa forme définitive.

Voici en quoi consiste le théorème de Madame

Kowalewski (Journal de Crelle, tome 80)

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles définissant n inconnues $z_1, z_2, \dots, z_n$ en fonctions de p variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Supposons que ce système s'écrive :

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{dz_1}{dx_1} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_p, \frac{dz_1}{dx_2}, \frac{dz_1}{dx_3}, \dots, \frac{dz_1}{dx_p}), \\ \frac{dz_2}{dx_1} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_p, \frac{dz_1}{dx_2}, \dots, \frac{dz_1}{dx_p}), \\ &\dots \\ \frac{dz_n}{dx_1} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_p, \frac{dz_1}{dx_2}, \dots, \frac{dz_1}{dx_p}). \end{aligned}$$

$f_1, f_2, \dots, f_n$ étant développées suivant les puissances de $x_1, x_2, \dots, x_p$ et des $\frac{dz_i}{dx_k} = \alpha_{ik}$

(i prend les valeurs 1, 2, ..., n, k les valeurs 2, 3, ..., p ; enfin les α_{ik} sont des constantes quelconques)

Soient maintenant

$\psi_1(x_2, x_3, \dots, x_p), \psi_2(x_2, x_3, \dots, x_p), \dots, \psi_n(x_2, x_3, \dots, x_p)$
 n fonctions données quelconques, développées suivant les puissances croissantes de $x_2, x_3, \dots, x_p$ et telles que :

$$\frac{d\psi_i}{dx_k} = \alpha_{ik}$$

pour

$$x_2 = x_3 = \dots = x_p = 0.$$

Il existera n fonctions

$$z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_p), z_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_p), \dots, z_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

développables suivant les puissances de $x_1, x_2, \dots, x_p$, qui satisferont aux équations (11) et qui se réduiront respectivement à $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ pour $x_1 = 0$.

J'ai moi-même cherché à étendre les résultats obtenus par Madame Kowalevski (Thèse Inaugurale, Paris, Gauthier-Villars (1879)) et j'ai étudié en détail les cas que la savante mathématicienne avait laissés de côté.

Je me suis attaché en particulier à l'équation :

$$(12) \quad X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont développés suivant les puissances de $x_1, x_2, \dots, x_n$; je suppose de plus que dans le développement de $X_1, X_2, \dots, X_n$, il n'y ait pas de terme tout connu et que les termes du 1^{er} degré se réduisent respectivement à $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n$, de telle sorte que

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i$$

Y_i désignant une suite de termes du 2^d degré au moins par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$.

J'ai démontré qu'à certaines conditions cette équation admet une intégrale holomorphe développable suivant les puissances de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Pour que cette intégrale existe, il suffit :

1^o que le polygone convexe qui contient les n points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ne contienne pas l'origine,

2^o que l'on n'ait aucune relation de la forme

$$m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n = \lambda_1$$

où les m sont des entiers positifs dont la somme est plus grande que 1.⁽¹⁾

Je vais chercher à généraliser le résultat obtenu dans ma thèse.

Au lieu de l'équation (12) envisageons l'équation suivante :

(1) Dans ma thèse, je n'énonce pas cette restriction et je ne suppose pas que la somme des m soit plus grande que 1. Il semblerait donc que le théorème est en défaut quand on a par exemple $\lambda_2 = \lambda_1$. Il n'en est rien. Si l'on avait $m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n = \lambda_1$ ($m_2 + m_3 + \dots + m_n > 1$) certains coefficients du développement prendraient la forme $\frac{A_0}{0}$ et deviendraient infinis. C'est pour cette raison que nous avons dû supposer qu'une pareille relation n'a pas lieu. Si l'on avait au contraire $\lambda_2 = \lambda_1$, certains coefficients prendraient la forme $\frac{0}{0}$.

$$(13) \quad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dx_1}{dt} + X_2 \frac{dx_2}{dt} + \dots + X_n \frac{dx_n}{dt} = \lambda_1 z$$

Nous avons encore

$|x$

$$X_i = \lambda_i f_i - Y_i$$

Y_i désignant une fonction développée suivant les puissances de $x_1, x_2, \dots, x_n$ et ne comprenant que des termes du 2^d degré au moins par rapport à ces n variables. Mais Y_i ne dépend pas seulement des x , il dépend aussi de t , de sorte que les coefficients du développement de Y_i suivant les puissances des x sont des fonctions de t . Nous supposerons que ce sont des fonctions périodiques de t de période 2π développées suivant les sinus et cosinus des multiples de t .

Je me propose de chercher dans quel cas l'équation (13) admettra une intégrale holomorphe développée suivant les puissances de $x_1, x_2, \dots, x_n$ et telle que les coefficients du développement soient des fonctions périodiques de t .

Voyons d'abord quelle va être la forme de Y_i . Nous allons développer Y_i suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \dots, x_n$; considérons le terme en

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Le coefficient de ce terme étant une fonction périodique de t pourra se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de t , ou ce qui revient au même suivant les puissances positives et négatives de $e^{i\sqrt{-1}t}$.

Nous pourrions donc écrire

$$Y_i = \sum C_{i,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} e^{\beta + i\sqrt{-1}t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Les C sont des coefficients constants, β est un entier positif ou négatif; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des entiers positifs tels que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \geq 2.$$

J'écrirai aussi quelquefois en supprimant les indices :

$$Y_i = \sum C e^{\beta + i\sqrt{-1}t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Potons maintenant :

$$Y_i' = \sum |c| e^{\beta t \sqrt{-1}} x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}$$

et envisageons l'équation suivante :

$$(14) \quad (\lambda_1' x_1 - Y_1') \frac{dz}{dx_1} + (\lambda_2' x_2 - Y_2') \frac{dz}{dx_2} + \dots + (\lambda_n' x_n - Y_n') \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1' z$$

Dans cette équation $\frac{dz}{dt}$ n'entre plus ; nous pouvons donc regarder t comme un paramètre arbitraire et $x_1, x_2, \dots, x_n$ comme les seules variables indépendantes. Si donc les quantités $\lambda_1', \lambda_2', \dots, \lambda_n'$ satisfont aux conditions que nous avons énoncées plus haut, l'équation (14) (qui est de même forme que l'équation (12)) admettra une intégrale holomorphe.

Nous supposons

$$\lambda_1' = \lambda_2' = \dots = \lambda_n'$$

Nous supposons de plus λ_1' réel et positif.

Cela pose soit

$$(15) \quad \tilde{z} = \sum A_{\beta, x_1, x_2, \dots, x_n} e^{\sqrt{-1} \beta t} x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}$$

une série satisfaisant formellement à l'équation (13). Comment pourra-t-on calculer les coefficients A par récurrence ?

En écrivant l'équation (13) sous la forme

$$\frac{dz}{dt} + \lambda_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \dots + \lambda_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda_1 z = Y_1 \frac{dz}{dx_1} + Y_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + Y_n \frac{dz}{dx_n}$$

et en identifiant les deux membres on trouve :

$$A_{\beta, x_1, x_2, \dots, x_n} [\beta \sqrt{-1} + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n - \lambda_1] = P[C, A]$$

$P[C, A]$ étant un polynôme entier à coefficients positifs par rapport aux C et aux coefficients A déjà calculés.

Soit maintenant

$$(16) \quad \tilde{z} = \sum A'_{\beta, x_1, x_2, \dots, x_n} e^{\sqrt{-1} \beta t} x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}$$

une série satisfaisant à l'équation (14). Pour calculer les coefficients A' nous écrirons l'équation (14) sous la

forme :

$$\lambda'_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \lambda'_2 x_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + \lambda'_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda'_1 z = Y'_1 \frac{dz}{dx_1} + Y'_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + Y'_n \frac{dz}{dx_n}$$

En identifiant les deux membres, nous trouverons :

$$A'_{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} [\lambda'_1 \alpha_1 + \lambda'_2 \alpha_2 + \dots + \lambda'_n \alpha_n - \lambda'_1] = P[C, A']$$

$P[C, A']$ ne diffère de $P[C, A]$ que parce que les C sont remplacés par leurs modules et les A par les A' .

Les λ'_i étant réels positifs ainsi que les coefficients du polynôme P , les A' seront aussi réels et positifs.

Pour que l'on ait ensuite,

$$|A_{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}| < A'_{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$$

il suffit que l'on ait toujours :

$$\lambda'_1 \alpha_1 + \lambda'_2 \alpha_2 + \dots + \lambda'_n \alpha_n - \lambda'_1 < |\beta \sqrt{-1} + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n - \lambda_1|$$

ou

$$(17) \quad \lambda'_1 < \frac{|\beta \sqrt{-1} + \lambda_1 (\alpha_1 - 1) + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n|}{(\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

Si l'on a choisi λ'_1 de façon à satisfaire à l'inégalité (17), on aura donc

$$|A| < A'$$

Or la série (16) converge, donc il en sera de même de la série (15).

Ainsi donc pour que la série (15) converge, il suffit qu'on puisse trouver une quantité positive δ'_1 satisfaisant à l'inégalité (17) pour toutes les valeurs entières et positives des α_i , et pour toutes les valeurs entières positives et négatives de β .

Commençons par remarquer que le second membre de l'inégalité (17) est toujours plus grand que :

$$(18) \quad \frac{|\beta \sqrt{-1} + \lambda_1 (\alpha_1 - 1) + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n|}{|\beta| + (\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

Il suffira donc que λ'_1 soit plus petit que l'expression (18). Or cette expression (18) est le module d'une certaine quantité imaginaire représentée par un certain point G . Or il est aisé de voir que ce point G n'est autre chose que le centre

de gravité des $n+2$ masses suivantes :

1^o n masses égales respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et situées respectivement aux points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

2^o une masse égale à $|\beta|$ et située soit au point $+\sqrt{-1}$ soit au point $-\sqrt{-1}$.

3^o une masse égale à -1 située au point λ_1 .

Toutes ces masses sont positives à l'exception de la dernière.

Il faut chercher la condition pour que la distance OG soit toujours supérieure à une certaine limite λ_1 .

Composons d'abord les $n+1$ premières masses ; nous obtiendrons une masse :

$$M = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + |\beta|$$

située en un certain point G' et comme ces $n+1$ premières masses sont positives, le point G' sera situé à l'intérieur du polygone convexe qui enveloppe les $n+2$ points

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$$

Si ce polygone convexe ne contient pas l'origine, on pourra assigner à la distance OG' une limite inférieure μ et écrire :

$$OG' > \mu.$$

Il reste à composer la masse M située en G' et la masse -1 située en λ_1 . On obtiendra ainsi une masse $M-1$ située en G . On aura évidemment :

$$OG > OG' - GG'$$

$$GG' = \frac{G'\lambda_1}{M-1} < \frac{OG'}{M-1} + \frac{O\lambda_1}{M-1}$$

d'où

$$OG > OG' \frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1} > \mu \frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1}$$

Si donc :

$$M > \frac{3\mu + 2O\lambda_1}{\mu}$$

l'inégalité

$$(19) \quad OG > \frac{\mu}{2}$$

sera satisfaite.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de combinaisons des nombres entiers :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$$

pour lesquelles l'inégalité (19) pourrait ne pas être satisfaite.

Si pour aucune de ces combinaisons OG n'est nul, nous serons certains de pouvoir assigner à OG une limite inférieure λ_1 .

Nous sommes donc conduits à la règle suivante :

Pour que l'équation (13) admette une intégrale développable suivant les puissances des x et périodique par rapport à t , il suffit :

1° que le polygone convexe circonscrit aux $n+2$ points

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$$

ne contienne pas l'origine.

2° qu'il n'y ait entre les quantités λ aucune relation de la forme

$$\beta\sqrt{-1} + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n = 1,$$

les α étant entiers positifs et β entier positif ou négatif.

C'est là une généralisation du théorème démontré dans ma thèse. Or de ce théorème découlaient un certain nombre de conséquences. Voyons si on pourra en tirer de semblables du théorème généralisé.

Nous allons pour cela suivre absolument la même marche que dans la thèse citée.

Considérons l'équation :

$$(20) \quad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = 0$$

obtenue en supprimant le second membre de l'équation (13).

Considérons en outre l'équation :

$$(21) \quad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z$$

et l'équation :

$$(21) \quad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_2 z$$

Si les λ satisfont aux conditions que nous venons d'énoncer, l'équation (13) admettra une intégrale

$$z = T_1$$

où T_1 est ordonnée suivant les puissances des x et périodique par rapport à t .

De même l'équation (21) admettra une intégrale

$$z = T_2$$

où T_2 est de même forme que T_1 .

On en conclut que l'équation (20) admet comme intégrale particulière :

$$T_1^{\frac{1}{n_1}} T_2^{-\frac{1}{n_2}}$$

Comme on peut dans le second membre de (13) remplacer successivement λ, z , par $\lambda_2 z, \lambda_3 z, \dots, \lambda_n z$ et qu'on obtient ainsi $n-1$ équations analogues à l'équation (21), on peut conclure que l'équation (20) admet $n-1$ intégrales particulières

$$T_1^{\frac{1}{n_1}} T_2^{-\frac{1}{n_2}}, T_1^{\frac{1}{n_1}} T_3^{-\frac{1}{n_3}}, \dots, T_1^{\frac{1}{n_1}} T_n^{-\frac{1}{n_n}}$$

où $T_2, T_3, \dots, T_n$ sont de même forme que T_1 .

Pour avoir l'intégrale générale de (20), il faudrait posséder encore une n^{e} intégrale particulière. Pour cela considérons l'équation :

$$(22) \quad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = z$$

Cette équation admettra comme intégrale particulière $z = e^t$.

Nous en concluons que l'équation (20) admet comme intégrales particulières

$$T_1 e^{-\lambda_1 t}, T_2 e^{-\lambda_2 t}, \dots, T_n e^{-\lambda_n t}$$

de sorte que l'intégrale générale de cette équation (20) sera :

$$z = \text{fonction arbitraire de } (T_1 e^{-\lambda_1 t}, T_2 e^{-\lambda_2 t}, \dots, T_n e^{-\lambda_n t})$$

On d'autre termes les équations différentielles :

$$(20 \text{ bis}) \quad dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n}$$

admettront comme intégrale générale

$$T_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}, T_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, T_n = K_n e^{\lambda_n t}$$

$K_1, K_2, \dots, K_n$ étant n constantes d'intégration.

Ce théorème peut être regardé comme la généralisation de celui que j'ai démontré à la page 30 de ma thèse.

Supposons maintenant que nous cherchions à déterminer les p premières variables x à savoir

$$x_1, x_2, \dots, x_p$$

en fonctions des $n-p$ autres à savoir

$$x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$$

et de t , à l'aide des équations suivantes :

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} + X_{p+1} \frac{dx_1}{dx_{p+1}} + X_{p+2} \frac{dx_1}{dx_{p+2}} + \dots + X_n \frac{dx_1}{dx_n} &= X_1 \\ \frac{dx_2}{dt} + X_{p+1} \frac{dx_2}{dx_{p+1}} + \dots + X_n \frac{dx_2}{dx_n} &= X_2 \\ \dots &\dots \\ \frac{dx_p}{dt} + X_{p+1} \frac{dx_p}{dx_{p+1}} + \dots + X_n \frac{dx_p}{dx_n} &= X_p \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que l'intégrale générale des équations (23) s'écrira :

$$(24) \quad \begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_p &= 0 \\ \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p &\text{ représentant } p \text{ fonctions arbitraires de} \\ T_1 e^{-\lambda_1 t}, T_2 e^{-\lambda_2 t}, \dots, T_n e^{-\lambda_n t} \end{aligned}$$

Preons en particulier :

$$\varphi_1 = T_1 e^{-\lambda_1 t}, \varphi_2 = T_2 e^{-\lambda_2 t}, \dots, \varphi_p = T_p e^{-\lambda_p t}$$

Les équations (24) s'écriront :

$$(24 \text{ bis}) \quad T_1 = T_2 = \dots = T_p = 0.$$

Des équations (24 bis) on pourra tirer $x_1, x_2, \dots, x_p$ en fonctions de $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ et t et on verra que

ce sont des fonctions holomorphes par rapport à $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ et périodiques par rapport à t .

Donc les équations (23) admettent une solution développable suivant les puissances croissantes de $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de t .

Ce théorème est démontré quand les λ satisfont aux conditions énoncées plus haut, voyons comment on pourra l'étendre aux cas où ces conditions ne sont pas remplies. Je suivrai pour cela la même marche que dans la 4^{me} Partie de mes recherches sur les Courbes définies par les Equations Différentielles, (Journal de Liouville 4^{me} série T. II, pages 156 - 157.)

Proposons nous de calculer les coefficients de l'intégrale holomorphe des équations (23) (à supposer que cette intégrale existe) et à cet effet écrivons ces équations (23) sous la forme suivante :

(23 bis)

$$i = 1, 2, \dots, p$$

$$\frac{dx_i}{dt} + \lambda_{p+1} x_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda_{p+2} x_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + \lambda_n x_n \frac{dx_i}{dx_n} - \lambda_i x_i =$$

$$= Y_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + Y_n \frac{dx_i}{dx_n} - Y_i$$

Soit :

$$Y_i = \sum C_{i, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

une quelconque des fonctions $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ainsi que nous l'avons supposé plus haut, et proposons nous de calculer les p fonctions

$$x_1, x_2, \dots, x_p$$

sous la forme

$$(25) \quad x_i = \sum A_{i, \beta, \alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Pour calculer les coefficients A par récurrence, substituons les séries (25) dans les équations (23 bis) et identifions

les deux membres. Nous aurons pour calculer $A_{i,\beta,\alpha_{p+1},\dots,\alpha_n}$ l'équation suivante :

$$A_{i,\beta,\alpha_{p+1},\alpha_{p+2},\dots,\alpha_n} (\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \dots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i) = P[C, (-C'), A]$$

$P[C, (-C'), A]$ étant un polynôme entier à coefficients positifs par rapport aux coefficients C de

$$Y_{p+1}, Y_{p+2}, \dots, Y_n$$

aux coefficients C' de Y_i changés de signe et aux coefficients A déjà calculés.

Pour qu'aucun des coefficients A ne devienne infini nous devons donc d'abord supposer qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme :

$$(26) \quad \beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \dots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i = 0$$

où les α sont entiers positifs et β entier positif ou négatif.

Cela pose soit λ' une quantité positive que nous déterminerons plus complètement dans la suite.

Soit ensuite :

$$Y'_i = \sum \left| C_{i,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} \right| e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

pour $i = p+1, p+2, \dots, n$

et

$$Y'_i = - \sum \left| C_{i,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} \right| e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

pour $i = 1, 2, \dots, p$.

Formons les équations

$$(23 \text{ ter}) \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

$$\lambda' x_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda' x_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + \lambda' x_n \frac{dx_i}{dx_n} - \lambda' x_i =$$

$$= Y'_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y'_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + Y'_n \frac{dx_i}{dx_n} - Y'_i$$

Cherchons à satisfaire aux équations (23 ter) à l'aide de séries de la forme suivante

$$(25 \text{ bis}) \quad x_i = \sum B_{i,\beta,\alpha_{p+1},\alpha_{p+2},\dots,\alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Les coefficients B nous seront données par les équations suivantes :

$$B_{i, \beta, \alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_n} [\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_n - 1)] = P[|C|, |C'|, B]$$

où $P[|C|, |C'|, B]$ diffère de $P[C, (-C'), A]$ en ce que les coefficients C et $-C'$ y sont remplacés par leurs modules, et les coefficients A par les B correspondants.

On en conclut que tous les B sont positifs et que chaque B est plus grand que le module du A correspondant.

Il suffit pour cela d'une seule condition, c'est que :

$$\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_n - 1) < \left| \beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1} \lambda_{p+1} + \alpha_{p+2} \lambda_{p+2} + \dots + \alpha_n \lambda_n - \lambda_i \right|$$

Si cette condition est remplie chacun des termes de la série (25) sera plus petit que le terme correspondant de la série (25 bis) et comme cette dernière converge, la série (25) convergera également.

Il suffit pour cela que l'on puisse trouver une quantité positive λ' assez petite pour que l'on ait toujours

$$\lambda' < \left| \frac{\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1} \lambda_{p+1} + \dots + \alpha_n \lambda_n - \lambda_i}{\alpha_{p+1} + \dots + \alpha_n - 1} \right|$$

c'est à dire, d'après ce que nous avons vu plus haut que le polygone convexe circonscrit aux $n-p+2$ points

$$+\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, \lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$$

ne contienne pas l'origine.

Si donc ce polygone convexe ne contient pas l'origine, s'il n'y a entre les λ aucune relation de la forme (26), les équations (23) admettront une intégrale particulière de la forme suivante :

$$x_1 = \varphi_1(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t), x_2 = \varphi_2(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t), \dots, x_p = \varphi_p(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t)$$

les φ étant développables suivant les puissances de x_{p+1} ,

$x_{p+2}, \dots, x_n$ et les sinus et cosinus des multiples de t .

Cela pose envisageons les équations :

(20 ter)
$$dt = \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}$$

Ces équations sont de même forme que les équations (20 bis); la seule différence, c'est que les δ n'ont pas des valeurs qui satisfont aux conditions suffisantes énoncées plus haut pour que l'équation (13) ait une intégrale holomorphe.

Nous allons nous proposer de trouver non pas la solution générale des équations (20 ter), mais une solution contenant $n-p$ constantes arbitraires.

Parmi les équations (20 ter), si considère en particulier les suivantes :

(27)
$$\frac{dx_{p+1}}{dt} = X_{p+1}, \frac{dx_{p+2}}{dt} = X_{p+2}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

J'écris en outre les équations :

(28)
$$x_i = \varphi_i(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t) \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

Les φ_i étant les intégrales holomorphes des équations (23) définies plus haut.

Il est évident que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n fonctions de t qui satisfont aux équations (27) et (28), elles satisferont également aux équations (20 ter).

Dans les équations (27) substituons à la place de $x_1, x_2, \dots, x_p$ leurs valeurs (28), ces équations deviendront :

$$\frac{dx_{p+1}}{dt} = \lambda_{p+1} x_{p+1} + Z_{p+1}, \quad \frac{dx_{p+2}}{dt} = \lambda_{p+2} x_{p+2} + Z_{p+2}, \dots$$

$$\dots, \frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + Z_n$$

$Z_{p+1}, Z_{p+2}, \dots, Z_n$ étant des séries développées suivant les puissances de $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$, dont tous les termes sont du 2^e degré au moins et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t .

Ces équations (29) sont de la même forme que les équations (20 bis); leur intégrale générale sera donc de la forme suivante :

$$T'_{p+1} = K_{p+1} e^{\lambda_{p+1} t}, T'_{p+2} = K_{p+2} e^{\lambda_{p+2} t}, \dots, T'_n = K_n e^{\lambda_n t}$$

où $K_{p+1}, \dots, K_n$ sont des constantes d'intégration, où $T'_{p+1}, \dots, T'_n$ sont des séries développées suivant les puissances des x et les sinus et cosinus des multiples de t .

Les équations

$$(30) \quad \begin{aligned} T'_i &= 0 & (i = 1, 2, \dots, p) \\ T'_q &= K_q e^{\lambda_q t} & (q = p+1, p+2, \dots, n) \end{aligned}$$

nous donnent donc une intégrale des équations (20 bis) dépendant des $n-p$ constantes arbitraires $K_{p+1}, K_{p+2}, \dots, K_n$.

Pour obtenir cette intégrale sous forme explicite, il faut résoudre ces équations (30) par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$; on trouve ainsi :

$$x_1 = \Psi_1(t, K_{p+1}, \dots, K_n)$$

$$x_2 = \Psi_2(t, K_{p+1}, \dots, K_n)$$

$$\dots$$

$$x_n = \Psi_n(t, K_{p+1}, \dots, K_n)$$

les Ψ étant des séries développées suivant les puissances de

$$K_{p+1} e^{\lambda_{p+1} t}, K_{p+2} e^{\lambda_{p+2} t}, \dots, K_n e^{\lambda_n t}$$

et suivant les sinus et cosinus des multiples de t .

Ces séries sont convergentes, pourvu que le polygone convexe circonscrit aux points :

$$\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, \lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$$

ne contienne pas l'origine et qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme (26).

C'est donc là une nouvelle démonstration du théorème fondamental du §5 (1^{re} Partie, Chapitre III)

Cette démonstration fait ressortir l'analogie qui existe de ce théorème avec ceux que j'ai énoncés dans ma thèse et en particulier avec celui-ci :

Dans le voisinage d'un point singulier, les solutions d'une équation différentielle sont développables suivant les puissances de $t, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \dots, t^{\lambda_n}$:

J'avais d'abord démontré ce théorème, (que j'ai
ensuite rattaché aux idées générales qui ont inspiré ma
thèse) par une voie assez différente dans le 45^e
Cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique et
M. Picard y avait été conduit indépendamment
par d'autres considérations. (Comptes-Rendus 1878).

Note F

Sur les Surfaces Asymptotiques.

J'ai donné dans les § 2, 3 et 4 (2^{me} Partie, Chapitre I) la manière de trouver l'équation des surfaces asymptotiques et de démontrer que ces surfaces sont fermées.

On peut apporter quelques simplifications dans les calculs par lesquels on arrive à l'équation des surfaces asymptotiques. D'autre part, pour démontrer que ces surfaces sont fermées, j'ai pu me servir des théorèmes du § 4 (1^{re} Partie Chapitre II). Ces théorèmes ont été présentés sous une forme géométrique qui avait à mes yeux l'avantage de mieux faire comprendre la genèse de mes idées et de se prêter plus facilement à une généralisation ultérieure. Il ne sera pas inutile toutefois, au point de vue de certaines applications possibles, de donner ici une démonstration analytique.

J'adopterai les mêmes notations que dans les paragraphes cités; j'écrirai donc les équations différentielles sous la forme suivante.

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1} & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2} \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1} & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2} \end{aligned}$$

F étant une fonction de x_1, x_2, y_1 et y_2 , périodique de période 2π par rapport à y_1 et y_2 .

Ces équations admettent l'intégrale des forces vives

$$(2) \quad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C$$

Nous regarderons la Constante C comme une donnée de la question.

Nous supposons en outre que F dépend d'un

paramètre très petit μ et peut se développer suivant les puissances de ce paramètre de la manière suivante :

$$F = F_0 + F_1 \mu + F_2 \mu^2 + \dots$$

Enfin F_0 ne dépendra que de x_1 et x_2 et sera indépendant de y_1 et de y_2 .

Écrivons :

$$x_1 = x_1^0 + x_1^1 \sqrt{\mu} + x_1^2 \mu + x_1^3 \mu \sqrt{\mu} + \dots$$

$$x_2 = x_2^0 + x_2^1 \sqrt{\mu} + x_2^2 \mu + x_2^3 \mu \sqrt{\mu} + \dots$$

imaginons que les coefficients de ces deux développements soient des fonctions de y_1 et de y_2 et cherchons à déterminer ces coefficients de façon que ces équations soient compatibles avec les équations différentielles (1), c'est à dire que l'on ait :

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dy_1} &= 0 \\ \frac{dF}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} &= 0 \end{aligned}$$

C'est là le problème que nous nous sommes proposé dans le §2 (2^{me} Partie, Chapitre I)

Ce problème peut être présenté sous une autre forme (en se plaçant au point de vue des Vorlesungen über Dynamik)

Si x_1 et x_2 sont deux fonctions de y_1 et de y_2 satisfaisant aux équations (3), l'expression :

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2$$

devra être une différentielle exacte. Si donc nous posons :

$$dS = x_1 dy_1 + x_2 dy_2$$

S sera une fonction de y_1 et de y_2 qui sera définie par l'équation aux dérivées partielles :

$$(4) \quad F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right) = C$$

S pourra se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et l'on aura :

$$(5) \quad S = S_0 + S_1 \sqrt{\mu} + S_2 \mu + S_3 \mu \sqrt{\mu} + \dots$$

$S_0, S_1, \dots, S_K, \dots$ seront des fonctions de y_1 et de y_2 et on aura :

$$\frac{dS_K}{dy_1} = x_1^K, \quad \frac{dS_K}{dy_2} = x_2^K$$

Je rappelle maintenant quelles conditions nous avons imposées dans le paragraphe cité, aux fonctions x_1^K et x_2^K ; nous avons supposé d'abord que x_1^0 et x_2^0 devaient être des constantes. On a alors

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2 :$$

Si nous appelons ensuite n_1 et n_2 les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$, ces quantités n_1 et n_2 seront encore des constantes. L'analyse qui va suivre s'applique au cas où le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable. Dans ce cas on peut toujours, comme nous l'avons vu, supposer $n_2 = 0$; c'est ce que nous ferons désormais, comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité.

Nous avons supposé en outre dans ce paragraphe que x_1^K et x_2^K sont des fonctions périodiques de y_1 , qui ne changent pas de valeur quand on change y_1 et y_2 en $y_1 + 2\pi$ et y_2 .

Il résulte de là que $\frac{dS_K}{dy_1}$ et $\frac{dS_K}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques par rapport à y_1 , et qu'on peut écrire :

$$(6) \quad S_K = \frac{n_K}{n_1} y_1 + S'_K$$

n_K étant une ~~des~~ constantes et S'_K une fonction périodique de y_1 .

Supposons que dans le premier membre de l'équation (4)

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right)$$

on remplace S par son développement (5); on verra que F deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et qu'on aura, ainsi qu'on l'a vu dans le paragraphe cité :

$$F = H_0 + H_1 \sqrt{\mu} + H_2 \mu + H_3 \mu \sqrt{\mu} + \dots$$

les H étant des fonctions de y_1 , de y_2 , et des dérivées

partielles de S_0, S_1, S_2 , etc.

On voit d'ailleurs que H_0 dépendra seulement de S_0 , H_1 de S_0 et de S_1 , H_2 de S_0, S_1 et S_2 , H_3 de S_0, S_1, S_2, S_3 etc.

On trouve d'ailleurs :

$$H_0 = F'_0(x_1^0, x_2^0) = C$$

$$H_1 = -n_1 \frac{dS_1}{dy_1}$$

$$H_2 = -n_1 \frac{dS_2}{dy_1} + \Delta S_1 + K_2$$

$$H_3 = -n_1 \frac{dS_3}{dy_1} + 2\Delta S_2 + K_3$$

$$H_p = -n_1 \frac{dS_p}{dy_1} + 2\Delta S_{p-1} + K_p$$

où l'on a posé pour abrégé :

$$\Delta S_p = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 F_0}{(dx_1^0)^2} x_1' x_1^p + \frac{d^2 F_0}{dx_1^0 dx_2^0} (x_1' x_2^p + x_2' x_1^p) + \frac{d^2 F_0}{(dx_2^0)^2} x_2' x_2^p \right]$$

et où K_p ne dépend que de $S_0, S_1, \dots$, jusqu'à S_{p-2} .

Cela posé, pour déterminer par récurrence les fonctions S_p , nous aurons les équations suivantes :

$$H_0 = C, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad \dots, \quad H_p = 0.$$

Si l'on supposait que les fonctions $S_0, S_1, \dots, S_{p-1}$ fussent entièrement connues, l'équation

$$H_p = 0$$

ou

$$(7) \quad n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p$$

déterminerait la fonction S_p à une fonction arbitraire près de y_0 .

Mais ce n'est pas tout à fait ainsi que la question se présente.

Supposons que l'on connaisse complètement

$$S_0, S_1, \dots, S_{p-2}$$

et que l'on connaisse S_{p-1} à une fonction arbitraire près de y_0 .

Par hypothèse les dérivées de $S_0, S_1, \dots, S_{p-2}, S_{p-1}$ sont des fonctions périodiques de y_1 ; donc K_p et ΔS_{p-1} seront des fonctions périodiques de y_1 .

Désignons par $[V]$ comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité, la valeur moyenne de V , si V est une fonction périodique quelconque de y_1 .

S_p doit être de la forme (6); nous en concluons que:

$$\left[\frac{dS_p}{dy_1} \right]$$

doit être une constante $\frac{\lambda_p}{n_1}$ indépendante de y_2 , de sorte que l'équation (7) nous donne:

$$(8) \quad 2[\Delta S_{p-1}] + [K_p] = \lambda_p$$

et cette équation déterminera complètement S_{p-1} (si l'on suppose que l'on se donne, soit arbitrairement, soit suivant une loi quelconque, la constante λ_p).

Nous trouvons d'abord l'équation:

$$H_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dS_1}{dy_1} = 0$$

qui nous montre que S_1 est une fonction arbitraire de y_2 .

Nous en déduisons:

$$2\Delta S_p = -M \frac{dS_1}{dy_2} \frac{dS_p}{dy_1} - N \frac{dS_1}{dy_2} \frac{dS_p}{dy_2}$$

(nous posons pour abréger:

$$-M = \frac{d^2 F_0}{dx_1^0 dx_2^0}, \quad -N = \frac{d^2 F_0}{(dx_2^0)^2}$$

comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité.)

L'équation que nous trouvons ensuite en égalant à 0 la valeur moyenne de H_2 est la suivante:

$$[\Delta S_1] + [K_2] = \lambda_2$$

Or

$$\Delta S_1 = -\frac{N}{2} \left(\frac{dS_1}{dy_2} \right)^2 = [\Delta S_1]$$

D'autre part:

$$K_1 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2).$$

λ_2 est une constante qui, ainsi qu'il est aisé de le voir, est précisément celle que nous avons appelée $-C_1$ dans le paragraphe cité.

Il vient donc :

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

S_1 est ainsi entièrement déterminé à une constante près; mais nous pouvons laisser cette constante de côté, elle ne joue en effet aucun rôle puisque les fonctions S n'entrent que par leurs dérivées.

L'équation (8) devient ensuite :

$$(9) \quad \left[N \frac{dS_1}{dy_2} \frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right] = -\lambda_p - M \left[\frac{dS_1}{dy_2} \frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] + [K_p].$$

Dans le second membre tout est connu; K_p ne dépend que de $S_0, S_1, \dots, S_{p-2}$; $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est connu puisque S_{p-1} est supposée déterminée à une fonction arbitraire près de y_2 .

D'autre part $\frac{dS_1}{dy_2}$ est indépendant de y_1 ; le premier membre peut donc s'écrire :

$$N \frac{dS_1}{dy_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right],$$

de sorte que l'équation (9) nous donnera $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ en fonction de y_2 . Nous connaîtrons donc $[S_{p-1}]$ à une constante près et cette constante qui ne joue aucun rôle peut être laissée de côté.

Nous connaissons d'une part S_{p-1} à une fonction arbitraire près de y_2 ; d'autre part nous connaissons $[S_{p-1}]$ en fonction de y_2 ; donc S_{p-1} est entièrement déterminée.

La constante C_1 joue un rôle prépondérant.

Supposons d'abord qu'elle soit supérieure à la valeur que nous avons appelée $-\psi_4$ dans les paragraphes cités et par conséquent que $[F_1] + C_1$ soit toujours positif et $\frac{dS_1}{dy_2}$ toujours réel et je pourrai ajouter toujours positif

parce que je suis libre de prendre le signe + devant le radical.

Je dis que dans ce cas, on peut choisir arbitrairement les constantes λ et que $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques non seulement de y_1 , mais encore de y_2 .

(S_p est alors de la forme

$$S_p = \lambda_p y_1 + \mu_p y_2 + S''_p$$

λ_p et μ_p étant des constantes pendant que S''_p est périodique de période 2π tant par rapport à y_1 que par rapport à y_2 .)

En effet, supposons que cela soit vrai pour :

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \dots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1};$$

je dis que cela sera vrai encore pour $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$.

En effet, nous avons par hypothèse :

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \sum A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha),$$

les A et les α étant des constantes, m_1 et m_2 étant des entiers.

On aura ensuite par définition

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] = \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} A_{0, m_2} \cos(m_2 y_2 + \alpha).$$

Mais on doit avoir

$$2 \left[\Delta S_{p-2} \right] + \left[K_{p-1} \right] = \lambda_{p-1}$$

et par conséquent :

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1},$$

λ_{p-1} étant une constante ; on en conclut que :

$$A_{0, m_2} = 0 \text{ pour } m_2 \geq 0, \quad A_{0,0} = \lambda_{p-1}$$

Il vient ainsi

$$S_{p-1} = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1} y_1 + \sum A_{m_1 m_2} \frac{\sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha)}{m_1} + [S_{p-1}],$$

m_1 et m_2 prenant toujours sous le signe Σ toutes les valeurs entières telles que $m_1 \geq 0$.

Ainsi, pour que S_{p-1} soit de la forme voulue, il

suffit que :

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$$

soit une fonction périodique de y_2 . Or $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ est définie par l'équation :

$$N \frac{dS_1}{dy_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right] = -\lambda_p - M \frac{dS_1}{dy_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] + [K_p]_3.$$

K_p ne dépendant que de $S_1, S_2, \dots, S_{p-2}$ sera périodique en y_2 .

$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right]$ est une constante λ_{p-1} ; de plus $\frac{dS_1}{dy_2}$ est une fonction périodique de y_2 qui ne s'annule jamais.

Il en résulte que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ peut être développée suivant les sinus et les cosinus des multiples de y_2 .

On a ensuite :

$$n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2(\Delta S_{p-1}) + K_p$$

ce qui montre que $\frac{dS_p}{dy_1}$ est périodique en y_1 et y_2 .

Ainsi en choisissant pour C_1 une valeur supérieure à $-\varphi_4$ et en choisissant ensuite les autres constantes $\lambda_3, \lambda_4, \dots$, d'une façon arbitraire, on trouve pour $\frac{dS}{dy_1}$ et $\frac{dS}{dy_2}$ des séries ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de y_1 et de y_2 . Ces séries, quoique divergentes, peuvent rendre des services dans certains cas, ainsi que je l'ai dit au § 4 (2^{me} Partie, Chapitre I).

Passons maintenant au cas de

$$C_1 = -\varphi_4.$$

L'expression

$$[F_1] + C_1$$

n'est jamais négative, mais elle devient nulle pour une certaine valeur de y_2 que nous avons appelée η_3 dans le paragraphe cité. Je supposerai dans ce qui va suivre que cette valeur est nulle; j'ai le droit

de le faire, l'origine des y_2 étant restée jusqu'ici arbitraire.

Ecrivons donc $[F_1] + C_1$ sous forme de série trigonométrique :

$$[F_1] + C_1 = \sum A_m \sin m y_2 + \sum B_m \cos m y_2$$

Pour $y_2 = 0$, cette fonction s'annule ainsi que sa dérivée, puisque la fonction étant toujours positive, zéro est pour elle un minimum. Il en résulte que l'expression suivante :

$$\frac{[F_1] + C_1}{\sin^2 \frac{y_2}{2}}$$

est développable suivant les sinus et cosinus des multiples de y_2 , c'est une fonction périodique de y_2 qui ne s'annule jamais et ne devient jamais infinie.

Il suit de là que l'on peut écrire :

$$\frac{\sin \frac{y_2}{2}}{\sqrt{[F_1] + C_1}} = \sum A_m \cos m y_2 + \sum B_m \sin m y_2$$

et par conséquent :

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{y_2}{2}}{\sum A_m \cos m y_2 + \sum B_m \sin m y_2}$$

Nous pourrions écrire maintenant l'équation (9) sous la forme suivante :

$$(9 \text{ bis}) \quad \frac{\sqrt{2N} \sin \frac{y_2}{2}}{\sum A_m \cos m y_2 + \sum B_m \sin m y_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right] = -\lambda_p + \Phi_p(y_2),$$

Φ_p étant une fonction connue de y_2 .

Cela posé, je me propose de démontrer que :

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

sont des fonctions périodiques de y_1 et de y_2 , dont la période est 2π par rapport à y_1 et 4π par rapport à y_2 .

Supposons en effet que cela soit démontré pour :

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \dots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

$\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est une fonction périodique de y_1 et de y_2 ; d'autre part sa valeur moyenne

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] = \frac{1}{n_1} \lambda_{p-1}$$

est une constante indépendante de y_2 . Nous pourrions donc écrire :

$$S_{p-1} = \frac{1}{n_1} \lambda_{p-1} y_1 + \theta_{p-1}(y_1, y_2) + \zeta_{p-1}(y_2),$$

$\theta_{p-1}(y_1, y_2)$ étant une fonction périodique de y_1 et y_2 et ζ_{p-1} une fonction arbitraire de y_2 seulement. Il vient ensuite :

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2},$$

d'où

$$\frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2}$$

et :

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2},$$

ce qui montre que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2}$ est une fonction périodique de y_1 et de y_2 .

L'équation (g bis) montre que cela sera vrai également de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ et par conséquent de $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ (quelle que soit d'ailleurs la constante λ_p) et l'équation (f) montre que cela est vrai de $\frac{dS_p}{dy_1}$.

Cela sera donc vrai des fonctions :

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

quel que soit l'indice p .

Il importe toutefois de remarquer que si ces fonctions sont périodiques, ce n'est pas une raison suffisante pour qu'elles puissent être développées suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et de $\frac{y_2}{2}$. En effet

ces fonctions ne sont pas toujours finies, sauf pour un choix particulier des constantes λ_p ; il est aisé de s'en rendre compte, car l'équation (9 bis) d'où l'on doit tirer la valeur de

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$$

a un facteur dans son premier membre $\sin \frac{y_2}{2}$. Donc l'expression de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ contiendra $\sin \frac{y_2}{2}$ au dénominateur.

Les dérivées des fonctions S_p pourront donc devenir infinies, mais seulement pour

$$\sin \frac{y_2}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad y_2 = 2K\pi.$$

Si y_2 a une valeur différente de $2K\pi$, ces dérivées ne deviennent infinies pour aucune valeur de y_1 ; elles peuvent donc se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 .

Nous pouvons donc écrire par exemple :

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1} \lambda_{p-1} + \sum A_m \cos m y_1 + \sum B_m \sin m y_1$$

A_m et B_m étant des fonctions périodiques de y_2 qui peuvent devenir infinies.

Imaginons maintenant que les constantes λ_p d'indice impair soient toutes nulles; je dis que

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

ne changeront pas quand on changera y_2 en $y_2 + 2\pi$ toutes les fois que l'indice p sera pair et qu'au contraire ces deux fonctions changeront de signe, sans changer de valeur absolue quand on changera y_2 en $y_2 + 2\pi$, toutes les fois que l'indice p sera impair.

Je suppose que le théorème soit vrai pour :

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \dots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

et je me propose de démontrer qu'il est vrai également pour

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_1}$$

Si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est multiplié par $(-1)^{p-1}$ quand y_2 se change en $y_2 + 2\pi$, il en sera de même de :

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right].$$

Nous avons trouvé en effet

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1} \lambda_{p-1} + \sum A_m \cos my_1 + \sum B_m \sin my_1,$$

A_m et B_m étant des fonctions périodiques de y_2 .

Si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est multiplié par $(-1)^{p-1}$ quand y_2 augmente de 2π , il en sera de même de A_m et B_m et des dérivées de ces fonctions par rapport à y_2 . Il en sera donc encore de même de :

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right] = \sum \frac{dA_m}{dy_2} \frac{\sin my_1}{m} - \sum \frac{dB_m}{dy_2} \frac{\cos my_1}{m}.$$

Nous avons maintenant à montrer que cela est vrai.

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right].$$

Pour cela il est nécessaire d'étudier de quelle manière K_p dépend des fonctions $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{p-2}$. Je me propose d'établir que l'ordre de tous les termes de K_p par rapport aux dérivées des fonctions d'indice impair

$$S_1, S_3, S_5, \dots$$

sera de même parité que p .

En effet, en faisant dans

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right)$$

$$S = S_0 + S_1 \sqrt{\mu} + S_2 \mu + \dots,$$

nous avons trouvé :

$$F = H_0 + H_1 \sqrt{\mu} + H_2 \mu + \dots$$

Si je change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$ et qu'en même temps je change S_1, S_3, S_5 , etc. en $-S_1, -S_3, -S_5$ etc. sans toucher aux fonctions d'indice pair, l'expression de F ne devra pas changer.

Donc H_p devra se changer en $(-1)^p H_p$.

Cela montre que l'ordre de tous les termes de H_p par rapport aux dérivées de S_1, S_2, S_3 , etc, devra être de même parité que p . Il devra donc, comme je l'ai annoncé, en être de même des termes de K_p , puisqu'on obtient K_p en supprimant dans H_p les termes qui dépendent de S_{p-1} ou de S_p .

Cela posé, changeons y_2 en $y_2 + \pi$, les dérivées de S_q ne changeront pas si q est pair et au plus égal à $p-2$; elles changeront de signe si q est impair et au plus égal à $p-2$. Donc K_p se changera en $(-1)^p K_p$.

Reprenons maintenant l'équation (9)

$$(9) \quad N \frac{dS_1}{dy_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right] = -\lambda_p - M \frac{dS_1}{dy_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] + [K_p].$$

Quand on change y_2 en $y_2 + \pi$,

$[K_p]$ se change en $(-1)^p [K_p]$,

$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right]$ se change en $(-1)^{p-1} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right]$,

et $\frac{dS_1}{dy_2}$ se change en $-\frac{dS_1}{dy_2}$.

Nous pourrions même dire que

λ_p se change en $(-1)^p \lambda_p$.

En effet cela est vrai pour p pair parce que λ_p est une constante indépendante de y_2 ; cela est vrai encore pour p impair parce que nous avons supposé que les λ_p d'indice impair sont tous nuls.

Il résulte de là que

$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ se changera en $(-1)^{p-1} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$

et par conséquent

$\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ en $(-1)^{p-1} \frac{dS_{p-1}}{dy_2}$

C. Z. L. D.

233 Je dis maintenant que $\frac{dS_p}{dy_1}$ se changera en $(-1)^p \frac{dS_p}{dy_1}$.
Ecrivons en effet l'équation (7)

$$n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2 \Delta S_{p-1} + K_p i$$

K_p et ΔS_{p-1} et par conséquent le second membre de l'équation (7) seront multipliés $(-1)^p$ quand y_2 augmentera de 2π . Il devra donc en être de même du premier membre ~~de~~ ^{et} de $\frac{dS_p}{dy_1}$

C. E. T. D.

Je vais maintenant démontrer que l'on peut choisir les constantes λ_p de façon que les dérivées des fonctions S_p ne deviennent pas infinies pour $y_2 = 2K\pi$.

Supposons que l'on ait choisi les constantes

$\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{p-1}$ de façon que

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \dots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-1}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

restent finies et que les constantes λ_q d'indice impair soient nulles; je me propose de choisir λ_p de façon que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$ ne deviennent pas non plus infinies. Nous verrons en même temps que λ_p devra être nulle si p est impair.

Il est clair d'abord que si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ reste finie, il en sera de même de :

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$$

et de

$$\Phi_p(y_2) = [K_p] - M \frac{dS_1}{dy_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right].$$

Reprenons maintenant l'équation (9 bis). Le coefficient de la quantité inconnue $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ s'annule pour $y_2 = 2K\pi$; pour que cette quantité inconnue demeure finie, il faut que le second membre s'annule également et que l'on ait :

$$\Phi_p(2K\pi) = \lambda_p.$$

Comme Φ_p ne change pas quand y_2 augmente de 4π , il suffira de prendre $K=0$ et $K=1$ et d'écrire

$$(10) \quad \Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p.$$

Si p est pair, il n'y a pas de difficulté, on a :

$$\Phi_p(y_2) = \Phi_p(y_2 + 2\pi)$$

et par conséquent :

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi),$$

de sorte qu'il suffit de prendre :

$$\lambda_p = \Phi_p(0).$$

Si au contraire p est impair, on a :

$$\Phi_p(y_2) = -\Phi_p(y_2 + 2\pi)$$

et

$$\Phi_p(0) = -\Phi_p(2\pi),$$

de sorte que les équations (10) ne peuvent être satisfaites que si l'on a :

$$\Phi_p(0) = \Phi_p(2\pi) = \lambda_p = 0.$$

Nous avons donc à démontrer que pour p impair, $\Phi_p(0)$ est nul.

Soit en effet :

$$\Phi_p(0) = \alpha$$

et par conséquent

$$\Phi_p(2\pi) = -\alpha.$$

Je dis que α est nul.

Nous allons nous appuyer sur un lemme qui est presque évident.

Voici l'énoncé de ce lemme :

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions périodiques et de période 2π par rapport à y_1 et à y_2 . On sait que si φ est une fonction périodique de y_1 , par exemple, la valeur moyenne de $\frac{d\varphi}{dy_1}$ est nulle. On aura donc

$$\iint \frac{d\varphi_1}{dy_1} dy_1 dy_2 = \iint \frac{d\varphi_2}{dy_2} dy_1 dy_2 = 0$$

ou

$$\iint \left(\frac{dy_1}{dy_2} - \frac{dy_2}{dy_1} \right) dy_1 dy_2 = 0,$$

les intégrales étant étendues à toutes les valeurs de y_1 et de y_2 depuis 0 jusqu'à 2π .

Il est nécessaire pour que le lemme soit vrai que les fonctions q_1 et q_2 soient continues, mais leurs dérivées peuvent être discontinues. Les dérivées doivent seulement rester finies.

Cela posé, nous acheverons de déterminer la fonction S_{p-1} , non plus par l'équation (9 bis), mais par l'équation suivante :

$$(11) \quad \frac{V^2 N \sin \frac{y_2}{2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]}{\sum A_m \cos my_2 + \sum B_m \sin my_2} = -\alpha \cos \frac{y_2}{2} + \Phi_p(y_2).$$

Elle ne diffère de l'équation (9 bis) que parce que λ_p a été remplacé par $\alpha \cos \frac{y_2}{2}$.

Cette équation montre d'abord que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ est une fonction périodique de y_2 et de période 2π , (je rappelle que p est supposé impair). De plus cette fonction ne devient pas infinie pour $y_2 = 2K\pi$, parce que le second membre de l'équation (11) s'annule pour $y_2 = 0$ et pour $y_2 = 2\pi$.

Posons ensuite

$$\zeta_1 = \frac{dS_0}{dy_1} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_1} + \mu \frac{dS_2}{dy_1} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_1} + \mu^{\frac{p}{2}} \eta_1,$$

$$\zeta_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2};$$

η sera une fonction de y_1 , de y_2 et de μ définie par l'équation :

$$(12) \quad F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C$$

Il est aisé de voir que ζ_2 est entièrement déterminé puisque nous connaissons maintenant complètement $S_0, S_1, \dots, S_{p-1}$. On pourra donc tirer η de l'équation (12) sous la forme suivante :

$$\eta = \eta_0 + \mu^{\frac{1}{2}} \eta_1 + \mu \eta_2 + \dots$$

les η_i étant des fonctions périodiques de y_1 et de y_2 , de période 2π par rapport à y_1 et 4π par rapport à y_2 .

De plus on aura :

$$\frac{d\zeta_1}{dy_2} - \frac{d\zeta_2}{dy_1} = \mu^2 \frac{d\eta}{dy_2}.$$

Nous n'avons besoin que de η_0 ; or on voit tout de suite que η_0 est donné par l'équation suivante :

$$(13) \quad \eta_1 \eta_0 = 2 \Delta S_{p-1} + K_p$$

qui ne diffère de l'équation (7) que parce que l'inconnue y est désignée par η_0 .

Cette équation montre que η_0 est une fonction périodique de y_1 , il faut chercher la valeur moyenne de cette fonction. Si l'on se reporte à la signification de l'équation (11), on verra qu'elle exprime que la partie moyenne du second membre de (13) est $\propto \cos \frac{y_2}{2}$.

On a donc :

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{\eta_1} \cos \frac{y_2}{2}.$$

ζ_2 est susceptible de deux valeurs différentes qui se permutent l'une dans l'autre, soit quand on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$, soit quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$.

J'appellerai φ_2 la plus grande des deux valeurs de ζ_2 et ψ_2 la plus petite.

De même ζ_1 est susceptible de deux valeurs, j'appellerai φ_1 celle qui correspond à φ_2 et ψ_1 celle qui correspond à ψ_2 .

Enfin η est susceptible de deux valeurs, j'appellerai η' celle qui correspond à φ_2 et η'' celle qui correspond à ψ_2 ; η_i est susceptible de deux valeurs que j'appellerai de même η'_i et η''_i .

La fonction φ_2 est périodique de période 2π par rapport à y_2 ; en effet, quand on augmente y_2 de 2π , les deux valeurs de ζ_2 se permutent entre elles; donc φ_2 qui est toujours égale à la plus

grande de ces deux valeurs ne change pas.

Pour la même raison, $\varphi_1, \varphi_2, \eta', \eta'', \eta'_0, \eta''_0$ seront des fonctions de période 2π par rapport à y_2 .

Des définitions précédentes, il résulte que $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ sont des fonctions continues, quoique les dérivées de ces fonctions, de même que η' et η'' puissent être discontinues.

Nous sommes donc dans les conditions où notre lemme est applicable et nous pourrions écrire :

$$\mu^{\frac{p}{2}} \iint \frac{d\eta'}{dy_2} dy_1 dy_2 = \iint \left(\frac{d\varphi_1}{dy_2} - \frac{d\varphi_2}{dy_1} \right) dy_1 dy_2 = 0,$$

$$\mu^{\frac{p}{2}} \iint \frac{d\eta''}{dy_2} dy_1 dy_2 = \iint \left(\frac{d\psi_1}{dy_2} - \frac{d\psi_2}{dy_1} \right) dy_1 dy_2 = 0,$$

ou encore

$$\iint \frac{d(\eta' - \eta'')}{dy_2} dy_1 dy_2 = 0,$$

ou enfin :

$$\iint \frac{d(\eta'_0 - \eta''_0)}{dy_2} dy_1 dy_2 + \iint \left[\frac{d(\eta' - \eta'_0)}{dy_2} - \frac{d(\eta'' - \eta''_0)}{dy_2} \right] dy_1 dy_2.$$

Cette relation devra avoir lieu quel que soit μ .

Mais quand μ tend vers 0, $\eta' - \eta'_0$ et $\eta'' - \eta''_0$ tendent vers 0.

Donc on aura :

$$(14) \quad \lim \iint \frac{d(\eta'_0 - \eta''_0)}{dy_2} dy_1 dy_2 = 0 \quad (\text{pour } \mu = 0).$$

Transformons le premier membre de l'égalité (14). Je remarque d'abord que p étant impair, η_0 est une fonction qui doit se changer en $-\eta_0$ quand y_2 se change en $y_2 + 2\pi$. Il suffit pour s'en convaincre

de se reporter à l'équation (13). Nous avons donc :

$$\eta'_0 = -\eta''_0 = \pm \eta_0$$

d'où :

$$\iint \frac{d(\eta'_0 - \eta''_0)}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2 \iint \frac{d\eta'_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2 \iint \frac{d(\pm \eta_0)}{dy_2} dy_1 dy_2.$$

Il reste à voir pour quelles valeurs des y nous devons faire $\eta'_0 = +\eta_0$ et pour quelles valeurs des y nous devons faire $\eta'_0 = -\eta_0$.

Si nous avons :

$$(15) \quad \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} + \mu^2 \frac{dS_3}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2} > 0,$$

nous devons prendre d'après notre convention :

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu} \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} + \mu \sqrt{\mu} \frac{dS_3}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu} \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} - \mu \sqrt{\mu} \frac{dS_3}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

Si au contraire le premier membre de l'inégalité (15) est négatif, nous devons prendre :

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu} \frac{dS_1}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2} \mp$$

et

$$\psi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu} \frac{dS_1}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

C'est donc du signe du premier membre de l'inégalité (15) que dépend le signe du premier membre de l'inégalité (15). Egalons ce premier membre à 0, nous obtiendrons une équation :

$$(16) \quad \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} + \dots = 0.$$

Cette équation peut être regardée comme définissant y_2 en fonction de y , et de μ .

On pourra résoudre cette équation et écrire :

$$y_2 = \theta(y_1, \mu).$$

Observons seulement que θ est une fonction périodique de période 2π par rapport à y_1 , et que cette fonction θ s'annule identiquement quand on y fait $\mu = 0$.

Par conséquent quand y_2 variera de θ à $\theta + 2\pi$, on aura :

$$\eta'_0 = +\eta_0$$

et quand y_2 variera de $\theta + 2\pi$ à $\theta + 4\pi$, on aura

$$\eta'_0 = -\eta_0.$$

Nos intégrales doivent être étendues à toutes les valeurs de y_2 comprises entre 0 et 2π . Mais comme η'_0 est une fonction de période 2π , on aura :

$$\int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\eta'_0}{dy_2} = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_\theta^{\theta+2\pi} dy_2 \frac{d\eta'_0}{dy_2}$$

ou

$$\iint \frac{d\eta'_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_\theta^{\theta+2\pi} dy_2 \frac{d\eta'_0}{dy_2}.$$

Quand μ tendra vers 0, le premier membre devra tendre vers 0 et d'ailleurs θ tendra vers 0, on aura donc :

$$\lim \iint \frac{d\eta'_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\eta_0}{dy_2} = 0$$

d'où

$$0 = \iint \frac{d\eta_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{d[\eta_0]}{dy_2} dy_2 = -\pi \frac{\alpha}{n_1} \int_0^{2\pi} \sin \frac{y_2}{2} dy_2 = -\frac{4\pi\alpha}{n_1}.$$

On a donc

$$\alpha = 0.$$

C. D. F. J.

Il résulte de là que si l'on annule les constantes γ_p d'indice impair et si l'on donne des valeurs convenables aux constantes γ_p d'indice pair, les fonctions $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ resteront finies.

On pourra donc les développer suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et de $\frac{y_2}{2}$; les multiples

pairs de $\frac{p}{2}$ entreraient seuls dans le développement si p est pair ; si au contraire p est impair, les multiples impairs de $\frac{p}{2}$ entreraient seuls.

Nous aurons alors pour les équations de la surface asymptotique

$$(17) \quad x_1 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_1}, \quad x_2 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_2}.$$

Je n'ai pas à revenir sur la convergence de ces séries ; en effet au § 5 (1^{re} partie, Chapitre III) on a démontré l'existence de ces surfaces asymptotiques et on a montré que leur équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$(18) \quad x_1 = f_1(y_1, y_2, \mu), \quad x_2 = f_2(y_1, y_2, \mu),$$

f_1 et f_2 étant des séries développées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$. On a vu que ces séries convergent pour des valeurs quelconques de y_1 et de y_2 pourvu que μ soit assez petit.

De plus ces séries f_1 et f_2 doivent satisfaire aux conditions suivantes :

- I. Les divers termes de ces séries sont finis.
- II. Ces divers termes sont des fonctions périodiques de y_1 .
- III. Si l'on pose :

$$f_1 = f_1' + \sqrt{\mu} f_1'', \quad f_2 = f_2' + \sqrt{\mu} f_2''$$

(f_1', f_1'', f_2', f_2'' ne contenant plus que des puissances paires de $\sqrt{\mu}$) les deux équations :

$$f_1'' = 0, \quad f_2'' = 0$$

seront équivalentes et les trois équations :

$$x_1 = f_1', \quad x_2 = f_2', \quad f_2'' = 0$$

définiront une solution périodique du 1^{er} genre, qui pour $\mu = 0$ devra se réduire à

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad y_2 = 0.$$

Or l'analyse qui précède démontre que les séries (17) sont les seules qui satisfassent aux équations différentielles,

et aux conditions I, II et III.

Les séries (17) doivent donc être identiques aux séries (18) et par conséquent convergent.

D'autre part la forme des équations (17) montre immédiatement que les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées puisque les seconds membres sont des fonctions périodiques.

241 Nous avons vu que la quantité appelée plus haut α est toujours nulle. On peut donner de ce fait essentiel une autre démonstration.

Potons :

$$T = S_1 + \mu S_3 + \mu^2 S_5 + \dots + \mu^{\frac{p-3}{2}} S_{p-2},$$

$$\xi = \eta_0 + \mu \eta_2 + \mu^2 \eta_4 + \dots + \dots$$

Je dis d'abord que T est une fonction périodique de y_1 et de y_2 .

En effet ses dérivées $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques ; en a donc :

$$T = \beta y_1 + \gamma y_2 + T_1'$$

β et γ étant des constantes et T_1' étant une fonction périodique de y_1 et y_2 .

On en conclut que

$$\frac{dT}{dy_1} = \beta + \frac{dT_1'}{dy_1}, \quad \frac{dT}{dy_2} = \gamma + \frac{dT_1'}{dy_2},$$

$\frac{dT_1'}{dy_1}$ et $\frac{dT_1'}{dy_2}$ étant des séries trigonométriques dont le terme tout connu est nul.

Mais les fonctions $S_1, S_3, \dots, S_{p-2}$ étant d'indices impair, leurs dérivées changent de signe quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$. Donc $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ changent de signe quand y_2 augmente de 2π . Donc les termes tout connus β et γ sont nuls. Donc $T = T_1'$ est une fonction périodique qui ne change pas quand y_1 augmente de 2π et qui change de signe quand y_2 augmente de 2π .

Cela posé, nous savons que ξ_1 et ξ_2 sont liés par l'équation :

$$F(\xi_1, \xi_2, y_1, y_2) = C.$$

Il en résulte que, si les deux valeurs de ξ_2 se confondent, les deux valeurs de ξ_1 se confondent également.

Ecrivons que les deux valeurs de ξ_2 se confondent, il vient :

$$(19) \quad \frac{dT}{dy_2} = 0.$$

Cette équation (19) est d'ailleurs identique à l'équation (16). Ecrivons maintenant que les deux valeurs de ξ_1 se confondent, il viendra :

$$(20) \quad \frac{dT}{dy_1} + \mu^{\frac{p-1}{2}} \xi = 0.$$

Les équations (19) et (20) devront être équivalentes. De plus elles devront être équivalentes à la suivante :

$$y_2 = \theta(y_1, \mu),$$

θ ayant le même sens que plus haut. Supposons qu'on développe θ suivant les puissances croissantes de μ , il viendra :

$$(21) \quad y_2 = \mu \theta_1 + \mu^2 \theta_2 + \mu^3 \theta_3 + \dots$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ étant des fonctions périodiques de y_1 .

Supposons y_2 lié à y_1 par l'équation (21), quand y_1 augmentera de 2π , y_2 ne changera pas et T qui est périodique ne changera pas non plus, on aura donc :

$$\int_{y_1=0}^{y_1=2\pi} dT = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dT}{dy_1} dy_1 + \frac{dT}{dy_2} dy_2 \right) = 0,$$

ou en remplaçant $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ par leurs valeurs tirées des équations (19) et (20)

$$-\mu^{\frac{p-1}{2}} \int_0^{2\pi} \xi dy_1 = 0.$$

Si dans

$$\xi = \eta_0 + \mu \eta_1 + \mu^2 \eta_2 + \dots$$

on remplace y_2 par sa valeur (21) il viendra :

$$\xi = \xi_0 + \mu \xi_1 + \mu^2 \xi_2 + \dots$$

ξ_0, ξ_1, ξ_2 etc étant des fonctions périodiques de y_1 .

On devra avoir quel que soit μ ,

$$\int_0^{2\pi} dy_1 \left(\xi_0 + \mu \xi_1 + \mu^2 \xi_2 + \dots \right) = 0$$

et par conséquent :

$$\int_0^{2\pi} \xi_0 dy_1 = 2\pi [\xi_0] = 0.$$

Il est clair que pour obtenir ξ_0 , il suffit de faire $y_2 = 0$ dans η_0 , or on a

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{n_1} \cos \frac{y_2}{2}.$$

Il vient donc :

$$\left[\xi_0 \right] = \frac{\alpha}{n_1}.$$

On a donc

$$\frac{2\pi\alpha}{n_1} = 0.$$

ou

$$\alpha = 0.$$

C. L. F. D.

Note G

Sur la Non-Existence des Intégrales Uniformes

Je crois devoir revenir avec plus de détails sur la démonstration par laquelle j'établis que les équations que je traite n'admettent aucune intégrale analytique et uniforme, en dehors de l'intégrale des forces vives.

Ces équations sont :

$$(1) \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}$$

avec l'intégrale

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

F étant une fonction uniforme et analytique de x_1, x_2, y_1 et y_2 , périodique de période 2π en y_1 et y_2 .

Je dis qu'il ne peut pas exister une seconde intégrale

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C_1,$$

φ étant une fonction analytique et uniforme et de plus périodique de période 2π en y_1 et y_2 .

Je ne veux pas me contenter de démontrer que cette fonction φ ne peut pas être uniforme pour toutes les valeurs réelles des x et des y .

D'un autre côté, il est clair que l'on peut toujours trouver un domaine assez petit pour qu'une intégrale φ du système (1) reste uniforme à l'intérieur de ce domaine.

Voici donc d'une façon plus précise ce que je me propose d'établir.

Je dis qu'une intégrale φ ne peut pas rester analytique, uniforme et périodique dans l'intérieur d'un domaine, si ce domaine est assez grand pour que le point mobile dont les coordonnées x_1, x_2, y_1, y_2

varient conformément aux équations (1) ne puisse jamais en sortir.

Cela posé, soit

$$x_1 = \theta_1(y_1, y_2), \quad x_2 = \theta_2(y_1, y_2)$$

l'équation d'une surface asymptotique quelconque. Nous savons que θ_1 et θ_2 sont des fonctions périodiques de période 2π en ce qui concerne y_1 , et 4π en ce qui concerne y_2 .

Considérons maintenant les trois équations :

$$(2) \quad \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C, \quad x_1 = \theta_1(y_1, y_2), \quad x_2 = \theta_2(y_1, y_2).$$

Si ces trois équations sont distinctes et compatibles, elles définissent une trajectoire, et cette trajectoire est une courbe fermée. En effet nous pourrions partager la surface asymptotique en deux régions, celle où la fonction uniforme φ est plus grande ^{que} C , celle où elle est plus petite que C . Ces deux régions seront séparées par la courbe définie par les équations (2) et cette courbe partageant la surface en deux régions sera une courbe fermée.

Comme la constante C est arbitraire, il résulterait de là qu'on pourrait tracer sur la surface asymptotique une infinité de trajectoires fermées et nous savons qu'il n'en est pas ainsi.

Nous devons donc conclure que les équations (2) ne peuvent être distinctes et compatibles, ou en d'autres termes que la fonction φ doit avoir même valeur en tous ^{les} points de la surface asymptotique.

En d'autres termes, si les équations

$$F = C, \quad \varphi = C,$$

sont considérées comme représentant une famille de surfaces, les surfaces asymptotiques devront faire partie de cette famille.

On a vu de plus que les équations :

$$x_1 = \theta_1(y_1, y_2), \quad x_2 = \theta_2(y_1, y_2), \quad \theta_1(y_1, y_2 + 2\pi) = \theta_1(y_1, y_2)$$

(dont la dernière est équivalente à

$$\theta_2(y_1, y_2 + 2\pi) = \theta_2(y_1, y_2).$$

représentent la courbe double de la surface asymptotique.

D'après ce que nous venons de voir, on doit avoir identiquement:

$$F[\theta_1(y_1, y_2), \theta_2(y_1, y_2), y_1, y_2] = C,$$

$$\varphi[\theta_1(y_1, y_2), \theta_2(y_1, y_2), y_1, y_2] = C,$$

d'où en différentiant par rapport à y_1 et y_2

$$\frac{dF}{dx_1} \frac{d\theta_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2} \frac{d\theta_2}{dy_1} + \frac{dF}{dy_1} = 0, \quad \frac{dF}{dx_1} \frac{d\theta_1}{dy_2} + \frac{dF}{dx_2} \frac{d\theta_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0,$$

(3)

$$\frac{d\varphi}{dx_1} \frac{d\theta_1}{dy_1} + \frac{d\varphi}{dx_2} \frac{d\theta_2}{dy_1} + \frac{d\varphi}{dy_1} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx_1} \frac{d\theta_1}{dy_2} + \frac{d\varphi}{dx_2} \frac{d\theta_2}{dy_2} + \frac{d\varphi}{dy_2} = 0.$$

De ces équations on peut tirer en fonctions de x_1, x_2, y_1 et y_2 les quatre dérivées partielles

$$\frac{d\theta_1}{dy_1}, \quad \frac{d\theta_1}{dy_2}, \quad \frac{d\theta_2}{dy_1}, \quad \frac{d\theta_2}{dy_2}.$$

Or si l'on a affaire à un point appartenant à la courbe double d'une surface asymptotique, on a

$$\theta_1(y_1, y_2 + 2\pi) = \theta_1(y_1, y_2),$$

$$\frac{d\theta_1}{dy_1}(y_1, y_2 + 2\pi) = \frac{d\theta_1}{dy_1}(y_1, y_2).$$

Par conséquent en ce point $\frac{d\theta_1}{dy_1}$ doit pouvoir prendre deux valeurs distinctes ce qui exige que

$$(4) \quad \frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{d\varphi}{dx_1}} = \frac{\frac{dF}{dx_2}}{\frac{d\varphi}{dx_2}} = \frac{\frac{dF}{dy_1}}{\frac{d\varphi}{dy_1}} = \frac{\frac{dF}{dy_2}}{\frac{d\varphi}{dy_2}}.$$

Il existe dans un domaine quelconque une infinité de surfaces asymptotiques et de courbes doubles de ces surfaces. Dans un domaine quelconque il existera donc une infinité de points où les relations (4) sont remplies; si la fonction φ est analytique, ces relations (4) devront donc être satisfaites identiquement.

Si les équations (4) sont identiques, on en déduit :

$$\varphi = \text{fonction de } F$$

C'est à dire que les deux intégrales $F=C$, $\varphi=C$, ne sont pas distinctes.

C. C. T. D.

On peut démontrer ce résultat d'une autre manière, en s'appuyant sur les principes des Vorlesungen de Jacobi.

Réolvons les deux équations :

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

par rapport à x_1 et à x_2 . Je suppose que F et φ sont développés suivant les puissances croissantes de μ de telle sorte que :

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \mu \varphi_1 + \mu^2 \varphi_2 + \dots.$$

Nous savons que F_0 ne dépend que de x_1 et de x_2 ; je dis que φ_0 ne dépendra non plus que de x_1 et de x_2 . En effet dans le cas de $\mu=0$, c'est à dire quand F se réduit à F_0 , l'intégrale générale des équations (1) s'écrit :

$x_1 = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$, $y_1 = -t \frac{dF_0}{dx_1} + \text{const.}$, $y_2 = -t \frac{dF_0}{dx_2} + \text{const.}$
et il n'y a d'autre intégrale analytique et uniforme que celles qui sont de la forme suivante :

fonction arbitraire de x_1 et de $x_2 = \text{const.}$

Cela posé, ne supposons plus que μ soit nul et cherchons à résoudre les équations

$$F=C, \quad \varphi=C,$$

par rapport à x_1 et à x_2 en développant x_1 et x_2 suivant les puissances croissantes de μ .

Cela sera toujours possible, par la formule de Lagrange, sauf pour les valeurs de x_1 et de x_2 pour lesquelles on aurait :

$$(5) \quad \frac{dF_0}{dx_1} \frac{d\varphi_0}{dx_2} - \frac{dF_0}{dx_2} \frac{d\varphi_0}{dx_1} = 0.$$

71

Si cette relation (5) n'est pas satisfaite identiquement, nous pourrions supposer que nous avons choisi les valeurs de C et de C_1 et par conséquent celles de x_1 et de x_2 de façon que cette relation n'ait pas lieu.

Nous ne serions donc embarrassés que si la relation (5) était une identité, mais alors on aurait

$$\varphi_0 = \psi(F_0),$$

ψ désignant une fonction quelconque de F_0 . On pourrait alors considérer l'intégrale suivante,

$$\psi(F) - \varphi = C_2;$$

pour $\mu = 0$ le premier membre se réduit à

$$\psi(F_0) - \varphi_0$$

ou à zéro. Donc

$$\psi(F) - \varphi$$

est divisible par μ et l'on peut écrire :

$$\psi(F) - \varphi = \mu \varphi'_0 + \mu^2 \varphi'_1 + \mu^3 \varphi'_2 + \dots$$

On aura alors une autre intégrale de la forme suivante :

$$\varphi' = \varphi'_0 + \mu \varphi'_1 + \dots = \text{Const.}$$

qui pourra remplacer l'intégrale

$$\varphi = \text{Const.}$$

En général φ'_0 ne sera pas une fonction de F_0 ; s'il en était ainsi on opérerait sur φ' comme on a opéré sur φ et on finirait par arriver à une intégrale pour laquelle la relation (5) ne serait pas satisfaite identiquement.

Supposons donc que cette relation (5) ne soit pas identique et qu'on ait choisi des valeurs de x_1 et de x_2 pour lesquelles cette relation n'ait pas lieu.

Nous pourrions alors appliquer la formule de Lagrange et écrire :

$$x_1 = x_1^0 + \mu x_1' + \mu^2 x_1'' + \dots,$$

$$x_2 = x_2^0 + \mu x_2' + \mu^2 x_2'' + \dots,$$

les x_i^k étant des fonctions périodiques de y_1 et de y_2 dépendant en outre de C et de C_1 .

Alors

$x_1 dy_1 + x_2 dy_2$
sera une différentielle exacte, et nous pourrions poser :

$$S = \int (x_1 dy_1 + x_2 dy_2)$$

d'où

$$S = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \theta(y_1, y_2),$$

$\theta(y_1, y_2)$ étant une fonction périodique de y_1 et de y_2 dépendant en outre de C et de C_1 , pendant que x_1 et x_2 sont des fonctions dépendant seulement de C et de C_1 .

Cela posé, la solution la plus générale de nos équations différentielles s'écrira :

$$x_1 = x_1 + \frac{d\theta}{dy_1}, \quad x_2 = x_2 + \frac{d\theta}{dy_2},$$

$$C_1' = y_1 \frac{dx_1}{dC_1} + y_2 \frac{dx_2}{dC_1} + \frac{d\theta}{dC_1}, \quad C_1' + t = y_1 \frac{dx_1}{dC_1} + y_2 \frac{dx_2}{dC_1} + \frac{d\theta}{dC_1}$$

et contiendra quatre constantes arbitraires C, C_1, C_1' et $C_1' + t$.

Comment devra-t-on choisir ces constantes pour que cette solution soit périodique ?

Pour que la solution soit périodique, il faut et il suffit que le rapport de $\frac{dx_1}{dC_1}$ à $\frac{dx_2}{dC_1}$ soit commensurable et que l'on ait :

$$(6) \quad n_1 \frac{dx_1}{dC_1} + n_2 \frac{dx_2}{dC_1} = 0,$$

n_1 et n_2 étant deux entiers premiers entre eux. Alors quand y_1 augmentera de $2n_1\pi$ et y_2 de $2n_2\pi$, le terme non périodique

$$y_1 \frac{dx_1}{dC_1} + y_2 \frac{dx_2}{dC_1}$$

ne changera pas. La durée de la période sera d'ailleurs

$$2\pi \left(n_1 \frac{dx_1}{dC_1} + n_2 \frac{dx_2}{dC_1} \right)^{-1}.$$

Comme la condition de périodicité est exprimée