SUR LE

PROBLÈME DES TROIS CORPS

ET LES

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR

H. POINCARÉ
À PARIS.

Ex. B,

MÉMOIRE COURONNÉ
DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II
LE 21 JANVIER 1889.

AVEC DES NOTES
PAR L'AUTEUR.

Nunquam præscriptos transibunt sidera fines.

TABLE DES MATIÈRES.

Notes.

Introduction.

Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.

Le présent mémoire a été entrepris pour répondre à la première des quatre questions du concours; mais les résultats que j'ai obtenus sont tellement incomplets que j'aurais hésité à les publier si je ne savais que l'importance et la difficulté du problème donne de l'intérêt à tout ce qui s'y rapporte et qu'on ne peut attendre une solution définitive que d'une longue série d'efforts successifs.

Les immortels fondateurs de la mécanique céleste ont cherché à résoudre le problème des n corps par approximations successives. A cet effet, ils ont développé la solution suivant les puissances croissantes des masses et exprimé chaque terme du développement par une série de sinus et de cosinus. Leur succès montre suffisamment que cette méthode était la plus convenable pour les premières approximations.

Parmi les résultats qu'ils ont obtenus, un des plus remarqués est celui qui se rapporte à la stabilité du système solaire. LAPLACE et POISSON sont parvenus à démontrer qu'en tenant compte seulement des premières et des secondes puissances des masses, les grands axes des orbites ne subissent que des variations périodiques. On a cru longtemps que le fait était général et on en a même cherché une démonstration directe; c'était une erreur. Dès qu'on tient compte des troisièmes puissances des masses, on voit apparaître des termes séculaires dans le développement des grands axes.

Ainsi la méthode dont nous venons de parler devient insuffisante quand on veut pousser l'approximation un peu loin. Les séries auxquelles elle conduit contiennent non seulement des termes purement trigonométriques de la forme:

$$A \sin \alpha t \quad \text{ou} \quad B \cos \alpha t,$$

non seulement des termes mixtes de la forme:

$$At^m \sin \alpha t \quad \text{ou} \quad Bt^m \cos \alpha t,$$

mais des termes purement séculaires de la forme

$$At^m.$$

Rien ne permet donc d'affirmer que ces séries resteront convergentes pour de grandes valeurs de t.

Aussi les géomètres contemporains se sont ils efforcés de remplacer ces développements par d'autres séries ne contenant que des termes trigonométriques. Ils y sont enfin parvenus dans ces derniers temps et les séries de M. Gyldén comme celles de M. Lindstedt ne contiennent que des termes en

$$A \sin \alpha t \quad \text{ou} \quad B \cos \alpha t,$$

où non seulement A et B mais encore α sont développés suivant les puissances de m.

Tout n'est pas fini cependant. On peut se demander si les séries ainsi obtenues sont convergentes et comme la présence de »petits diviseurs» a pour effet de rendre certains termes très grands, on peut avoir des doutes sérieux au sujet de cette convergence. Le présent travail montrera que ces doutes sont fondés; toutes ces séries divergent; je dois réserver toutefois les séries proposées par M. Gyldén dans son dernier mémoire (Acta, t. 9); en ce qui les concerne je n'ai aucun moyen de reconnaître si elles sont convergentes ou divergentes.

Ainsi en cherchant à intégrer les équations différentielles du problème des trois corps par des séries trigonométriques, on est généralement conduit à des développements divergents, mais on sait qu'il existe pour les équations différentielles de tous les ordres des procédés d'intégration dont la convergence est certaine et on pourrait en attendre des résultats dans le cas qui nous occupe.

Cauchy a imaginé un procédé de calcul ingénieux qu'il a appelé, je ne sais pourquoi, »calcul des limites» (Comptes rendus, tome 14, p. 1020—1023) et par lequel il montre que les équations différentielles d'ordre quelconque, admettent une intégrale développable par la série de Taylor. Il y a exception en certains points nommés points singuliers.

Considérablement perfectionné par M. Weierstrass, le »calcul des limites» a fourni une importante moisson aux géomètres qui l'ont cultivé et en particulier à MM. Briot et Bouquet et M^me^ Kowalevski. C'est ainsi que les résultats de CAUCHY ont été étendus aux équations aux dérivées partielles.

Parmi ces résultats, je citerai le suivant: soit x une quantité définie en fonction de t par une équation différentielle du n^e ordre où entre un certain paramètre μ. Considérons la solution particulière qui est telle que x s'annule pour $t = 0$ ainsi que ses $n - 1$ premières dérivées. Cette solution pourra se développer suivant les puissances de t et de μ, pourvu que t et μ soient assez petits; mais il y a plus; cette solution pourra encore, pour une valeur particulière t_1 de t se développer suivant les puissances croissantes de μ seulement, pourvu que μ soit assez petit et quelque grand que soit t_1 à moins qu'on n'ait passé par quelque point singulier entre $t = 0$ et $t = t_1$.

Les séries ainsi obtenues sont toujours convergentes au moins dans une certaine étendue, mais il arrive en général que cette convergence n'a lieu que pour les petites valeurs de la variable. M. POINCARÉ par l'application des principes de CAUCHY, a trouvé des séries (Comptes rendus, 27 février 1882) qui restent convergentes pour toutes les valeurs du temps. Il ne faut pas croire pourtant le problème résolu; ces séries, procédant suivant les puissances de certaines variables, peuvent servir à démontrer l'existence de l'intégrale, ou même à calculer sa valeur numérique; mais la plupart du temps, elles ne nous en font pas connaître les propriétés. C'est ainsi qu'elles sont impuissantes, dans le cas de la mécanique céleste, à mettre en évidence la périodicité quand elle existe, ou à décider la question de la stabilité.

C'est à un ordre d'idées absolument différent que se rapportent d'autres mémoires de M. POINCARÉ auxquels nous ferons quelques emprunts (Journal de LIOUVILLE, 3^me^ série, tomes 7 et 8; 4^me^ série, tomes 1 et 2). Dans ces mémoires intitulés *Sur les courbes définies par les équations différentielles* il cherche à construire ces courbes et à déterminer dans le plan et dans l'espace une région limitée d'où elles ne pourront jamais sortir. Il y est parvenu pour certaines équations différentielles mais les équations de la dynamique ont semblé jusqu'ici rebelles à sa méthode.

Dans le présent travail, je ferai concourir à mon but les trois méthodes dont je viens de parler; aux anciennes méthodes de la mécanique céleste, j'emprunterai la forme trigonométrique des développements; au »calcul des limites» la démonstration de leur convergence; enfin c'est à la méthode géométrique de M. Poincaré que j'aurai recours pour démontrer la stabilité.

Malgré l'emploi simultané de ces trois méthodes, jointes à quelques principes nouveaux, j'ai dû me restreindre à un cas particulier. J'ai traité seulement des équations de la dynamique quand il n'y a (pour employer une expression usitée en Angleterre) que deux degrés de liberté (*degrees of freedom*). En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant:

Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Dans ce cas particulier, j'ai démontré rigoureusement la stabilité, non seulement en montrant que le rayon vecteur de la petite planète ne peut croître indéfiniment, mais en lui fixant sinon ses limites précises, au moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises.

Les démonstrations du calcul des limites ne s'appliquent pas en général aux séries trigonométriques de la mécanique céleste et ne permettent pas d'en démontrer la convergence.

L'obstacle qui s'y oppose est la présence d'une infinité de petits diviseurs. Mais il est un cas où ces petits diviseurs disparaissent, c'est celui où il n'y a plus qu'un seul argument, c'est à dire celui des *solutions périodiques* qui ont été rencontrées dans certains cas particuliers d'abord par M. Hill (American Journal, t. 1), puis par M. Poincaré (Bulletin astronomique, t. 1). On en trouvera dans la suite une théorie complète.

Pour pouvoir appliquer aux équations de la dynamique la méthode géométrique de M. Poincaré, j'ai dû introduire une notion nouvelle qui est celle des *invariants intégraux*. Elle m'a été fort utile et j'ai lieu de croire qu'elle pourra rendre des services dans d'autres problèmes.

Ces considérations générales qui m'étaient indispensables remplissent la première partie de ce travail. Je n'aborde le problème lui-même que dans la seconde partie où je n'ai plus qu'à appliquer les principes posés dans la première.

Première partie.

Généralités.

CHAPITRE I.

Notations et définitions.

Considérons un système d'équations différentielles:

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

où t représente la variable indépendante que nous appellerons le temps, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les fonctions inconnues, où enfin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous supposons en général que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont analytiques et uniformes pour toutes les valeurs réelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on savait intégrer les équations (1), on pourrait mettre le résultat de l'intégration sous deux formes différentes; on pourrait écrire:

$$(2)\qquad x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \ \ldots$$
$$x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ désignant les constantes d'intégration.

On pourrait écrire encore, en résolvant par rapport à ces constantes:

$$(3)\qquad \begin{aligned} C_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ C_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

Pour éviter toute confusion, nous dirons que les équations (2) représentent la *solution générale* des équations (1) si les constantes C y restent arbitraires et qu'elles représentent une *solution particulière* si on y donne aux C des valeurs numériques. Nous dirons d'autre part que dans les équations (3), $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont n *intégrales particulières* des équations (1). Le sens des mots *solution* et *intégrale* se trouve ainsi entièrement fixé.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière des équations (1) qui s'écrira:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t). \tag{4}$$

On peut se proposer d'étudier les solutions particulières de (1) qui diffèrent peu de la solution (4). Pour cela posons:

$$x_1 = \varphi_1 + \xi_1, \quad x_2 = \varphi_2 + \xi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n + \xi_n$$

et prenons pour nouvelles fonctions inconnues $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Si la solution que l'on veut étudier diffère peu de la solution (4), les ξ sont très petits et nous en pouvons négliger les carrés. Les équations (1) deviennent alors, en négligeant les puissances supérieures des ξ:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n. \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{5}$$

Dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ doivent être remplacées par $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, de sorte que ces dérivées peuvent être regardées comme des fonctions connues du temps.

Les équations (5) s'appelleront les *équations aux variations* des équations (1). On voit que les équations aux variations sont linéaires.

Les équations (1) sont dites *canoniques* lorsque les variables x sont en nombre pair $n = 2p$, se répartissant en deux séries

$$x_1, x_2, \ldots, x_p,$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_p,$$

et que les équations (1) peuvent s'écrire:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

Elles ont alors la forme des équations de la dynamique et nous dirons, à l'exemple des Anglais, que le système d'équations (6) comporte p *degrés de liberté.*

On sait que ce système (6) admet une intégrale dite des forces vives:

$$F = \text{const.}$$

et que si l'on en connaît $p - 1$ autres, on peut considérer les équations canoniques comme complètement intégrées.

Considérons en particulier le cas de $n = 3$; nous pourrons alors regarder x_1, x_2 et x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. Les équations:

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = X_3$$

définissent alors la vitesse de ce point P en fonction de ses coordonnées. Considérons une solution particulière des équations (1)

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t).$$

Lorsque nous ferons varier le temps t, le point P décrira une certaine courbe dans l'espace; nous l'appellerons une *trajectoire.* A chaque solution particulière des équations (1) correspond donc une trajectoire et réciproquement.

Si les fonctions X_1, X_2 et X_3 sont uniformes, par chaque point de l'espace passe une trajectoire et une seule. Il n'y a d'exception que si l'une de ces trois fonctions devient infinie ou si elles s'annulent toutes les trois. Les points où ces cas d'exception se présenteraient s'appelleraient *points singuliers.*

Considérons une courbe gauche quelconque. Par chacun des points de cette courbe passe une trajectoire; l'ensemble de ces trajectoires constitue une surface que j'appellerai *surface-trajectoire.*

Comme deux trajectoires ne peuvent se couper sinon en un point singulier, une surface-trajectoire qui ne passe en aucun point singulier ne peut être coupée par aucune trajectoire.

Nous aurons fréquemment dans la suite à nous occuper de la question de la stabilité. Il y aura *stabilité,* si les trois quantités x_1, x_2, x_3 restent inférieures à certaines limites quand le temps t varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; ou en d'autres termes, si le trajectoire du point P reste tout entière dans une région limitée de l'espace.

Supposons qu'il existe une surface-trajectoire fermée S; cette surface partagera l'espace en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure, et aucune trajectoire ne pourra passer d'une de ces régions dans l'autre. Si donc la position initiale du point P est dans la région intérieure, ce point y restera éternellement; sa trajectoire sera toute entière à l'intérieur de S. Il y aura donc stabilité.

Ainsi la question de stabilité se ramène à la recherche des surfaces trajectoires fermées.

On peut varier ce mode de représentation géométrique; supposons par exemple que l'on pose:

$$x_1 = \psi_1(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_2 = \psi_2(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_3 = \psi_3(z_1, z_2, z_3),$$

les ψ étant des fonctions de z qui sont uniformes pour toutes les valeurs réelles des z. Nous pourrons considérer non plus x_1, x_2, x_3, mais z_1, z_2, z_3 comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Quand on connaîtra la position de ce point, on connaîtra z_1, z_2, z_3 et par conséquent x_1, x_2, x_3. Tout ce que nous avons dit plus haut reste exact.

Il suffit même que les trois fonctions ψ restent uniformes dans un certain domaine, pourvu qu'on ne sorte pas de ce domaine.

Si $n > 3$, ce mode de représentation ne peut plus être employé en général, à moins qu'on ne se résigne à envisager l'espace à plus de trois dimensions. Il est pourtant un cas où la difficulté peut être tournée.

Supposons par exemple que $n = 4$ et qu'on connaisse une des intégrales des équations (1). Soit:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = C \tag{7}$$

cette intégrale. Nous regarderons la constante d'intégration C comme une donnée de la question. Nous pourrons alors tirer de l'équation (7) une des quatre quantités x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction des trois autres, ou bien encore trouver trois variables auxiliaires z_1, z_2, z_3 telles qu'en faisant:

$$x_1 = \phi_1(z_1, z_2, z_3), \qquad x_3 = \phi_3(z_1, z_2, z_3),$$

$$x_2 = \phi_2(z_1, z_2, z_3), \qquad x_4 = \phi_4(z_1, z_2, z_3),$$

on satisfasse à l'équation (7) quelles que soient les valeurs de z_1, z_2, z_3. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir ces variables auxiliaires z de façon que les quatre fonctions ϕ soient uniformes, sinon pour toutes les valeurs réelles des z, au moins dans un domaine d'où on n'aura pas à sortir.

On pourra alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées dans l'espace seront z_1, z_2 et z_3.

Supposons par exemple que l'on ait des équations canoniques avec deux degrés de liberté:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2},$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

Nous aurons quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2, mais ces variables seront liées par l'équation des forces vives:

$$F = C,$$

de sorte que si nous regardons la constante des forces vives C comme connue, il n'y aura plus que trois variables indépendantes et que la représentation géométrique sera possible.

Nous distinguerons parmi les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les variables *linéaires* et les variables *angulaires*. Il pourra arriver que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient toutes périodiques par rapport à l'une des variables x_i et ne changent pas quand cette variable augmente de 2π. La variable x_i et celles qui jouissent de la même propriété seront alors *angulaires;* les autres seront *linéaires.*

Je dirai que la situation du système n'a pas changé si toutes les variables angulaires ont augmenté d'un multiple de 2π et si toutes les variables linéaires ont repris leurs valeurs primitives.

Nous adopterons alors un mode de représentation tel que le point représentatif P revienne au même point de l'espace quand une on plusieurs des variables angulaires aura augmenté de 2π. Nous en verrons des exemples dans la suite.

Parmi les solutions particulières des équations (1), nous distinguerons les *solutions périodiques*. Soit

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

une solution particulière des équations (1). Supposons qu'il existe une quantité h telle que:

$$\varphi_i(t + h) = \varphi_i(t)$$

quand x_i est une variable linéaire et:

$$\varphi_i(t + h) = \varphi_i(t) + 2k\pi, \qquad (k \text{ étant entier})$$

quand x_i est une variable angulaire. Nous dirons alors que la solution considérée est *périodique* et que h est la période.

Si l'on adopte un mode de représentation géométrique tel que le point représentatif reste le même quand une des variables angulaires augmente de 2π, toute solution périodique sera représentée par une trajectoire fermée.

CHAPITRE II.

Théorie des invariants intégraux.

§ 1. *Propriétés diverses des équations de la dynamique.*

Soit F une fonction d'une double série de variables:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

et du temps t.

Supposons que l'on ait les équations différentielles:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Considérons deux solutions infiniment voisines de ces équations:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots y_n,$$

$$x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots, x_n + \xi_n, y_1 + \eta_1, y_2 + \eta_2, \ldots, y_n + \eta_n,$$

les ξ et les η étant assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés.

Les ξ et les η satisferont alors aux équations différentielles linéaires

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k, \end{aligned}$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Soit ξ'_i, η'_i une autre solution de ces équations linéaires de sorte que:

$$(2') \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi'_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi'_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta'_k, \\ \frac{d\eta'_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi'_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta'_k. \end{aligned}$$

Multiplions les équations (2) et (2') respectivement par $\eta'_i, -\xi'_i, -\eta_i, \xi_i$ et faisons la somme de toutes ces équations, il viendra:

$$\sum_i \left(\eta'_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi'_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi'_i}{dt} + \xi_i \frac{d\eta'_i}{dt}\right) =$$

$$\sum_i \sum_k \left(\xi_k \eta'_i \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_k \eta'_i \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \xi_k \xi'_i \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \eta_k \xi'_i \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\right)$$

$$-\sum_i \sum_k \left(\eta_i \xi'_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_i \eta'_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \xi_i \xi'_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \xi_i \eta'_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\right)$$

ou

$$\sum \frac{d}{dt}[\eta'_i \xi_i - \xi'_i \eta_i] = 0$$

ou enfin

$$(3) \qquad \eta'_1 \xi_1 - \xi'_1 \eta_1 + \eta'_2 \xi_2 - \xi'_2 \eta_2 + \ldots + \eta'_n \xi_n - \xi'_n \eta_n = \text{constante}.$$

Voilà une relation qui lie entre elles deux solutions quelconques des équations linéaires (2).

Il est aisé de trouver d'autres relations analogues.

Considérons quatre solutions des équations (2)

$$\xi_i , \xi_i' , \xi_i'' , \xi_i''' ,$$
$$\eta_i , \eta_i' , \eta_i'' , \eta_i''' .$$

Considérons ensuite la somme des déterminants:

$$\sum_i \sum_k \begin{vmatrix} \xi_i & \xi_i' & \xi_i'' & \xi_i''' \\ \eta_i & \eta_i' & \eta_i'' & \eta_i''' \\ \xi_k & \xi_k' & \xi_k'' & \xi_k''' \\ \eta_k & \eta_k' & \eta_k'' & \eta_k''' \end{vmatrix} ,$$

où les indices i et k varient depuis 1 jusqu'à n. On vérifierait sans peine que cette somme est encore une constante.

Plus généralement si l'on forme à l'aide de $2p$ solutions des équations (2) la somme de déterminants:

$$\sum_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} | \xi_{\alpha_1} \eta_{\alpha_1} \xi_{\alpha_2} \eta_{\alpha_2} \ldots \xi_{\alpha_p} \eta_{\alpha_p} | ,$$
$$(\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_p = 1 , 2 , \ldots , n)$$

cette somme sera une constante.

En particulier, le déterminant formé par les valeurs des $2n$ quantités ξ et η dans $2n$ solutions des équations (2) sera une constante.

Ces considérations permettent de trouver une solution des équations (2) quand on en connaît une intégrale et réciproquement.

Supposons en effet que

$$\xi_i = \alpha_i , \qquad \eta_i = \beta_i$$

soit une solution particulière des équations (2) et désignons par ξ_i et η_i une solution quelconque de ces mêmes équations. On devra avoir:

$$\Sigma \xi_i \beta_i - \eta_i \alpha_i = \text{const.}$$

ce qui sera une intégrale des équations (2).

Réciproquement soit

$$\Sigma A_i \xi_i + \Sigma B_i \eta_i = \text{const.}$$

une intégrale des équations (2), on devra avoir:

$$\sum_i \frac{dA_i}{dt}\xi_i + \sum_i \frac{dB_i}{dt}\eta_i + \sum_i A_i\Big[\sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k\Big]$$
$$-\sum_i B_i\Big[\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k\Big] = 0,$$

d'où en identifiant

$$\frac{dA_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F}{dy_k dx_i}A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_k dx_i}B_k,$$
$$\frac{dB_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F}{dy_k dy_i}A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_k dy_i}B_k,$$

ce qui montre que:

$$\xi_i = B_i, \qquad \eta_i = -A_i$$

est une solution particulière des équations (2).

Si maintenant:

$$\Phi(x_i, y_i, t) = \text{const.}$$

est une intégrale des équations (1),

$$\sum \frac{d\Phi}{dx_i}\xi_i + \sum \frac{d\Phi}{dy_i}\eta_i = \text{const.}$$

sera une intégrale des équations (2), et par conséquent:

$$\xi_i = \frac{d\Phi}{dy_i}, \qquad \eta_i = -\frac{d\Phi}{dx_i}$$

sera une solution particulière de ces équations.

Si $\Phi = \text{const.}$, $\Phi_1 = \text{const.}$ sont deux intégrales des équations (1), on aura

$$\sum \left(\frac{d\Phi}{dx_i}\frac{d\Phi_1}{dy_i} - \frac{d\Phi}{dy_i}\frac{d\Phi_1}{dx_i}\right) = \text{const.}$$

C'est le théorème de Poisson.

Considérons le cas particulier où les x désignent les coordonnées rectangulaires de n points dans l'espace; nous les désignerons par la notation à double indice:

$$x_{1i}, x_{2i}, x_{3i},$$

le premier indice se rapportant aux trois axes rectangulaires de coordonnées et le second indice aux n points matériels. Soit m_i la masse du i^e point matériel. On aura alors:

$$m_i \frac{d^2 x_{ki}}{dt^2} = \frac{dV}{dx_{ki}},$$

V étant la fonction des forces.

On aura alors pour l'équation des forces vives:

$$F = \sum \frac{m_i}{2} \left(\frac{dx_{ki}}{dt} \right)^2 - V = \text{const.}$$

Posons ensuite:

$$y_{ki} = m_i \frac{dx_{ki}}{dt},$$

d'où

$$(3) \qquad F = \sum \frac{y_{ki}^2}{2m_i} - V = \text{const.}$$

et

$$(1') \qquad \frac{dx_{ki}}{dt} = \frac{dF}{dy_{ki}}, \qquad \frac{dy_{ki}}{dt} = -\frac{dF}{dx_{ki}}.$$

Soit:

$$(4) \qquad x_{ki} = \varphi_{ki}(t), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t)$$

une solution de ces équations (1'), une autre solution sera:

$$x_{ki} = \varphi_{ki}(t + h), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t + h),$$

h étant une constante quelconque.

En regardant h comme infiniment petit, on obtiendra une solution des équations (2') qui correspondent à (1') comme les équations (2) correspondent à (1):

$$\xi_{ki} = h\varphi'_{ki}(t) = h\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = hm_i\varphi''_{ki}(t) = h\frac{dV}{dx_{ki}},$$

h désignant un facteur constant très petit que l'on peut supprimer quand on ne considère que les équations linéaires (2').

Connaissant une solution:

$$\xi = \frac{y}{m}, \qquad \eta = \frac{dV}{dx}$$

de ces équations, on peut déduire une intégrale:

$$\sum \frac{y\eta}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi = \text{const.}$$

Mais cette même intégrale s'obtient très aisément en différentiant l'équation des forces vives (3).

Si les points matériels sont soustraits à toute action extérieure, on peut déduire de la solution (4) une autre solution:

$$\begin{aligned} x_{1i} &= \varphi_{1i}(t) + h + kt, & y_{1i} &= m_i\varphi'_{1i}(t) + m_i k, \\ x_{2i} &= \varphi_{2i}(t), & y_{2i} &= m_i\varphi'_{2i}(t), \\ x_{3i} &= \varphi_{3i}(t), & y_{3i} &= m_i\varphi'_{3i}(t), \end{aligned}$$

h et k étant des constantes quelconques. En regardant ces constantes comme infiniment petites, on obtient deux solutions des équations (2')

$$\xi_{1i} = 1, \qquad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{1i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0,$$

$$\xi_{1i} = t, \qquad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0, \qquad \eta_{1i} = m_i.$$

On obtient ainsi deux intégrales de (2')

$$\Sigma_i \eta_{1i} = \text{const.},$$

$$\Sigma \eta_{1i} t - \Sigma m_i \xi_{1i} = \text{const.}$$

On peut obtenir ces intégrales en différentiant les équations du mouvement du centre de gravité:

$$\Sigma m_i x_{1i} = t\Sigma y_{1i} + \text{const.},$$

$$\Sigma y_{1i} = \text{const.}$$

Si l'on fait tourner la solution (4) d'un angle ω autour de l'axe des z, on obtient une autre solution:

$$x_{1i} = \varphi_{1i}\cos\omega - \varphi_{2i}\sin\omega, \qquad \frac{y_{1i}}{m_i} = \varphi'_{1i}\cos\omega - \varphi'_{2i}\sin\omega,$$

$$x_{2i} = \varphi_{1i}\sin\omega + \varphi_{2i}\cos\omega, \qquad \frac{y_{2i}}{m_i} = \varphi'_{1i}\sin\omega + \varphi'_{2i}\cos\omega,$$

$$x_{3i} = \varphi_{3i}, \qquad \frac{y_{3i}}{m_i} = \varphi'_{3i}.$$

En regardant ω comme infiniment petit, on trouve comme solution de (2')

$$\begin{aligned} \xi_{1i} &= -x_{2i}, & \eta_{1i} &= -y_{2i}, \\ \xi_{2i} &= x_{1i}, & \eta_{2i} &= y_{1i}, \\ \xi_{3i} &= 0, & \eta_{3i} &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'intégrale de (2')

$$\sum_i(x_{1i}\eta_{2i} - y_{1i}\xi_{2i} - x_{2i}\eta_{1i} + y_{2i}\xi_{1i}) = \text{const.}$$

que l'on pouvait obtenir aussi en différentiant l'intégrale des aires de (1')

$$\sum(x_{1i}y_{2i} - x_{2i}y_{1i}) = \text{const.}$$

Supposons maintenant que la fonction V soit homogène et de degré -1 par rapport aux x ce qui est le cas de la nature.

Les équations (1') ne changeront pas quand on multipliera t par λ^3, les x par λ^2 et les y par λ^{-1}, λ étant une constante quelconque. De la solution (4) on déduira donc la solution suivante:

$$x_{ki} = \lambda^2\varphi_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right), \qquad y_{ki} = \lambda^{-1}m_i\varphi'_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right).$$

Si l'on regarde λ comme très voisin de l'unité, on obtiendra comme solution des équations (2')

$$\xi_{ki} = 2\varphi_{ki} - 3t\varphi'_{ki}, \qquad \eta_{ki} = -m_i\varphi'_{ki} - 3m_it\varphi''_{ki},$$

ou

$$\xi_{ki} = 2x_{ki} - 3t\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = -y_{ki} - 3t\frac{dV}{dx_{ki}}, \tag{5}$$

d'où l'intégrale suivante des équations (2'), laquelle, à la différence de celles que nous avons envisagées jusqu'ici, ne peut être obtenue en différentiant une intégrale connue des équations (1'):

$$\Sigma(2x_{ki}\eta_{ki} + y_{ki}\xi_{ki}) = 3t\left[\sum\left(\frac{y_{ki}\eta_{ki}}{m_i} - \frac{dV}{dx_{ki}}\xi_{ki}\right)\right] + \text{const.}$$

§ 2. *Définition des invariants intégraux.*[1]

Considérons un système d'équations différentielles:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i,$$

X_i étant une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on a:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.},$$

cette relation s'appelle une intégrale des équations données. Le premier membre de cette relation peut s'appeler un invariant puisqu'il n'est pas altéré quand on augmente les x_i d'accroissements infiniment petits dx_i compatibles avec les équations différentielles.

Soit maintenant

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$$

une autre solution des mêmes équations différentielles, de telle façon que l'on ait:

$$\frac{dx'_i}{dt} = X'_i,$$

X'_i étant une fonction formée avec $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ comme X_i l'était avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il pourra se faire qu'on ait entre les $2n$ quantités x et x', une relation:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \text{const.}$$

Le premier membre F_1 pourra encore s'appeler un invariant de nos équations différentielles, mais au lieu de dépendre d'une seule solution de ces équations, il dépendra de deux solutions.

---

[1] Voir *Note C.*

On peut supposer que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représentent les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions et que les équations différentielles données définissent la loi du mouvement de ce point. Si l'on considère deux solutions de ces équations, on aura deux points mobiles différents, se mouvant d'après une même loi définie par nos équations différentielles. L'invariant F_1 sera alors une fonction des coordonnées de ces deux points, qui dans le mouvement de ces deux points conservera sa valeur initiale.

On pourrait évidemment de même, au lieu de deux points mobiles, en envisager trois ou même un plus grand nombre.

Supposons maintenant que l'on considère une infinité de points mobiles et que les positions initiales de ces points forment un certain arc de courbe C dans l'espace à n dimensions.

Quand on se donne la position initiale d'un point mobile et les équations différentielles qui définissent la loi de son mouvement, la position du point à un instant quelconque se trouve entièrement déterminé.

Si donc nous savons que nos points mobiles, en nombre infini, forment à l'origine des temps un arc C, nous connaîtrons leurs positions à un instant t quelconque et nous verrons que les points mobiles à l'instant t forment dans l'espace à n dimensions un nouvel arc de courbe C'. Nous sommes donc en présence d'un arc de courbe qui se déplace en se déformant, parce que ses différents points se meuvent conformément à la loi définie par les équations différentielles données.

Supposons maintenant que dans ce déplacement et cette déformation l'intégrale suivante:

$$\int (Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + \ldots + Y_n dx_n) = \int \Sigma Y_i dx_i$$

(où les Y sont des fonctions données des x et qui est étendue à tout l'arc de courbe) ne change pas de valeur. Cette intégrale sera encore pour nos équations différentielles un invariant, dépendant non plus d'un, de deux ou de trois, mais d'une infinité de points mobiles. Pour indiquer quelle en est la forme, je l'appellerai un invariant intégral.

De même on pourrait imaginer qu'une intégrale de la forme:

$$\int \sqrt{\Sigma Y_{ik} dx_i dx_k},$$

étendue à tout l'arc de courbe, demeure invariable; ce serait encore un invariant intégral.

On peut imaginer également des invariants intégraux qui soient definis par des intégrales doubles ou multiples.

Imaginons qu'on considère un fluide en mouvement permanent et de telle sorte que les trois composantes X, Y, Z de la vitesse d'une molécule quelconque soient des fonctions données des trois coordonnées x, y, z de cette molécule. Alors on pourra dire que la loi du mouvement d'une quelconque des molécules du fluide est définie par les équations différentielles:

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \qquad \frac{dz}{dt} = Z.$$

On sait que l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

exprime que le fluide est incompressible. Supposons donc que les fonctions X, Y, Z satisfassent à cette équation et considérons un ensemble de molécules occupant à l'origine des temps un certain volume. Les molécules se déplaceront, mais, en vertu de l'incompressibilité du fluide, le volume qu'elles occuperont demeurera invariable. En d'autres termes le volume, c'est à dire l'intégrale triple:

$$\iiint dx\,dy\,dz$$

sera un invariant intégral. Plus généralement si l'on envisage les équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et que l'on ait la relation:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dX_i}{dx_i} = 0,$$

l'intégrale d'ordre n

$$\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

que je continuerai à appeler le volume, sera un invariant intégral.

C'est ce qui arrivera en particulier pour les équations générales de la dynamique; car si l'on considère ces équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

il est aisé de voir que

$$\sum \frac{d\left(\frac{dF}{dy_i}\right)}{dx_i} + \sum \frac{d\left(-\frac{dF}{dx_i}\right)}{dy_i} = 0.$$

Mais en ce qui concerne ces équations générales de la dynamique, il y a outre le volume, un autre invariant intégral qui nous sera encore plus utile. Nous avons vu en effet que:

$$\Sigma(\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) = \text{const.}$$

Cela traduit dans notre nouveau langage signifie que l'intégrale double

$$\iint \Sigma_i dx_i dy_i$$

est un invariant intégral.

Pour exprimer ce résultat d'une autre manière, prenons le cas du problème des n corps.

Nous représenterons la situation du système des n corps par la position de $3n$ points dans un plan. Le premier point aura pour abscisse l'x du premier corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des x de la quantité de mouvement de ce corps; le second point aura pour abscisse l'y de ce même corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des y de sa quantité de mouvement et ainsi de suite.

Imaginons une double infinité de situations initiales du système. A chacune d'elles correspond une position de nos $3n$ points et si l'on considère l'ensemble de ces situations, on verra que ces $3n$ points remplissent $3n$ aires planes.

Si maintenant le système se déplace conformément à la loi de l'attraction, les $3n$ points qui représentent sa situation vont aussi se déplacer; les $3n$ aires planes que je viens de définir vont donc se déformer, mais *leur somme demeurera constante.*

Le théorème sur la conservation du volume n'est qu'une conséquence de celui qui précède.

Il y a dans le cas du problème des n corps, un autre invariant intégral sur lequel je veux attirer l'attention.

Considérons une simple infinité de positions initiales du système formant un arc de courbe dans l'espace à $6n$ dimensions. Soient C_0 et C_1 les valeurs de la constante des forces vives aux deux extrémités de cet arc. L'expression

$$\int \Sigma(2x_i dy_i + y_i dx_i) + 3(C_1 - C_0)t$$

(où l'intégrale est étendue à l'arc de courbe tout entier et où le temps n'entre plus si $C_1 = C_0$) est encore un invariant intégral; on peut d'ailleurs en déduire aisément les autres invariants intégraux dont il a été question plus haut.

Nous dirons qu'un invariant intégral est du 1er ordre, du 2d ordre, ... ou du n^e ordre selon qu'il sera une intégrale simple, double, ... ou d'ordre n.

Parmi les invariants intégraux nous distinguerons les *invariants positifs* que nous définirons comme il suit.

L'invariant intégral d'ordre n

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

sera un invariant positif dans un certain domaine, si M est une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui reste positive, finie et uniforme dans ce domaine.

§ 3. *Transformation des invariants intégraux.*

Reprenons nos équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

et supposons que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{d(MX_1)}{dx_1} + \frac{d(MX_2)}{dx_2} + \ldots + \frac{d(MX_n)}{dx_n} = 0,$$

de telle sorte que l'intégrale d'ordre n

$$J = \int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

soit un invariant intégral.

Changeons de variables en posant:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \psi_1(z_1, z_2, \dots, z_n), \\ x_2 &= \psi_2(z_1, z_2, \dots, z_n), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \psi_n(z_1, z_2, \dots, z_n), \end{aligned}$$

et appelons Δ le déterminant fonctionnel des n fonctions ψ par rapport aux n variables z.

Nous aurons après le changement de variables:

$$J = \int M \Delta dz_1 dz_2 \dots dz_n.$$

Si l'invariant J était positif avant le changement de variables, il restera positif après ce changement, pourvu que Δ soit toujours positif, fini et uniforme.

Comme en permutant deux des variables z, on change le signe de Δ, il nous suffira de supposer que Δ est toujours de même signe ou qu'il ne s'annule jamais. Il devra de plus être toujours fini et uniforme. Cela arrivera si le changement de variables (3) est doublement univoque, c'est à dire si dans le domaine considéré les x sont fonctions uniformes des z et les z fonctions uniformes des x.

Ainsi après un changement de variables doublement univoque, les invariants positifs restent positifs.

Voici un cas particulier intéressant:

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C.$$

Prenons pour variables nouvelles $z_n = C$ d'une part et d'autre part $n - 1$ autres variables $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ de telle sorte que ce changement de variables soit doublement univoque dans le domaine considéré.

Après le changement de variables, les équations (1) deviendront:

$$(4)\quad \frac{dz_1}{dt} = Z_1, \quad \frac{dz_2}{dt} = Z_2, \quad \dots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dt} = Z_{n-1}, \quad \frac{dz_n}{dt} = Z_n = 0,$$

$Z_1, Z_2, \dots, Z_{n-1}$ étant des fonctions connues de $z_1, z_2, \dots, z_n$. Si l'on regarde la constante $C = z_n$ comme une donnée de la question, les équations sont réduites à l'ordre $n - 1$ et s'écrivent:

$$(4')\quad \frac{dz_1}{dt} = Z_1, \quad \dots, \quad \frac{dz_{n-1}}{dt} = Z_{n-1},$$

les fonctions Z ne dépendant plus que de $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ puisque z_n y a été remplacé par sa valeur numérique.

Si les équations (1) admettent un invariant positif

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

les équations (4) admettront également un invariant positif:

$$J = \int \mu dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1} dz_n.$$

Je dis maintenant que les équations (4') qui sont d'ordre $n - 1$ admettent également un invariant intégral positif qui devra être d'ordre $n - 1$.

En effet, dire que J est un invariant intégral c'est dire que

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1} + \frac{d(\mu Z_2)}{dz_2} + \dots + \frac{d(\mu Z_n)}{dz_n} = 0$$

ou puisque Z_n est nul,

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1} + \frac{d(\mu Z_2)}{dz_2} + \dots + \frac{d(\mu Z_{n-1})}{dz_{n-1}} = 0,$$

ce qui prouve que l'intégrale d'ordre $n - 1$

$$\int \mu dz_1 dz_2 \dots dz_{n-1}$$

est un invariant pour les équations (4').

Jusqu'ici nous avons fait porter les changements de variables sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$, mais nous avons conservé le temps

t qui est notre variable indépendante. Nous allons supposer maintenant que l'on pose:

$$t = \varphi(t_1)$$

et que nous prenions t_1 comme nouvelle variable indépendante.

Les équations (1) deviennent alors:

$$\frac{dx_i}{dt_1} = X_i' = X_i \frac{d\varphi}{dt_1} = X_i \frac{dt}{dt_1}. \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{5}$$

Si les équations (1) ont un invariant intégral d'ordre n

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

on devra avoir

$$\sum \frac{d}{dx_i}(MX_i) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\sum \frac{d}{dx_i}\left(M \frac{dt_1}{dt} X_i'\right) = 0.$$

Cela montre que

$$\int M \frac{dt_1}{dt} dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

est un invariant intégral pour les équations (5).

Pour que cette transformation puisse être utile, il faut que t et t_1 soient liés de telle sorte que $\frac{dt_1}{dt}$ puisse être regardé comme une fonction connue, finie, continue et uniforme de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Supposons par exemple que nous prenions pour nouvelle variable indépendante:

$$x_n = t_1.$$

Il vient alors

$$\frac{dt_1}{dt} = X_n$$

et les équations (5) s'écrivent

$$\frac{dx_1}{dt_1} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dt_1} = \frac{X_2}{X_n}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt_1} = \frac{X_{n-1}}{X_n}, \quad \frac{dx_n}{dt_1} = 1,$$

et elles admettent comme invariant intégral:

$$\int M X_n dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

De même si nous prenons pour nouvelle variable indépendante:

$$t_1 = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

θ étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le nouvel invariant intégral s'écrira:

$$\int M\left(\frac{d\theta}{dx_1}X_1 + \frac{d\theta}{dx_2}X_2 + \ldots + \frac{d\theta}{dx_n}X_n\right)dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Il est à remarquer que la forme et la signification d'un invariant intégral est beaucoup plus profondément modifiée quand on change la variable indépendante appelée temps que quand le changement de variables porte seulement sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, car alors les lois du mouvement du point représentatif P se trouvent complètement transformées.

Supposons $n = 3$ et regardons x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. L'équation:

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

représentera une surface. Considérons une portion quelconque de cette surface et appelons S cette portion de surface.

Je supposerai qu'en tous les points de S on a

$$\frac{d\theta}{dx_1}X_1 + \frac{d\theta}{dx_2}X_2 + \frac{d\theta}{dx_3}X_3 \lesseqgtr 0.$$

Il en résulte que la portion de surface S n'est tangente à aucune trajectoire. Je dirai alors que S est une surface sans contact.

Soit P_0 un point de S; par ce point passe une trajectoire. Si cette trajectoire prolongée vient recouper S en un point P_1, je dirai que P_1 est le *conséquent* de P_0. A son tour P_1 peut avoir un conséquent P_2 que j'appellerai le *second conséquent* de P_0 et ainsi de suite.

Si on considère une courbe C tracée sur S, les n^{es} conséquents des divers points de cette courbe formeront une autre courbe C' que j'appellerai la n^e *conséquente* de C. On définirait de la même façon l'aire qui est n^e conséquente d'une aire donnée faisant partie de S.

Je ne m'occuperai que du cas où θ n'est pas une fonction uniforme de x_1, x_2 et x_3, mais une fonction susceptible d'une infinité de valeurs dont la différence est un multiple de 2π. Je prendrai par exemple:

$$\theta = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x_1}{x_2}.$$

Cela posé, soit une portion de surface sans contact S ayant pour équation $\theta = 0$; soit C une courbe fermée tracée sur cette surface et limitant une aire A; soient C' et A' les premières conséquentes, C^n et A^n les n^{es} conséquentes de C et de A.

Par chacun des points de C passe une trajectoire que je prolonge depuis sa rencontre avec C jusqu'à sa rencontre avec C'. L'ensemble de ces trajectoires formera une surface trajectoire T.

Je considère le volume V limité par la surface trajectoire T et par les deux aires A et A'. Supposons qu'il y ait un invariant positif

$$J = \int M dx_1 dx_2 dx_3.$$

J'étends cet invariant au volume V et j'écris que $\frac{dJ}{dt}$ est nul.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S. Menons la normale à cet élément, prenons sur cette normale une longueur infiniment petite dn. Soit $\theta + \frac{d\theta}{dn} dn$ la valeur de θ à l'extrémité de cette longueur. Si l'on a mené la normale dans le sens des θ croissants, on aura

$$\frac{d\theta}{dn} > 0.$$

Posons:

$$\frac{\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\theta}{dx_3} X_3}{\frac{d\theta}{dn}} = H,$$

on aura alors

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{A'} MH d\omega - \int_{A} MH d\omega,$$

la première intégrale étant étendue à l'aire A' et la seconde à l'aire A.

L'intégrale

$$\int MH d\omega$$

conserve la même valeur qu'on l'étende à l'aire A, ou à A', ou par conséquent à A''. C'est donc un invariant intégral d'une nature particulière qui conserve la même valeur pour une aire quelconque ou pour l'une de ses conséquentes.

Cet invariant est d'ailleurs positif, car par hypothèse, M, H et par conséquent MH sont positifs.

§ 4. *Usage des invariants intégraux.*

Ce qui fait l'intérêt des invariants intégraux, ce sont les théorèmes suivants dont nous ferons un fréquent usage.

Nous avons défini plus haut la stabilité en disant que le point mobile P doit rester à distance finie; on l'entend quelquefois dans un autre sens. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale.

Je dis que s'il y a un invariant positif, la stabilité dans le premier sens du mot entraîne la stabilité dans le second sens du mot, non pas pour toutes les trajectoires, mais pour une infinité d'entre elles. Je pourrais même ajouter que les trajectoires qui jouissent de cette propriété sont plus générales que celles qui n'en jouissent pas, précisément autant que les nombres incommensurables sont plus généraux que les nombres commensurables.

Supposons $n = 3$ et imaginons que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point P dans l'espace.

Théorème I. Supposons que le point P reste à distance finie, et que le volume $\int dx_1 dx_2 dx_3$ soit un invariant intégral; si l'on considère une région r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

En effet le point P restant à distance finie, ne sortira jamais d'une région limitée R. J'appelle V le volume de cette région R.

Imaginons maintenant une région très petite r_0, j'appelle v le volume de cette région. Par chacun des points de r_0 passe une trajectoire que l'on peut regarder comme parcourue par un point mobile suivant la loi définie par nos équations différentielles. Considérons donc une infinité de points mobiles remplissant au temps o la région r_0 et se mouvant ensuite conformément à cette loi. Au temps τ ils rempliront une certaine région r_1, au temps 2τ une région r_2, etc. au temps $n\tau$ une région r_n.

Le volume étant un invariant intégral, ces diverses régions $r_0, r_1, \ldots, r_n$ auront même volume v. Si ces régions n'avaient aucun point commun, le volume total serait plus grand que nv; mais d'autre part toutes ces régions sont intérieures à R, le volume total est donc plus petit que V. Si donc on a:

$$n > \frac{V}{v},$$

il faut que deux au moins de nos régions aient une partie commune. Soient r_p et r_q ces deux régions ($q > p$). Si r_p et r_q ont une partie commune, il est clair que r_0 et r_{q-p} devront avoir une partie commune.

Plus généralement, si on ne pouvait trouver k régions ayant une partie commune, aucun point de l'espace ne pourrait appartenir à plus de $k - 1$ des régions $r_0, r_1, \ldots r_n$. Le volume total occupé par ces régions serait donc plus grand que $\frac{nv}{k-1}$. Si donc on a

$$n > (k - 1)\frac{V}{v},$$

il faut que l'on puisse trouver k régions ayant une partie commune. Soient:

$$r_{p_1}, r_{p_2}, \ldots, r_{p_k}$$

ces régions. Alors

$$r_0, r_{p_2-p_1}, r_{p_3-p_1}, \ldots, r_{p_k-p_1}$$

auront aussi une partie commune.

Mais reprenons la question à un autre point de vue. Pour employer la même nomenclature que dans le paragraphe précédent nous dirons que la région r_n est la n^e conséquente de r_0 et que r_0 est la n^e antécédente de r_n.

Supposons alors que r_p soit la première des conséquentes successives de r_0 qui ait une partie commune avec r_0. Soit r_0' cette partie commune; soit s_0' la p^e antécédente de r_0' qui fera aussi partie de r_0 puisque sa p^e conséquente fait partie de r_p.

Soit ensuite r'_{p_1} la première des conséquentes de r_0' qui ait une partie commune avec r_0'; soit r_0'' cette partie commune; sa p_1^e antécédente fera partie de r_0' et par conséquent de r_0, et sa $p + p_1^e$ antécédente que j'appellerai s_0'' fera partie de s_0' et par conséquent de r_0.

Ainsi s_0'' fera partie de r_0 ainsi que ses p^e et $p + p_1^{es}$ conséquentes. Et ainsi de suite.

Avec r_0'' nous formerons r_0''' comme nous avons formé r_0'' avec r_0' et r_0' avec r_0; nous formerons ensuite $r_0^{\text{IV}}, \ldots, r_0^{n}, \ldots$.

Je supposerai que la première des conséquentes successives de r_0^n qui ait une partie commune avec r_0^n soit celle d'ordre p_n.

J'appellerai s_0^n l'antécédente d'ordre $p + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$ de r_0^n.

Alors s_0^n fera partie de r_0 ainsi que ses n conséquentes d'ordre:

$$p,\ p + p_1,\ p + p_1 + p_2,\ \ldots,\ p + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}.$$

De plus s_0^n fera partie de s_0^{n-1}, s_0^{n-1} de $s_0^{n-2}, \ldots$.

Il y aura alors des points qui appartiendront à la fois aux régions $r_0, s_0', s_0'', \ldots, s_0^n, s_0^{n+1}, \ldots$ ad. inf. L'ensemble de ces points formera une région σ qui pourra d'ailleurs se réduire à un ou à plusieurs points.

Alors la région σ fera partie de r_0 ainsi que ses conséquentes d'ordre $p,\ p + p_1, \ldots, p + p_1 + \ldots + p_n,\ p + p_1 + \ldots + p_n + p_{n+1}, \ldots$ ad. inf.

En d'autres termes, toute trajectoire issue d'un des points de σ traversera une infinité de fois la région r_0.

C. Q. F. D.

Extension du théorème I. Nous avons supposé:

1° que $n = 3$,

2° que le volume est un invariant intégral,

3° que le point P est assujetti à rester à distance finie.

Le théorème est encore vrai si le volume n'est pas un invariant intégral, pourvu qu'il existe un invariant positif quelconque:

$$\int M dx_1 dx_2 dx_3.$$

Il est encore vrai si $n > 3$, s'il existe un invariant positif:

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n \quad .$$

et si $x_1, x_2, \ldots, x_n$, coordonnées du point P dans l'espace à n dimensions, sont assujetties à rester finies.

Mais il y a plus.

Supposons que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne soient plus assujetties à rester finies, mais que l'invariant intégral positif

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

étendu à l'espace à n dimensions tout entier ait une valeur finie. Le théorème sera encore vrai.

Voici un cas qui se présentera plus fréquemment.

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

Si $F = \text{const.}$ est l'équation générale d'un système de surfaces fermées dans l'espace à n dimensions, si en d'autres termes F est une fonction uniforme qui devient infinie quand une quelconque des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ cesse d'être finie, il est clair que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ resteront toujours finies, puisque F conserve une valeur constante finie; on se trouve donc dans les conditions de l'énoncé du théorème.

Mais supposons que les surfaces $F = \text{const.}$ ne soient pas fermées; il pourra se faire néanmoins que l'invariant intégral positif

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

étendu à tous les systèmes de valeurs des x tels que:

$$C_1 < F < C_2$$

ait une valeur finie; le théorème sera encore vrai.

C'est ce qui arrive en particulier dans le cas suivant.

M. Hill dans sa théorie de la lune a négligé dans une première approximation la parallaxe du soleil, l'excentricité du soleil et l'inclinaison des orbites; il est ainsi arrivé aux équations suivantes:

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = 2n'y' - x\left(\frac{\mu}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - 3n'^2\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dy'}{dt} = -2n'x' - \frac{\mu y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

qui admettent l'intégrale:

$$F = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{3}{2}n'^2x^2 = \text{const.}$$

et l'invariant intégral

$$\int dx\,dy\,dx'dy'.$$

Si l'on regarde x, y, x' et y' comme les coordonnées d'un point dans l'espace à 4 dimensions, l'équation $F = \text{const.}$ représente un système de surfaces qui ne sont pas fermées. Mais l'invariant intégral étendu à tous les points compris entre deux de ces surfaces est fini.

Le théorème I est donc encore vrai; c'est à dire qu'il existe des trajectoires qui traversent une infinité de fois toute région de l'espace à 4 dimensions, quelque petite que soit cette région.

Théorème II. Si $n = 3$ et que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et s'il y a un invariant positif, il ne peut pas y avoir de surface *fermée* sans contact.

Soit en effet

$$J = \int M dx_1 dx_2 dx_3$$

un invariant intégral positif. Supposons qu'il existe une surface S fermée et sans contact, ayant pour équation

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Soit V le volume limité par cette surface; nous étendrons l'invariant J à ce volume tout entier.

La surface S étant sans contact, l'expression:

$$\frac{dF}{dx_1}X_1 + \frac{dF}{dx_2}X_2 + \frac{dF}{dx_3}X_3$$

ne pourra s'annuler et par conséquent changer de signe; nous la supposerons positive pour fixer les idées.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S; menons la normale à cet élément du côté des F croissants; prenons sur cette normale un segment infiniment petit dn. Soit $\frac{dF}{dn}dn$ la valeur de F à l'extrémité de ce segment. On aura:

$$\frac{dF}{dn} > 0.$$

J étant un invariant, on devrait avoir

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Mais nous trouvons

$$\frac{dJ}{dt} = \int M \frac{\frac{dF}{dx_1}X_1 + \frac{dF}{dx_2}X_2 + \frac{dF}{dx_3}X_3}{\frac{dF}{dn}} d\omega.$$

L'intégrale du second membre, étendue à toute la surface S, est positive puisque la fonction sous le signe $\int$ est toujours positive.

Nous arrivons donc à deux résultats contradictoires et nous devons conclure qu'il ne peut exister de surface fermée sans contact.

Extension du théorème II. Il est facile d'étendre ce théorème au cas de $n > 3$; il suffit pour cela, puisque la représentation géométrique n'est plus possible, de le traduire dans le langage analytique et de dire:

S'il y a un invariant intégral positif, il ne peut pas exister une fonction uniforme $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui soit positive, qui devient infinie toutes les fois que l'un des x cesse d'être fini et qui soit telle que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx_1}X_1 + \frac{dF}{dx_2}X_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n}X_n$$

soit toujours de même signe quand F est nul.

Pour faire comprendre l'importance de ce théorème, je me bornerai à faire observer que c'est une généralisation de celui dont M. Poincaré s'est servi pour démontrer la légitimité de la belle méthode de M. Lindstedt.

Je préfère toutefois, au point de vue des applications ultérieures, lui donner une forme un peu différente en y introduisant une notion nouvelle, celle des courbes invariantes.

Nous avons à la fin du paragraphe précédent envisagé une portion de surface S, définie par l'équation

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

et telle que l'on ait pour tous les points de S

$$\frac{d\theta}{dx_1}X_1 + \frac{d\theta}{dx_2}X_2 + \frac{d\theta}{dx_3}X_3 > 0,$$

de telle sorte que S soit une portion de surface sans contact.

Nous avons défini ensuite ce qu'on doit entendre par le n^e conséquent d'un point de S ou par la n^e conséquente d'une courbe ou d'une aire appartenant à S.

Nous avons vu que s'il existe un invariant positif

$$\iiint M dx_1 dx_2 dx_3,$$

il existe également une autre intégrale

$$\int MH d\omega$$

que l'on doit étendre à tous les éléments $d\omega$ d'une aire appartenant à S et qui jouit des propriétés suivantes:

1°. La quantité sous le signe $\int$, MH est toujours positive.

2°. L'intégrale a la même valeur pour une aire quelconque appartenant à S et pour toutes celles de ses conséquentes qui existent.

Cela posé, j'appellerai *courbe invariante* du n^e ordre, toute courbe tracée sur S et qui coïncidera avec sa n^e conséquente.

A toute courbe invariante fermée correspondra une surface trajectoire fermée.

En effet soit C une courbe invariante fermée; par chacun des points de C je fais passer une trajectoire que je prolonge jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau C, ce qui arrivera par hypothèse puisque je suppose que la n^e conséquente de C existe et n'est autre chose que la courbe C elle-même. L'ensemble de ces trajectoires forme évidemment une surface fermée triplement connexe, c'est à dire présentant les mêmes connexions que le tore.

Ainsi la recherche des surfaces trajectoires fermées, et par conséquent l'étude de la stabilité, se ramène à la recherche des courbes invariantes fermées.

Mais à côté des courbes invariantes fermées, nous avons à envisager d'autres courbes invariantes que j'appellerai quasi-fermées et que je vais définir.

Dans la plupart des questions de dynamique il entre certains paramètres très petits de sorte qu'on est naturellement conduit à développer les solutions suivant les puissances croissantes de ces paramètres. Telles sont les masses en Mécanique Céleste.

Nous imaginerons donc que nos équations différentielles

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = X_3$$

dépendent d'un paramètre μ. Nous supposerons que X_1, X_2, X_3 sont des fonctions données de x_1, x_2, x_3 et μ, susceptibles d'être développées selon les puissances croissantes de μ et que μ est très petit.

Nous dirons alors qu'une fonction quelconque de x_1, x_2, x_3 et μ est une quantité très petite du n^e ordre quand elle pourra se développer suivant les puissances de μ et que le développement commencera par un terme en μ^n.

Cela posé, considérons une portion de surface sans contact S, et sur S une courbe invariante du n^e ordre, C. En général C dépendra de μ.

Supposons maintenant que l'on puisse trouver sur C deux points A et B séparés par un arc fini de la courbe C et dont la distance soit une quantité très petite du p^e ordre. Je dirai alors que la courbe C est *quasi-fermée*. Les deux points A et B s'appelleront les deux points de fermeture.

Prenons un exemple simple. Soient les équations:

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho\mu\cos\omega + \rho\mu^n, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = 1, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \mu.$$

Dans ces équations entrent, outre le temps t, deux variables angulaires ω et φ et une variable linéaire ρ que je regarderai comme essentiellement positive. Je représenterai alors par exemple la situation du système par un point P dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$x_1 = \cos\varphi e^{\rho\cos\omega}, \qquad x_2 = \sin\varphi e^{\rho\cos\omega}, \qquad x_3 = \rho\sin\omega.$$

On voit que lorsque l'une des variables angulaires φ et ω augmente de 2π, le point P ne change pas.

Alors $\varphi = 0$ représente un demi-plan défini par l'égalité et l'inégalité suivantes:

$$x_2 = 0, \qquad x_1 > 0.$$

Il est aisé de voir que ce demi-plan est une portion de surface sans contact.

Soit P_0 un point de ce demi-plan, P_1 son premier conséquent; soient ρ_0, ω_0 et $\varphi_0 = 0$ les valeurs de ρ, ω et φ qui correspondent au point P_0; soient ρ_1, ω_1 et $\varphi_1 = 2\pi$ les valeurs de ρ, ω et φ qui correspondent à P_1, on aura:

$$\omega_1 = \omega_0 + 2\pi\mu, \qquad \rho_1 = \rho_0 e^{\sin\omega_1 - \sin\omega_0 + 2\pi\mu^n}.$$

Supposons que l'on ait entre ρ_0 et ω_0 la relation

$$\log\rho_0 = k + \sin\omega_0 + \omega_0\mu^{n-1}$$

(k étant une constante quelconque). Cela revient à dire que le point P_0 appartient à la courbe C qui a pour équations:

$$\varphi = 0, \qquad \log\rho = k + \sin\omega + \omega\mu^{n-1}.$$

Il est aisé de voir que l'on a encore:

$$\log\rho_1 = k + \sin\omega_1 + \omega_1\mu^{n-1},$$

ce qui revient à dire que le point P_1 qui est le conséquent de P_0 est aussi sur la courbe C ou bien que *la courbe C est invariante.*

La courbe C n'est pas fermée. En effet l'expression de $\log\rho$ contient un terme $\omega\mu^{n-1}$ qui n'est pas périodique et qui ne reprend pas la même valeur quand ω augmente de 2π.

Nous arrêterons la courbe C aux points A et B qui ont respectivement pour coordonnées

$$\varphi = 0, \qquad \omega = 0, \qquad \rho = e^k,$$

$$\varphi = 0, \qquad \omega = 2\pi, \qquad \rho = e^{k+2\pi\mu^{n-1}}.$$

Quelle est la distance de ces points A et B? La valeur de φ correspondant à ces deux points est la même; la valeur de ω est la même à un multiple près de 2π. La distance AB sera donc du même ordre de grandeur que la différence des valeurs de ρ qui correspondent aux deux points A et B. Or cette différence est égale à:

$$e^k(e^{2\pi\mu^{n-1}} - 1).$$

Si donc μ est comme nous le supposons un paramètre très petit, cette différence et par conséquent la distance AB est une quantité très petite d'ordre $n - 1$. La courbe C est alors une courbe quasi-fermée dont les points A et B sont les points de fermeture.

Ainsi si une courbe qui dépend de μ est quasi-fermée, cela veut dire qu'elle est fermée pour $\mu = 0$.

Lemme. Si la distance de deux points A_0 et B_0 appartenant à la portion de surface sans contact S est une quantité très petite d'ordre n, il en sera de même de la distance de leurs conséquents A_1 et B_1.

Soient en effet a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un point fixe P_0 de S très voisin de A_0 et de B_0; a'_1, a'_2, a'_3 les coordonnées de son conséquent P_1.

Soient x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3; y_1, y_2, y_3; y'_1, y'_2, y'_3 les coordonnées de A_0, A_1, B_0 et B_1. Il est clair que x'_1, x'_2 et x'_3 seront des fonctions holomorphes de x_1, x_2 et x_3.

Donc $x'_1 - a'_1, x'_2 - a'_2, x'_3 - a'_3$ peuvent se développer selon les puissances croissantes de $x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3$ et μ.[1] J'introduis μ parce que les équations différentielles dépendant de μ, il doit en être de même de la relation qui lie un point à son conséquent.

L'expression de $y'_1 - a'_1, y'_2 - a'_2, y'_3 - a'_3$ en fonctions de $y_1 - a_1$, $y_2 - a_2$, $y_3 - a_3$ et μ sera évidemment la même que celle de $x'_1 - a'_1$, $x'_2 - a'_2$, $x'_3 - a'_3$ en fonctions de $x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3$ et μ.

On déduit de là que l'on peut écrire:

$$\begin{aligned} x'_1 - y'_1 &= (x_1 - y_1)F_1 + (x_2 - y_2)F_2 + (x_3 - y_3)F_3, \\ x'_2 - y'_2 &= (x_1 - y_1)F'_1 + (x_2 - y_2)F'_2 + (x_3 - y_3)F'_3, \\ x'_3 - y'_3 &= (x_1 - y_1)F''_1 + (x_2 - y_2)F''_2 + (x_3 - y_3)F''_3, \end{aligned} \tag{1}$$

les F étant des séries développées suivant les puissances de:

$$\mu, x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3, y_1 - a_1, y_2 - a_2, y_3 - a_3.$$

[1] Voir *Note E*.

En général la position des points A_0 et B_0 dépendra de μ, de telle façon que $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ seront des fonctions de μ que l'on pourra développer suivant les puissances croissantes de ce paramètre.

Dire que la distance A_0B_0 est très petite d'ordre n, c'est dire que les différences

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3$$

peuvent se développer suivant les puissances de μ et que les développements commencent par des termes en μ^n.

Quand on remplacera alors dans les équations (1) $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ par leurs valeurs en fonctions de μ, on reconnaîtra que les développements de $x'_1 - y'_1, x'_2 - y'_2, x'_3 - y'_3$ commencent par des termes en μ^n et par conséquent que la distance A_1B_1 est très petite d'ordre n.

C. Q. F. D.

Théorème III. Si une courbe invariante C est quasi-fermée, de telle façon que la distance des points de fermeture A et B soit une quantité très petite du n^e ordre, et s'il existe un invariant intégral positif, la distance du point A à son conséquent A_1 et celle du point B à son conséquent B_1 sont des quantités très petites du n^e ordre.

Fig. 1.

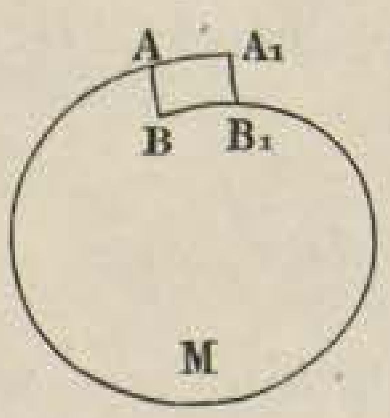
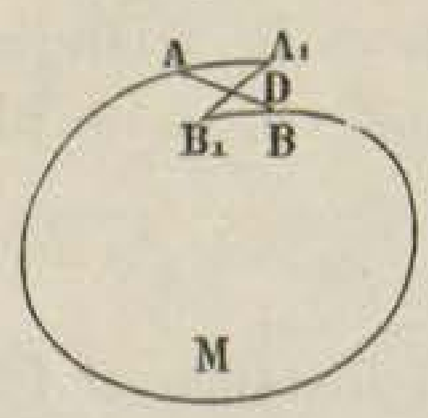


Fig. 2.



Je représente en effet la courbe C et sur cette courbe les deux points de fermeture A et B.

La courbe C étant invariante, les conséquents A_1 et B_1 de A et de B sont sur la courbe C ou sur son prolongement.

La distance des points A et B étant une quantité très petite du n^e ordre, je puis joindre ces deux points par un arc de courbe AB situé sur la portion de surface sans contact S, dont la longueur totale soit une quantité très petite du n^e ordre et qui ne coupe pas C.

Soit A_1B_1 un arc de courbe qui soit le conséquent de AB. D'après le lemme précédent, la longueur totale de A_1B_1 sera encore une quantité très petite du n^e ordre.

Considérons l'aire α faisant partie de S et limitée par la courbe C et l'arc AB; sur la figure 1 c'est l'aire ABB_1MA. Soit maintenant α_1 la conséquente de l'aire α. Cette conséquente sera limitée par la courbe C et l'arc A_1B_1; sur la figure 1 ce sera l'aire AA_1B_1MA.

S'il y a un invariant intégral positif, il existera une certaine intégrale

$$\int MHd\omega$$

qui devra avoir la même valeur si on l'étend à tous les éléments $d\omega$ de l'aire α, ou à tous les éléments de sa conséquente α_1.

Si la disposition est celle de la figure 1, c'est à dire si les arcs AB et A_1B_1 ne se coupent pas et que l'aire α_1 se compose de l'aire α, plus l'aire ABA_1B_1, il faut que l'intégral

$$\int MHd\omega$$

étendue à l'aire ABA_1B_1 soit nulle. Mais cela est impossible puisque tous les éléments de cette intégrale sont positifs.

Il faut donc que les arcs AB et A_1B_1 se coupent en un point D, et que la disposition soit celle de la figure 2.

Cela posé, dans le triangle ADA_1, les côtés AD et A_1D sont très petits du n^e ordre. On a de plus:

$$AA_1 < AD + A_1D.$$

Par conséquent la distance AA_1 est une quantité très petite du n^e ordre.

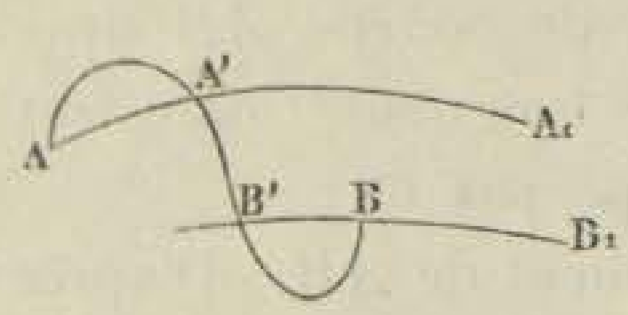
Il en est de même pour la même raison de la distance BB_1.

C. Q. F. D.[1]

---

[1] Vu l'importance de ce théorème, je crois devoir insister quelque peu. Le point essentiel de la démonstration qui précède est le suivant.

Si les deux arcs AB, A_1B_1 ne se coupent pas, le polygone curviligne fermé AA_1B_1B est convexe et ses côtés ne se coupent pas, de telle façon que l'aire AA_1B_1B est tout entière de même signe et ne se compose pas de parties positives et de parties négatives.



En effet, AA_1 ne peut couper BB_1 sans quoi la courbe invariante serait fermée. AB ne peut couper non plus la

Remarque. On peut à un certain point de vue regarder une courbe fermée comme un cas particulier d'une courbe quasi-fermée; aussi n'est-il pas inutile de faire remarquer que le raisonnement précédent ne s'applique pas au cas où la courbe invariante est fermée, mais seulement au cas où elle est quasi-fermée.

Le corollaire suivant fera comprendre l'importance du théorème III.

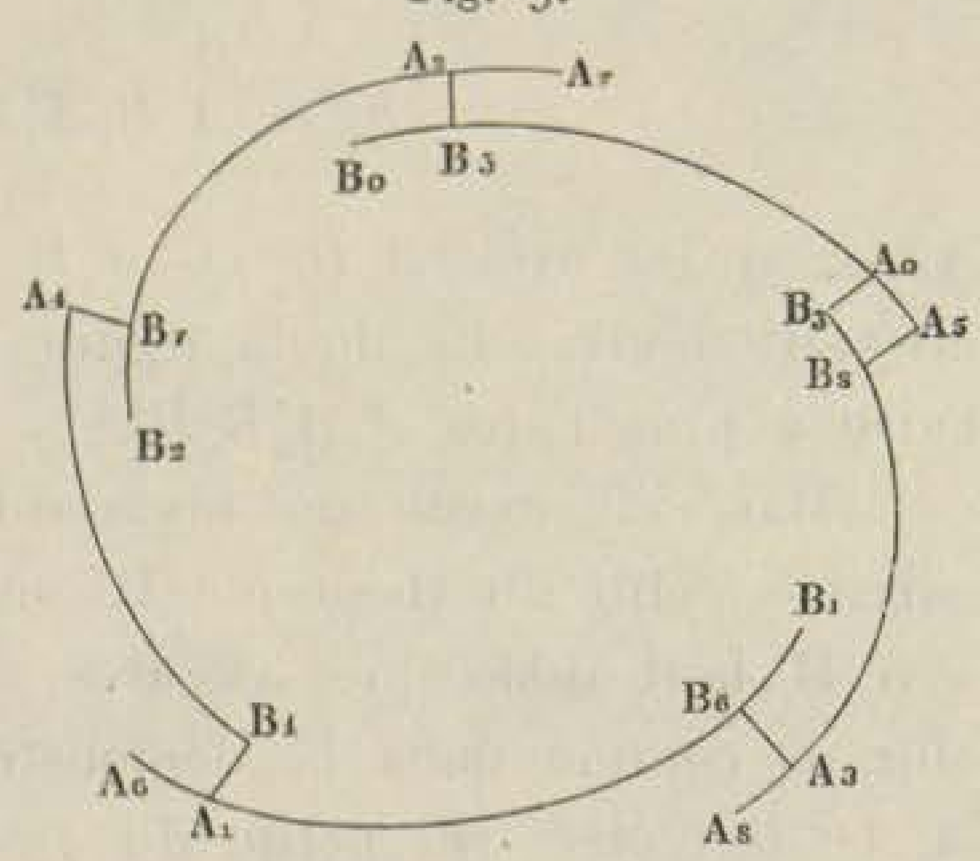
Corollaire. Si on a démontré qu'une courbe invariante C est quasi-fermée de telle sorte que la distance des points de fermeture A et B est une quantité très petite du n^e ordre *au moins*, si l'on sait de plus que la distance du point A à son conséquent est une quantité finie ou une quantité très petite du $n - 1^e$ ordre *au plus*, si enfin il y a un invariant intégral positif, la courbe C est fermée.

En effet, si elle était seulement quasi-fermée, la distance de A à son conséquent devrait être du n^e ordre.

Le théorème III est susceptible de plusieurs généralisations.

Première extension du théorème III. Soit $A_0 B_0$ une portion quelconque de courbe tracée sur S et que je puis supposer prolongée un peu au delà de A_0 et B_0. Soient ensuite $A_1 B_1$, $A_2 B_2, \ldots,$ les conséquentes successives de $A_0 B_0$.

Fig. 3.



Supposons que $A_n B_n$ coïncide en partie avec $A_0 B_0$, en partie avec le prolongement de cette courbe de telle sorte que $A_0 B_0$ soit une courbe invariante du n^e ordre.

C'est ainsi que sur la figure 3 j'ai représenté, pour fixer les idées, $A_5 B_5$ comme coïncidant avec $A_0 B_0$ et son prolongement.

---

courbe C, car si par exemple AB coupait AA_1 en A' et le prolongement de BB_1 en B' comme l'indique la figure ci-contre, on prendrait pour points de fermeture A' et B' au lieu de A et de B.

Si AB ne coupe pas C, $A_1 B_1$ ne coupera pas non plus C qui est sa propre conséquente.

Les mêmes observations s'appliquent à la première extension du théorème III. On verrait de la même façon que le polygone curviligne $A_0 B_3 B_8 A_5$ (fig. 3) est convexe si $A_0 B_3$ et $A_5 B_8$ ne se coupent pas.

De même $A_6 B_6$ devra coïncider avec $A_1 B_1$ et son prolongement, et enfin $A_8 B_8$ avec $A_3 B_3$.

Supposons maintenant que la distance $A_0 B_p$ soit une quantité très petite du q^e ordre. Nous admettrons en général que p est premier avec n. Dans le cas de la figure 3, c'est la distance $A_0 B_3$ qui est très petite du q^e ordre. Alors, d'après le lemme précédent, les distances $A_1 B_4$, $A_2 B_5$, $A_3 B_6$, $A_4 B_7$, $A_5 B_8$ seront aussi très petites du q^e ordre. Nous pourrons alors compléter la figure en joignant $A_0 B_3$, $A_1 B_4$, $\ldots$, $A_5 B_8$ par des arcs de courbe dont la longueur totale sera très petite du q^e ordre, et qui ne couperont pas les courbes $A_0 B_0$, $A_1 B_1$, etc.

Je dis que la distance de A_0 à son cinquième conséquent A_5 sera encore une quantité très petite du q^e ordre.

En effet l'aire fermée:

$$\alpha = A_0 B_3 A_3 B_6 A_1 B_4 A_4 B_7 A_2 B_5 A_0$$

aura pour conséquente

$$\alpha_1 = A_1 B_4 A_4 B_7 A_2 B_5 A_5 B_8 A_3 B_6 A_1.$$

Ainsi, si les arcs $A_0 B_3$ et $A_5 B_8$ ne se coupent pas, c'est à dire si la disposition est celle de la figure 3, l'aire conséquente α_1 se composera de l'aire α plus l'aire $A_0 A_5 B_8 B_3$.

Mais s'il existe un invariant intégral positif, un raisonnement tout pareil à celui du théorème III montrerait que cela est impossible.

Il faut donc que les arcs $A_0 B_3$ et $A_5 B_8$ se coupent et on en conclurait, comme dans la démonstration du théorème III, que la distance $A_0 A_5$ doit être très petite du q^e ordre comme le sont les distances $A_0 B_3$ et $A_5 B_8$.

C. Q. F. D.

De cette généralisation du théorème III, on déduit une généralisation de son corollaire que l'on peut énoncer ainsi.

S'il existe un invariant intégral positif;

Si l'on peut tracer sur une portion de surface sans contact S une courbe $A_0 B_0$ qui soit une courbe invariante du n^e ordre;

Si l'on peut trouver sur cette courbe deux points A_0, B_0, tels que la distance de A_0 au p^e conséquent B_p de B_0 (p premier avec n) soit une quantité très petite du q^e ordre au moins;

Si enfin la distance de A_0 à son n^e conséquent A_n est une quantité finie ou très petite du $q - 1^e$ ordre au plus, la distance A_0B_q est rigoureusement nulle, de telle sorte que l'ensemble de la courbe A_0B_0 et de ses conséquentes successives forme une courbe fermée qui est une courbe invariante du 1^{er} ordre.

Le théorème III est susceptible d'une deuxième extension que je me bornerai à énoncer parce que je ne compte en faire aucun usage dans la suite.

Deuxième extension du théorème III. Il peut arriver qu'une courbe sans être invariante rigoureusement, soit invariante à des quantités très petites près du p^e ordre.

Considérons par exemple une courbe C, et sa n^e conséquente. Si la distance d'un point quelconque de cette n^e conséquente à la courbe C est une quantité très petite du p^e ordre, je dirai que C est une *courbe péninvariante* du n^e ordre aux quantités près du p^e ordre.

Une courbe péninvariante peut être fermée ou quasi-fermée comme une courbe invariante et les points de fermeture se définiront de la même manière.

Cela posé, je dis que:

Si une courbe péninvariante du n^e ordre aux quantités près du p^e ordre, est quasi-fermée, de telle façon que la distance des points de fermeture A et B soit une quantité très petite du q^e ordre, la distance du point A à son n^e conséquent A_1 sera une quantité très petite d'ordre q au moins si $2q < p$ et d'ordre $p - q$ au moins si $2q > p > q$.

Théorème IV. Considérons une portion de surface sans contact S que je supposerai simplement connexe. Imaginons que la position d'un point sur S soit déterminée par un système particulier de coordonnées que je vais définir et qui est analogue aux coordonnées polaires. Soit O un point quelconque de S; imaginons qu'à ce point viennent aboutir une infinité de branches de courbes, de la même façon que dans les coordonnées polaires les rayons vecteurs viennent aboutir au pôle.

Nous supposerons que deux quelconques de ces branches de courbe n'aient d'autre point commun que le point O et nous définirons une quelconque de ces branches de courbe par l'angle θ que sa tangente en O fait avec une droite fixe passant par O.

Nous supposerons d'ailleurs que chacune de ces branches de courbe se termine au point O.

Considérons maintenant un second système de courbes que je supposerai fermées, s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point O. J'admettrai de plus qu'une courbe quelconque du second système et une branche de courbe quelconque du premier système ont un point commun et un seul.

Considérons une branche de courbe fixe B_0 du premier système et soit P le point où elle coupe une courbe mobile C du second système. Soit ρ la longueur de l'arc de la courbe B_0 compris entre les points O et P. On pourra définir la courbe mobile C par la quantité ρ.

Je suppose enfin que par un point P quelconque de S, passe une branche du premier système et une seule; une courbe du second système et une seule. Nous pourrons alors nous servir des coordonnées ρ et θ pour définir la position du point P sur S.

Cela posé, voici le théorème que je me propose de démontrer:

Soit α une aire simplement connexe faisant partie de S et limitée par une courbe fermée k. Soit α_n sa n^e conséquente limitée par une courbe fermée k_n. Si les deux aires α et α_n ont une partie commune et que O appartienne à cette partie commune; si les points de k ont même coordonnée θ que leurs n^{es} conséquents; si la courbe k rencontre chacune des branches de courbe du 1^{er} système en un seul point (de telle sorte que quand on parcourt la courbe fermée k, θ varie de 0 à 2π); si de plus il y a un invariant intégral positif, deux au moins des points de k coïncideront avec leurs n^{es} conséquents.

En effet un élément d'aire quelconque $d\omega$ appartenant à S pourra s'exprimer en fonction de ρ et de θ de la façon suivante

$$d\omega = \varphi(\rho, \theta) d\rho d\theta,$$

la fonction $\varphi(\rho, \theta)$ étant essentiellement positive.

S'il y a un invariant intégral positif, il existe une intégrale

$$J = \int MH d\omega = \int MH\varphi d\rho d\theta$$

qui a la même valeur pour α et pour α_n et qui est telle que

$$MH\varphi > 0.$$

Soient ρ_0 et θ_0 les coordonnées d'un point quelconque de k, ρ_n et $\theta_n = \theta_0$ celles de son n^e conséquent qui appartient par définition à k_n.

Soit

$$X = \int_{\rho_0}^{\rho_n} MH\varphi d\rho.$$

(Dans le calcul de l'intégrale X, on doit regarder θ comme une constante égale à θ_0.)

La quantité sous le signe $\int$ étant positive, l'intégrale X est positive si $\rho_n > \rho_0$ et négative si $\rho_n < \rho_0$; elle ne peut s'annuler que si $\rho_n = \rho_0$.

D'ailleurs d'après la définition de X, cette intégrale est une fonction de θ_0.

Soient J_0 et J_n les valeurs de l'intégrale J étendues respectivement à l'aire α et à l'aire α_n. On aura d'après la définition même des intégrales doubles:

$$J_n - J_0 = \int_0^{2\pi} X d\theta_0.$$

L'intégrale du second membre devra être prise tout le long de la courbe k. Quand on aura fait tout le tour de cette courbe fermée, la fonction X devra être revenue à sa valeur initiale.

Mais J étant un invariant, $J_n - J_0$ doit être nul. X ne peut donc être toujours de même signe et comme cette quantité a même valeur aux deux limites d'intégration, il faut que X s'annule deux fois entre ces deux limites.

Or quand X est nul, $\rho_0 = \rho_n$ et le point correspondant de k coïncide avec son n^e conséquent.

Donc deux au moins des points de k coïncident avec leurs n^{es} conséquents.

C. Q. F. D.

On peut énoncer le théorème IV sans faire intervenir le système particulier de coordonnées que nous avons défini plus haut et dire:

Si une courbe fermée k fait partie d'une portion de surface sans contact S simplement connexe et que k_n soit sa n^e conséquente; si l'on peut joindre chacun des points de k à son n^e conséquent par des arcs de courbe situés sur S et de telle façon que deux quelconques de ces arcs n'aient aucun point commun; si de plus il y a un invariant intégral positif, deux au moins des points de k coïncideront avec leurs n^{es} conséquents.

CHAPITRE III.

Théorie des solutions périodiques.

§ 1. *Existence des solutions périodiques.*

Considérons un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{1}$$

où les X sont des fonctions des x et d'un paramètre μ. Les X devront aussi dépendre de t, mais ce seront alors des fonctions périodiques de cette variable et la période sera 2π.

Supposons que pour la valeur o du paramètre μ, ces équations admettent une solution périodique, de telle sorte que

$$x_i = \varphi_i(t),$$

φ_i étant une fonction périodique du temps dont la période sera par exemple 2π.

Posons:

$$x_i = \varphi_i + \xi_i$$

et cherchons pour les valeurs très petites de μ à trouver les valeurs des ξ que nous supposerons également très petites, il viendra

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \mu\frac{dX_i}{d\mu} + \sum_k \xi_k \frac{dX_i}{dx_k}.$$

Dans les dérivées partielles des X les x_i sont remplacés par les fonctions périodiques φ_i. Les ξ sont ainsi déterminés par des équations linéaires à second membre dont les coefficients sont des fonctions périodiques.

Deux cas peuvent se présenter.

1°. Les équations sans second membre:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum \xi_k \frac{dX_i}{dx_k} \tag{2}$$

n'admettent pas de solution périodique de période 2π.

Dans ce cas les équations à second membre en admettent une que j'écrirai:

$$\xi_i = \mu\psi_i(t),$$

ψ étant une fonction périodique de période 2π.

2°. Les équations sans second membre admettent une solution périodique de période 2π.

Alors les équations à second membre peuvent ne pas avoir de solution périodique, de telle façon qu'en général nous trouverons une solution de la forme suivante:

$$\xi_i = \mu t\psi_{1.i}(t) + \mu\psi_{0.i}(t),$$

les ψ étant toujours des fonctions périodiques, ou même dans certains cas

$$\xi_i = \mu[t^n\psi_{n.i}(t) + t^{n-1}\psi_{n-1.i}(t) + \ldots + \psi_{0.i}(t)].$$

Plaçons-nous dans le premier cas et voyons la chose de plus près.

Cherchons à former une solution périodique et à la développer suivant les puissances de μ; posons par conséquent:

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1.i} + \mu^2\varphi_{2.i} + \ldots.$$

Quand on substituera à la place des x_i ces valeurs dans les X_i, on trouvera

$$X_i = X_{0.i} + \mu X_{1.i} + \mu^2 X_{2.i} + \ldots.$$

Il est clair que les $X_{0.i}$ ne dépendent que des φ_i, les $X_{1.i}$ des φ_i et des $\varphi_{1.i}$, les $X_{2.i}$ des $\varphi_{1.i}$ et des $\varphi_{2.i}$ etc. De plus si les $\varphi_{n.i}$ sont des fonctions périodiques de t de période 2π, il en sera de même des $X_{n.i}$.

Nous avons de plus

$$X_{n.i} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k} \varphi_{n.k} + Y_{n.i}.$$

Dans le second membre, dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, on doit substituer les φ_i à la place des x_i ainsi que nous l'avons fait plus haut. De plus $Y_{n.i}$ ne dépendra que des φ_i, des $\varphi_{1.i}$, des $\varphi_{2.i}, \ldots$, des $\varphi_{n-1.i}$; mais ne dépendra plus des $\varphi_{n.i}$.

Cela posé on est conduit aux équations suivantes

$$(3) \qquad \frac{d\varphi_{n.i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k} \varphi_{n.k} + Y_{n.i}.$$

Supposons qu'on ait déterminé les quantités

$$\varphi_{1.i}, \varphi_{2.i}, \ldots, \varphi_{n-1.i}$$

à l'aide des équations précédentes sous forme de fonctions périodiques de t; on pourra ensuite à l'aide des équations (3) déterminer les $\varphi_{n.i}$.

Ces équations (3) sont des équations linéaires à second membre et les coëfficients sont périodiques.

Par hypothèse les équations sans second membre

$$\frac{d\varphi_{n.i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k} \varphi_{n.k},$$

qui ne sont autres que les équations (2), n'ont pas de solution périodique; donc les équations (3) en admettent une.

Il résulte de là qu'il existe des séries

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1.i} + \mu^2\varphi_{2.i} + \cdots$$

dont les coëfficients sont périodiques et qui satisfont formellement aux équations (1).

Il resterait à démontrer la convergence de ces séries. Nul doute que cette démonstration ne puisse se faire directement; je ne le ferai pas toutefois, car je vais, en reprenant la question à un point de vue différent, démontrer rigoureusement l'existence des solutions périodiques, ce qui entraîne la convergence de nos séries. Nous n'aurons en effet qu'à nous appuyer sur les principes les plus connus du »Calcul des Limites.»

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$. Soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = 2\pi$. Les γ_i dépendront évidemment de μ et des valeurs initiales des variables et elles s'annuleront avec elles.

Cela me permet d'écrire:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \beta_i + a_i\mu + \Sigma b_{ik}\beta_k + \Sigma [m, p_1, p_2, \ldots, p_n]\mu^m \beta_1^{p_1}\beta_2^{p_2}\ldots\beta_n^{p_n} \\ &= \beta_i + \psi_i, \end{aligned}$$

les a, les b et les $[m, p_1, p_2, \ldots, p_n]$ étant des coëfficients constants.

On obtiendra les solutions périodiques de période 2π en cherchant les cas où:

$$\gamma_i = \beta_i.$$

On peut donc considérer μ comme une donnée de la question et chercher à résoudre par rapport aux n inconnues β les équations

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{4}$$

Nous savons que les ψ sont des fonctions holomorphes de μ et des β s'annulant avec les variables.

Si le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β (c'est à dire le déterminant des b_{ik}) n'est pas nul, on peut résoudre ces n équations et on trouve comme solution:

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

les θ_i étant, d'après un théorème bien connu, des fonctions holomorphes de μ s'annulant avec μ.

C'est le cas que nous avons étudié plus haut et où les équations (2) n'ont pas de solution périodique.

On doit en conclure que pour les valeurs de μ suffisamment petites, les équations (1) admettent une solution périodique.

Mais il peut arriver que, bien que le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β soit nul, les équations (4) puissent néanmoins être résolues et par conséquent que les équations (1) admettent une solution périodique pour les petites valeurs de μ. Il en sera ainsi en général quand les déterminants compris dans la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{d\psi_1}{d\mu} & \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\psi_2}{d\mu} & \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\psi_n}{d\mu} & \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} \end{matrix} \right\|$$

seront tous nuls.

Supposons donc que les équations (1) admettent une solution périodique pour $\mu = 0$ et pour les valeurs de μ suffisamment petites, plus petites par exemple que μ_0, et qu'elles n'en admettent plus pour $\mu > \mu_0$. De quelle façon la solution périodique disparaîtra-t-elle au moment où μ atteindra la valeur μ_0? On pourrait démontrer que les choses se passent comme il suit.

Pour $\mu = \mu_0 - \varepsilon$, les équations (1) admettent *deux* solutions périodiques; pour $\mu = \mu_0$, ces deux solutions se confondent en une seule et enfin pour $\mu > \mu_0$, ces deux solutions disparaissent.

Pour le faire voir, reprenons les équations (4):

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0 \tag{4}$$

et supposons que le déterminant fonctionnel des ψ s'annule quand les β et le paramètre μ sont nuls à la fois. Il est alors impossible, du moins en général, de tirer des équations les β_i sous la forme:

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

les θ_i étant des fonctions holomorphes de μ s'annulant avec cette variable. Mais il sera possible en général de tirer des $n - 1$ premières équations (4)

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n-1} = 0$$

les $n - 1$ quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$; on trouvera:

$$\beta_i = H_i(\beta_n, \mu), \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

les H étant des fonctions holomorphes de β_n et de μ s'annulant avec ces variables.

Substituons H_i à la place de β_i dans la n^e équation:

$$\phi_n = 0.$$

Nous obtiendrons une équation

$$\Phi = 0$$

dont le 1^er^ membre sera une fonction holomorphe de μ et de β_n.

Pour $\mu = \beta_n = 0$, on aura

$$\Phi = 0, \qquad \frac{d\Phi}{d\beta_n} = 0.$$

En d'autres termes pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi = 0$ admet $\beta_n = 0$ comme racine multiple.

Supposons, ce qui est le cas le plus général, que ce soit une racine double. Alors nous pourrons écrire, en développont Φ suivant les puissances croissantes de μ et de β_n:

$$\begin{aligned}\Phi = & A_2\beta_n^2 + A_3\beta_n^3 + A_4\beta_n^4 + \dots \\ & + B_0\mu + B_1\mu\beta_n + B_2\mu\beta_n^2 + \dots \\ & + C_0\mu^2 + C_1\mu^2\beta_n + \dots \\ & + \dots\dots\dots\end{aligned}$$

On peut alors tirer de l'équation $\Phi = 0$, si A_2 et B_0 ne sont pas nuls, β_n en fonction de μ; on trouve:

$$\beta_n = \theta_n(\nu),$$

où

$$\nu = \pm\sqrt{-\frac{B_0\mu}{A_2}}$$

et où θ_n est une fonction holomorphe de ν à coefficients réels et s'annulant avec cette variable.

Si $\frac{B_0}{A_2} > 0$, ν est réel quand $\mu < 0$ et imaginaire quand $\mu > 0$; c'est le contraire quand $\frac{B_0}{A_2} < 0$. Supposons pour fixer les idées que B_0 et A_2 soient de même signe.

Quand μ sera négatif, on trouvera pour β_n deux valeurs réelles (correspondant au double signe du radical $\sqrt{-\frac{B_0\mu}{A_2}}$) et par conséquent deux solutions périodiques. Quand $\mu = 0$, ces deux solutions périodiques se confondent, parce que les deux valeurs de β_n se réduisent à 0; quand $\mu > 0$ ces deux solutions périodiques disparaissent parce que ν devient imaginaire.

Une discussion plus approfondie montrerait que les conclusions subsistent dans le cas où la racine $\beta_n = 0$, au lieu d'être une racine double de l'équation $\Phi = 0$ est une racine triple ou d'ordre supérieur.

Lorsque des équations différentielles dépendent d'un paramètre arbitraire μ et admettent une solution périodique, et si l'on fait varier ce paramètre d'une manière continue, la solution périodique ne pourra disparaître qu'après s'être confondue avec une autre solution périodique.

C'est ainsi que, dans une équation algébrique dépendant d'un paramètre μ, si l'on fait varier ce paramètre d'une manière continue, une racine réelle ne pourra disparaître et devenir imaginaire, qu'après s'être confondue avec une autre racine réelle.

Les solutions périodiques disparaissent par couples, à la façon des racines réelles d'une équation algébrique.

Le cas particulier qui nous arrêtera le plus sera celui où les équations (1) admettent pour $\mu = 0$ une infinité de solutions périodiques de période 2π.

Dans ce cas les équations (4) ne sont plus distinctes quand on y fait $\mu = 0$ et par exemple on peut déduire la n^e des $n - 1$ premières. Considérons donc ces $n - 1$ premières équations:

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_{n-1} = 0.$$

En général on pourra supposer que le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{\partial(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1})}$$

n'est pas nul. On pourra donc résoudre nos $n-1$ équations par rapport aux $n-1$ quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$.

On trouvera:

$$\beta_i = H_i(\beta_n, \mu), \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

les H étant des fonctions holomorphes de β_n et de μ s'annulant avec ces variables.

Substituons H_i à la place de β_i dans la n^e équation (4)

$$\psi_n = 0.$$

Nous obtiendrons une équation:

$$\Phi = 0$$

dont le premier membre sera une fonction holomorphe de μ et de β_n. Cette fonction holomorphe doit contenir μ en facteur. En effet, pour $\mu = 0$, les n équations (4) se réduisent à $n-1$ d'entre elles et par conséquent l'équation $\Phi = 0$ doit devenir identique.

Posons donc

$$\Phi = \mu\Phi_1,$$

Φ_1 sera encore holomorphe. Appelons Φ_1^0 ce que devient Φ_1 quand on y fait $\mu = 0$ et envisageons l'équation:

$$\Phi_1^0 = 0$$

dont le premier membre est une fonction holomorphe de β_n seulement. Trois cas peuvent se présenter:

1°. Ou bien cette équation n'admet aucune racine; on peut en conclure que pour les petites valeurs de μ les équations (1) n'ont pas de solution périodique de période 2π.

2°. Ou bien cette équation admet une ou plusieurs racines simples. Dans ce cas les équations (1) ont des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ.

En effet supposons que pour:

$$\beta_n = \beta_n^0$$

on ait:

$$\Phi_1^0 = 0, \qquad \frac{d\Phi_1^0}{d\beta_n} \gtrless 0.$$

Alors l'équation:

$$\Phi_1 = 0$$

pourra être résolue par rapport à β_n puisque pour

$$\mu = 0, \qquad \beta_n = \beta_n^0$$

on a

$$\Phi_1 = 0, \qquad \frac{d\Phi_1}{d\beta_n} \gtrless 0.$$

On obtient ainsi:

$$\beta_n = \theta_n(\mu),$$

θ_n étant holomorphe en μ. En remplaçant β_n par θ_n dans les H_i, on trouve:

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

θ_i étant holomorphe.

L'existence d'une solution périodique pour les petites valeurs de μ est donc établie. De plus pour une pareille solution périodique, le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β n'est pas nul si μ est suffisamment petit sans être nul.

3°. Ou bien l'équation $\Phi_1^0 = 0$ n'a que des racines multiples et alors nous ne pouvons rien affirmer.

Si toutefois cette équation a une racine triple, ou plus généralement une racine d'ordre impair, nous pourrions affirmer que pour les petites valeurs de μ, il existe une solution périodique, mais nous ne saurions plus si le déterminant fonctionnel correspondant n'est pas nul.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui entrent dans les équations différentielles (1) dépendent du temps t. Les résultats seraient modifiés si le temps t n'entre pas dans ces équations.

Il y a d'abord entre les deux cas une différence qu'il est impossible de ne pas apercevoir. Nous avions supposé dans ce qui précède que les X_i étaient des fonctions périodiques du temps et que la période était 2π; il en résultait que, si les équations admettaient une solution périodique, la période de cette solution devait être égale à 2π ou à un multiple de 2π. Si au contraire les X_i sont indépendants de t, la période d'une solution périodique peut être quelconque.

En second lieu, si les équations (1) admettent une solution périodique (et si les X ne dépendent pas de t), elles en admettent une infinité. Si en effet

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t)\ , \quad \ldots\ , \quad x_n = \varphi_n(t)$$

est une solution périodique des équations (1), il en sera de même (quelle que soit la constante h) de

$$x_1 = \varphi_1(t + h), \qquad x_2 = \varphi_2(t + h)\ , \quad \ldots\ , \quad x_n = \varphi_n(t + h).$$

Ainsi le cas sur lequel nous nous sommes étendus d'abord et dans lequel pour $\mu = 0$, les équations (1) admettent une solution périodique et une seule, ne peut se présenter si les X ne dépendent pas de t.

Plaçons-nous donc dans le cas où le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) et supposons que pour $\mu = 0$, ces équations admettent une solution périodique de période T:

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t)\ , \quad \ldots\ , \quad x_n = \varphi_n(t).$$

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$; soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = T + \tau$. Posons ensuite, comme nous l'avons fait plus haut,

$$\gamma_i - \beta_i = \psi_i.$$

Les ψ_i seront des fonctions holomorphes de μ, de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ et de τ s'annulant avec ces variables.

Nous avons donc à résoudre par rapport aux $n + 1$ inconnues

$$\beta_1\,,\ \beta_2\,,\ \ldots\,,\ \beta_n\,,\ \tau$$

les n équations

$$(5) \qquad \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0.$$

Nous avons une inconnue de trop, nous pouvons donc poser arbitrairement par exemple

$$\beta_n = 0.$$

Nous tirerons ensuite des équations (5), $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ et τ en fonctions holomorphes de μ s'annulant avec μ. Cela est possible à moins que le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{vmatrix}$$

ne soit nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$.

Si ce déterminant était nul, au lieu de poser arbitrairement $\beta_n = 0$, on poserait par exemple $\beta_i = 0$, et la méthode ne serait en défaut que si tous les déterminants contenus dans la matrice:

$$\begin{Vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{Vmatrix}$$

étaient nuls à la fois. (Il est à remarquer que le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne de cette matrice est toujours nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$.)

Comme en général tous ces déterminants ne seront pas nuls à la fois, les équations (1) admettront pour les petites valeurs de μ, une solution périodique de période $T + \tau$.

§ 2. *Exposants caractéristiques.*

Reprenons les équations:

(1) $$\frac{dx^i}{dt} = X_i$$

et imaginons qu'elles admettent une solution périodique

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Formons les équations aux variations (voir Chapitre I) des équations (1) en posant:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$$

et négligeant les carrés des ξ.

Ces équations aux variations s'écriront:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n. \tag{2}$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux ξ, et leurs coëfficients $\frac{dX_i}{dx_k}$, (quand on y a remplacé x_i par $\varphi_i(t)$) sont des fonctions périodiques de t. Nous avons donc à intégrer des équations linéaires à coëfficients périodiques.

On sait quelle est en général la forme des intégrales de ces équations; on obtient n intégrales particulières de la forme suivante:

$$\begin{array}{llll}
\xi_1 = e^{\alpha_1 t}S_{11}, & \xi_2 = e^{\alpha_1 t}S_{21}\,, & \ldots, & \xi_n = e^{\alpha_1 t}S_{n1}, \\
\xi_1 = e^{\alpha_2 t}S_{12}, & \xi_2 = e^{\alpha_2 t}S_{22}\,, & \ldots, & \xi_n = e^{\alpha_2 t}S_{n2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\xi_1 = e^{\alpha_n t}S_{1n}, & \xi_2 = e^{\alpha_n t}S_{2n}\,, & \ldots, & \xi_n = e^{\alpha_n t}S_{nn},
\end{array} \tag{3}$$

les α étant des constantes et les S_{ik} des fonctions périodiques de t de même période que les $\varphi_i(t)$.

Les constantes α s'appellent les *exposants caractéristiques* de la solution périodique.

Si α est purement imaginaire de façon que son carré soit négatif, le module de $e^{\alpha t}$ est constant et égal à 1. Si au contraire α est réel, ou si α est complexe de telle façon que son carré ne soit pas réel, le module $e^{\alpha t}$ tend vers l'infini pour $t = +\infty$ ou pour $t = -\infty$. Si donc tous les α ont leurs carrés réels et négatifs, les quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ resteront finies; je dirai alors que la solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$ est stable; dans le cas contraire, je dirai que cette solution est instable.

Un cas particulier intéressant est celui où deux ou plusieurs des exposants caractéristiques α sont égaux entre eux. Dans ce cas les intégrales des équations (2) ne peuvent plus se mettre sous la forme (3). Si par exemple

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

les équations (2) admettraient deux intégrales particulières qui s'écriraient

$$\xi_i = e^{\alpha_1 t} S_{i.1}$$

et

$$\xi_i = t e^{\alpha_1 t} S_{i.1} + e^{\alpha_1 t} S_{i.2},$$

les $S_{i.1}$ et les $S_{i.2}$ étant des fonctions périodiques de t.

Si trois des exposants caractéristiques étaient égaux entre eux, on verrait apparaître, non seulement t, mais encore t^2 en dehors des signes trigonométriques et exponentiels.

Supposons que le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) de telle sorte que les fonctions X_i ne dépendent pas de cette variable; supposons de plus que ces équations (1) admettent une intégrale

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C. \tag{4}$$

Il est aisé de voir que dans ce cas deux des exposants caractéristiques sont nuls.

On se trouve donc alors dans le cas d'exception que nous venons de signaler; mais il n'en résulte pas de difficulté; il est aisé en effet à l'aide de l'intégrale (4) d'abaisser d'une unité l'ordre des équations (1). Il n'y a plus alors que $n - 1$ exposants caractéristiques et il n'y en a plus qu'un qui soit nul.

Nous allons maintenant envisager un cas particulier qui est celui où les équations (1) ont la forme des équations de la dynamique. Ecrivons-les donc sous la forme:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1'}$$

F étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$; nous pourrons supposer, soit que F est indépendant de t; soit que F dépend non seulement des x et des y, mais encore de t, et que par rapport à cette dernière variable, c'est une fonction périodique de période 2π.

Supposons que les équations (1') admettent une solution périodique de période 2π:

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t),$$

et formons les équations aux variations en posant:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i.$$

Nous avons vu dans le chapitre II que l'intégrale double:

$$\iint (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2 + \ldots + dx_n dy_n)$$

est un invariant intégral, ou (ce qui revient au même) que si ξ_i, η_i et ξ_i', η_i' sont deux solutions particulières quelconques des équations aux variations, on a

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) = \text{const.}$$

Je dis qu'il en résulte que les exposants caractéristiques sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Soient en effet ξ_i^0 et η_i^0 les valeurs initiales de ξ_i et de η_i pour $t = 0$ dans une des équations aux variations; soient ξ_i^1 et η_i^1 les valeurs correspondantes de ξ_i et de η_i pour $t = 2\pi$. Il est clair que les ξ_i^1 et les η_i^1 seront des fonctions linéaires des ξ_i^0 et des η_i^0 de telle sorte que la substitution:

$$T = (\xi_i^0, \eta_i^0; \xi_i^1, \eta_i^1)$$

sera une substitution linéaire.

Soit:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1.2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2.2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n.1} & a_{2n.2} & \ldots & a_{2n.2n} \end{vmatrix}$$

le tableau des coëfficients de cette substitution linéaire.

Formons l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1.2n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2.2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n.1} & a_{2n.2} & \dots & a_{2n.2n}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Les $2n$ racines de cette équation seront ce qu'on appelle les $2n$ multiplicateurs de la substitution linéaire T. Mais cette substitution linéaire T ne peut pas être quelconque. Il faut qu'elle n'altère pas la forme bilinéaire:

$$\sum(\xi_i\eta'_i - \xi'_i\eta_i).$$

Pour cela, l'équation en λ doit être réciproque. Si donc on pose:

$$\lambda = e^{2\alpha\pi},$$

les quantités α devront être deux à deux égales et de signe contraire.

C. Q. F. D.

Il y aura donc en général n quantités α^2 distinctes. Nous les appellerons les *coëfficients de stabilité* de la solution périodique considérée.

Si ces n coëfficients sont tous réels et négatifs, la solution périodique sera stable, car les quantités ξ_i et η_i resteront inférieures à une limite donnée.

Il ne faut pas toutefois entendre ce mot de stabilité au sens absolu. En effet, nous avons négligé les carrés des ξ et des η et rien ne prouve qu'en tenant compte de ces carrés, le résultat ne serait pas changé. Mais nous pouvons dire au moins que les ξ et η, s'ils sont originairement très petits resteront très petits pendant très longtemps. Nous pouvons exprimer ce fait en disant que la solution périodique jouit, sinon de la stabilité *séculaire*, du moins de la stabilité *temporaire*.

On peut se rendre compte de cette stabilité en se reportant aux valeurs des ξ_i; on trouve en effet, pour la solution générale des équations aux variations:

$$\xi_i = \sum A_k e^{\alpha_k t} S_{ik},$$

les A_k étant des coëfficients constants et les S_{ik} des séries trigonométriques.

Or si α_k^2 est réel négatif, on trouve

$$e^{\alpha_k t} = \cos t\sqrt{-\alpha_k^2} + i\sin t\sqrt{-\alpha_k^2},$$

de sorte que ξ_i s'exprime trigonométriquement.

Au contraire si un ou plusieurs des coëfficients de stabilité devient réel positif ou imaginaire, la solution périodique considérée ne jouit plus de la stabilité temporaire.

On voit aisément en effet que ξ_i est alors représenté par une série dont le terme général est de la forme:

$$Ae^{ht}\cos(kt + mt + l)$$

où $(h + ik)^2$ est un des coëfficients de stabilité, où m est un entier et l et A des constantes quelconques. Le défaut de stabilité se trouve ainsi mis en évidence.

Si deux des coëfficients de stabilité deviennent égaux entre eux, ou si l'un d'eux devient nul, on trouvera en général dans la série qui représente ξ_i des termes de la forme:

$$Ate^{ht}\cos(kt + mt + l) \quad \text{ou} \quad At\cos(mt + l).$$

En résumé, ξ_i peut dans tous les cas être représenté par une série toujours convergente. Dans cette série le temps peut entrer sous le signe sinus ou cosinus, ou par l'exponentielle e^{ht}, ou enfin en dehors des signes trigonométriques ou exponentiels.

Si tous les coëfficients de stabilité sont réels, négatifs et distincts, le temps n'apparaîtra que sous les signes sinus et cosinus et il y aura stabilité temporaire.

Si l'un des coefficients est positif ou imaginaire, le temps apparaîtra sous un signe exponentiel; si deux des coëfficients sont égaux ou que l'un d'eux soit nul, le temps apparaît en dehors de tout signe trigonométrique ou exponentiel.

Si donc tous les coëfficients ne sont pas réels, négatifs et distincts, il n'y a pas en général de stabilité temporaire.

Toutes les fois que F ne dépend pas du temps t, l'un des n coëfficients de stabilité est nul; car d'une part le temps n'entre pas explicitement dans les équations différentielles; d'autre part ces équations admettent une intégrale

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) = \text{const.}$$

Nous nous trouvons donc dans le cas dont nous avons parlé plus haut et où deux des exposants caractéristiques sont nuls. Mais, comme nous l'avons dit, cela ne peut créer une difficulté parce que l'on peut, à l'aide de l'intégrale connue abaisser à $2n - 1$ l'ordre des équations (1'). Il n'y a plus alors que $2n - 1$ exposants caractéristiques; l'un d'eux est nul et les $2n - 2$ autres, aux carrés desquels on peut conserver le nom de coëfficients de stabilité, sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Reprenons le déterminant que nous avons eu à envisager dans le paragraphe précédent.

Nous avons dans ce paragraphe envisagé d'abord le cas où les équations (1) dépendent du temps t et d'un paramètre μ, et admettent pour $\mu = 0$ une solution périodique et une seule. Nous avons vu que si le déterminant fonctionnel:

$$\Delta = \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} \gtrless 0$$

les équations admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de μ.

Ce déterminant peut s'écrire:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - 1 & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - 1 & \cdots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - 1 \end{vmatrix}.$$

Or les exposants caractéristiques α sont donnés par l'équation:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - e^{2\alpha\pi} & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - e^{2\alpha\pi} & \cdots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - e^{2\alpha\pi} \end{vmatrix} = 0.$$

Dire que Δ est nul, c'est donc dire que l'un des exposants caractéristiques est nul de sorte que nous pouvons énoncer de la façon suivante le premier des théorèmes démontrés au paragraphe précédent.

Si les équations (1) *qui dépendent d'un paramètre* μ *admettent pour* $\mu = 0$ *une solution périodique dont aucun des exposants caractéristiques ne soit nul, elles admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de* μ.

§ 3. *Solutions périodiques des équations de la dynamique.*

Je prendrai, pour fixer les idées, les équations de la dynamique avec trois degrés de liberté, mais ce que je vais dire s'appliquerait évidemment au cas général. J'écrirai donc mes équations sous la forme:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{dF}{dy_3}, \\ &\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}, \quad \frac{dy_3}{dt} = -\frac{dF}{dx_3}, \end{aligned}$$

F étant une fonction uniforme quelconque des x et des y, indépendante de t.

Je supposerai ensuite que x_1, x_2 et x_3 sont des variables linéaires, mais que y_1, y_2 et y_3 sont des variables angulaires, c'est à dire que F est une fonction periodique de y_1, y_2 et y_3 avec la période 2π, de telle façon que la situation du système ne change pas quand une ou plusieurs des trois quantités y augmente d'un multiple de 2π. (Cf. chapitre I.)

Je supposerai de plus que F dépend d'un paramètre arbitraire μ et peut se développer suivant les puissances croissantes de ce paramètre de telle sorte que l'on ait:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \mu^3 F_3 + \ldots.$$

Je supposerai enfin que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y de telle sorte que:

$$\frac{dF_0}{dy_1} = \frac{dF_0}{dy_2} = \frac{dF_0}{dy_3} = 0.$$

Rien n'est plus simple alors que d'intégrer les équations (1) quand $\mu = 0$; elles s'écrivent en effet:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = 0,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_2}, \qquad \frac{dy_3}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_3}.$$

Ces équations montrent d'abord que x_1, x_2 et x_3 sont des constantes. On en conclut que

$$-\frac{dF_0}{dx_1}, \quad -\frac{dF_0}{dx_2}, \quad -\frac{dF_0}{dx_3}$$

qui ne dépendent que de x_1, x_2 et x_3 sont aussi des constantes que nous appellerons pour abréger n_1, n_2 et n_3 et qui sont complètement définies quand on se donne les valeurs constantes de x_1, x_2 et x_3. Il vient alors:

$$y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad y_3 = n_3 t + \varpi_3,$$

ϖ_1, ϖ_2 et ϖ_3 étant de nouvelles constantes d'intégration.

Quelle est la condition pour que la solution ainsi trouvée soit périodique et de période T. Il faut que si l'on change t en $t + T$, y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π, c'est à dire que:

$$n_1 T, \; n_2 T \quad \text{et} \quad n_3 T$$

soient des multiples de 2π.

Ainsi pour que la solution que nous venons de trouver soit périodique, il faut et il suffit que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 soient commensurables entre eux.

Quant à la période T, ce sera le plus petit commun multiple des trois quantités:

$$\frac{2\pi}{n_1}, \frac{2\pi}{n_2} \text{ et } \frac{2\pi}{n_3}.$$

Nous exclurons, au moins provisoirement de nos recherches, le cas où les trois fonctions $\frac{dF_0}{dx_1}$, $\frac{dF_0}{dx_2}$ et $\frac{dF_0}{dx_3}$ ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Si on laisse ce cas de côté, on peut toujours choisir x_1, x_2 et x_3 de telle façon que n_1, n_2 et n_3 aient telles valeurs que l'on veut, au moins dans un certain domaine. Il y aura donc une infinité de choix possibles pour les trois constantes x_1, x_2 et x_3 qui conduiront à des solutions périodiques.

Je me propose de rechercher s'il existe encore de solutions périodiques de période T lorsque μ n'est plus égal à o.

Pour cela, je vais chercher à satisfaire aux équations (1) en faisant[1]

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \dots, \\
x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \dots, \\
x_3 &= x_3^0 + \mu x_3^1 + \mu^2 x_3^2 + \dots, \\
y_1 &= y_1^0 + \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \dots, \\
y_2 &= y_2^0 + \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \dots, \\
y_3 &= y_3^0 + \mu y_3^1 + \mu^2 y_3^2 + \dots .
\end{aligned} \tag{2}$$

Dans ces formules x_1^0, x_2^0. x_3^0 désignent les valeurs constantes que j'avais été conduit plus haut à attribuer à x_1, x_2 et x_3 quand je supposais $\mu = 0$ et qui sont telles que:

$$\frac{d}{dx_1^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_1, \quad \frac{d}{dx_2^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_2, \quad \frac{d}{dx_3^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_3.$$

[1] Les chiffres placés en haut et à droite des lettres x et y dans les équations (2) sont des indices et non des exposants.

On a de plus:

$$y_i^0 = n_i t + \varpi_i.$$

Enfin les x_i^1, les y_i^1, les x_i^2, les y_i^2 etc. sont des fonctions du temps qu'il s'agira de déterminer et qui devront être périodiques de période T.

Dans F, à la place des x et des y, substituons leurs valeurs (2), puis développons F suivant les puissances croissantes de μ de telle sorte que l'on ait:

$$F = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots.$$

Il est clair que

$$\Phi_0 = F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

ne dépend que des x_i^0; que

$$(3) \qquad \Phi_1 = F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0) + x_1^1\frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1\frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^1\frac{dF_0}{dx_3^0}$$

ne dépend que des x_i^0, des y_i^0 et des x_i^1; que Φ_2 ne dépend que des x_i^0, des y_i^0, des x_i^1, des y_i^1 et des x_i^2 etc.

Plus généralement, je puis écrire:

$$\Phi_k = \theta_k + x_1^k\frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^k\frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^k\frac{dF_0}{dx_3^0} = \theta_k - n_1x_1^k - n_2x_2^k - n_3x_3^k,$$

où θ_k dépend seulement

des x_i^0, des x_i^1, ... et des x_i^{k-1}

des y_i^0, des y_i^1, ... et des y_i^{k-1}.

Je puis ajouter que par rapport à y_1^0, y_2^0, y_3^0 la fonction θ_k est une fonction périodique de période 2π. L'équation (3) montre que $\theta_1 = F_1$.

Cela posé les équations différentielles peuvent s'écrire, en égalant les puissances de même nom de μ:

$$\frac{dx_1^0}{dt} = \frac{dx_2^0}{dt} = \frac{dx_3^0}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_1^0}{dt} = n_1, \qquad \frac{dy_2^0}{dt} = n_2, \qquad \frac{dy_3^0}{dt} = n_3.$$

On trouve ensuite:

$$(4) \qquad \frac{dx_1^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_1^0}, \qquad \frac{dx_2^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_2^0}, \qquad \frac{dx_3^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_3^0}$$

et

$$(5)\qquad \frac{dy_1^1}{dt}=-\frac{d\Phi_1}{dx_1^0},\qquad \frac{dy_2^1}{dt}=-\frac{d\Phi_1}{dx_2^0},\qquad \frac{dy_3^1}{dt}=-\frac{d\Phi_1}{dx_3^0},$$

et plus généralement:

$$(4')\qquad \frac{dx_i^k}{dt}=\frac{d\Phi_k}{dy_i^0}$$

et:

$$(5')\qquad \frac{dy_i^k}{dt}=-\frac{d\Phi_k}{dx_i^0}=-\frac{d\Theta_k}{dx_i^0}-x_1^k\frac{d^2F_0}{dx_1^0dx_i^0}-x_2^k\frac{d^2F_0}{dx_2^0dx_i^0}-x_3^k\frac{d^2F_0}{dx_3^0dx_i^0}.$$

Intégrons d'abord les équations (4). Dans F_1 nous remplacerons y_1^0, y_2^0, y_3^0 par leurs valeurs:

$$n_1t+\varpi_1,\ n_2t+\varpi_2,\ n_3t+\varpi_3.$$

Nous pouvons d'ailleurs toujours choisir l'origine des temps de telle façon que ϖ_1 soit nul. Alors les seconds membres des équations (4) sont des fonctions périodiques de t de période T; ces seconds membres peuvent donc être développés en séries procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Pour que les valeurs de x_1^1, x_2^1 et x_3^1 tirées des équations (4) soient des fonctions périodiques de t, il faut et il suffit que ces séries ne contiennent pas de termes tout connus.

Je puis écrire en effet:

$$F_1=\Sigma A\sin(m_1y_1^0+m_2y_2^0+m_3y_3^0+h),$$

où m_1, m_2, m_3 sont des entiers positifs ou négatifs et où A et h sont des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0. J'écrirai pour abréger:

$$F_1=\Sigma A\sin\omega$$

en posant

$$\omega=m_1y_1^0+m_2y_2^0+m_3y_3^0+h.$$

Je trouverai alors

$$\frac{dF_1}{dy_1^0}=\Sigma Am_1\cos\omega,\qquad \frac{dF_1}{dy_2^0}=\Sigma Am_2\cos\omega,\qquad \frac{dF_1}{dy_3^0}=\Sigma Am_3\cos\omega$$

et

$$\omega = t(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) + h + m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3.$$

Parmi les termes de ces séries, je distinguerai ceux pour lesquels

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$$

et qui sont indépendants de t. Ces termes existent puisque nous avons supposé que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 sont commensurables entre eux.

Je poserai alors

$$\psi = \mathrm{S} A \sin \omega, \qquad (m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0\,,\ \omega = h + m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3)$$

la sommation représentée par le signe S s'étendant à tous les termes de F_1 pour lesquels le coëfficient de t est nul. Nous aurons alors:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \mathrm{S} A m_2 \cos \omega, \qquad \frac{d\psi}{d\varpi_3} = \mathrm{S} A m_3 \cos \omega.$$

Si donc on a:

$$(6) \qquad \frac{d\psi}{d\varpi_2} = \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0,$$

il viendra:

$$(7) \qquad \mathrm{S} A m_1 \cos \omega = 0, \qquad \mathrm{S} A m_2 \cos \omega = 0, \qquad \mathrm{S} A m_3 \cos \omega = 0.$$

La première des équations (7) est en effet une conséquence des deux autres, puisque en vertu de la relation $m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$, on a identiquement

$$n_1 \mathrm{S} A m_1 \cos \omega + n_2 \mathrm{S} A m_2 \cos \omega + n_3 \mathrm{S} A m_3 \cos \omega = 0.$$

Si donc les relations (6) sont satisfaites, les séries $\sum A m_i \cos \omega$ ne contiendront pas de terme tout connu, et les équations (4) nous donneront:

$$x_1^1 = \sum \frac{A m_1 \sin \omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_1^1, \qquad x_2^1 = \sum \frac{A m_2 \sin \omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_2^1,$$

$$x_3^1 = \sum \frac{A m_3 \sin \omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_3^1,$$

C_1^1, C_2^1 et C_3^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Il me reste à démontrer que l'on peut choisir les constantes ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux relations (6). La fonction ψ est une fonction périodique de ϖ_2 et de ϖ_3 qui ne change pas quand l'une de ces deux variables augmente de 2π. De plus elle est finie, elle aura donc au moins un maximum et un minimum. Il y a donc au moins deux manières de choisir ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux relations (6).

Je pourrais même ajouter qu'il y en a au moins quatre, sans pouvoir toutefois affirmer qu'il en est encore de même quand le nombre de degrés de liberté est supérieur à trois.

Je vais maintenant chercher à déterminer à l'aide des équations (5) les trois fonctions y_i^1 et les trois constantes C_i^1.

Nous pouvons regarder comme connus les x_i^0 et les y_i^0; les x_i^1 sont connus également aux constantes près C_i^1. Je puis donc écrire les équations (5) sous la forme suivante:

$$(8)\qquad \frac{dy_i^1}{dt} = H_i - C_1^1\frac{d^2F_0}{dx_1^0\,dx_i^0} - C_2^1\frac{d^2F_0}{dx_2^0\,dx_i^0} - C_3^1\frac{d^2F_0}{dx_3^0\,dx_i^0},$$

où les H_i représentent des fonctions entièrement connues développées en séries suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Les coefficients de C_1^1, C_2^1 et C_3^1 sont des constantes que l'on peut regarder comme connues.

Pour que la valeur de y_i^1 tirée de cette équation soit une fonction périodique de t, il faut et il suffit que dans le second membre le terme tout connu soit nul. Si donc H_i^0 désigne le terme tout connu de la série trigonométrique H_i, je devrai avoir:

$$(9)\qquad C_1^1\frac{d^2F_0}{dx_1^0\,dx_i^0} + C_2^1\frac{d^2F_0}{dx_2^0\,dx_i^0} + C_3^1\frac{d^2F_0}{dx_3^0\,dx_i^0} = H_i^0.$$

Les trois équations linéaires (9) déterminent les trois constantes C_1^1, C_2^1 et C_3^1.

Il n'y aurait d'exception que si le déterminant de ces trois équations était nul; c'est à dire si le *hessien* de F_0 par rapport à x_1^0, x_2^0 et x_3^0 était nul; nous exclurons ce cas.

Les équations (8) me donneront donc:

$$y_1^1 = \eta_1^1 + k_1^1,\qquad y_2^1 = \eta_2^1 + k_2^1,\qquad y_3^1 = \eta_3^1 + k_3^1,$$

les η_i^1 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les k_i^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Venons maintenant aux équations (4') en y faisant $k=2$ et $i=1, 2, 3$ et cherchons à déterminer à l'aide des trois équations ainsi obtenues, les trois fonctions x_i^2 et les trois constantes k_i^1.

Il est aisé de voir que nous avons:

$$\theta_2 = \Omega_2 + y_1^1 \frac{dF_1}{dy_1^0} + y_2^1 \frac{dF_1}{dy_2^0} + y_3^1 \frac{dF_1}{dy_3^0},$$

où Ω_2 dépend seulement des x_i^0, des y_i^0 et des x_i^1 et où l'on a, comme plus haut:

$$\frac{dF_1}{dy_i^0} = \sum A m_i \cos\omega.$$

Les équations (4') s'écrivent alors:

$$\frac{dx_i^2}{dt} = \frac{d\Omega_2}{dy_i^0} + \sum_k y_k^1 \frac{d^2F_1}{dy_k^0 dy_i^0}$$

ou

$$(10) \quad \frac{dx_i^2}{dt} = H_i' - k_1^1 \sum A m_1 m_i \sin\omega - k_2^1 \sum A m_2 m_i \sin\omega - k_3^1 \sum A m_3 m_i \sin\omega,$$

H_i' étant une fonction périodique de t, que l'on peut regarder comme entièrement connue. Pour que l'on puisse tirer de cette équation x_i^2 sous la forme d'une fonction périodique, il faut et il suffit que les seconds membres des équations (10), développés en séries trigonométriques, ne possèdent pas de termes tout connus. Nous devons donc disposer des quantités k_i^1 de manière à annuler ces termes tout connus. Nous serions ainsi conduits à trois équations linéaires entre les trois quantités k_i^1; mais comme le déterminant de ces trois équations est nul, il y a une petite difficulté et je suis forcé d'entrer dans quelques détails.

Nous allons d'abord supposer:

$$k_1^1 = 0;$$

nous n'aurons plus alors que deux inconnues k_2^1 et k_3^1 et trois équations à satisfaire; mais ces trois équations ne sont pas distinctes comme nous allons le voir.

Appelons en effet E_i le terme tout connu de H_i^1, ces trois équations s'écriront:

$$(11)\qquad \begin{aligned} E_1 &= k_2^1 \mathrm{S} A m_2 m_1 \sin\omega + k_3^1 \mathrm{S} A m_3 m_1 \sin\omega, \\ E_2 &= k_2^1 \mathrm{S} A m_2^2 \sin\omega \quad + k_3^1 \mathrm{S} A m_3 m_2 \sin\omega, \\ E_3 &= k_2^1 \mathrm{S} A m_2 m_3 \sin\omega + k_3^1 \mathrm{S} A m_3^2 \sin\omega, \end{aligned}$$

en conservant au signe de sommation S le même sens que plus haut. Je ne considérerai d'abord que les deux dernières des équations (11) que j'écrirai:

$$-E_2 = k_2^1 \frac{d\psi}{d\varpi_2^2} + k_3^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_2 d\varpi_3},$$

$$-E_3 = k_2^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_2 d\varpi_3} + k_3^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_3^2}.$$

De ces deux équations on peut tirer k_2^1 et k_3^1, à moins que le hessien de ψ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 ne soit nul. Si l'on donne aux k_i^1 les valeurs ainsi obtenues, les deux dernières équations (10) nous donneront x_2^2 et x_3^2 sous la forme suivante:

$$x_2^2 = \xi_2^2 + C_2^2, \qquad x_3^2 = \xi_3^2 + C_3^2,$$

les ξ_i^2 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les C_i^2 étant de nouvelles constantes d'intégration.

Pour trouver x_1^2 nous pouvons, au lieu d'employer la première des équations (10) nous servir des considérations suivantes:

Les équations (1) admettent une intégrale:

$$F = B,$$

B étant une constante d'intégration que je supposerai développée suivant les puissances de μ en écrivant:

$$B = B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \ldots,$$

de sorte que l'on a:

$$\Phi_0 = B_0, \qquad \Phi_1 = B_1, \qquad \Phi_2 = B_2, \ldots,$$

B_0, B_1, B_2 etc. étant autant de constantes différentes.

Le premier membre de l'équation:

$$\Phi_2 = B_2$$

dépend des x_i^0, des y_i^0, des x_i^1, des y_i^1, de x_2^2 et de x_3^2 qui sont des fonctions connues de t et de x_1^2 que nous n'avons pas encore calculé. De cette équation, nous pourrons donc tirer x_1^2 sous la forme suivante:

$$x_1^2 = \xi_1^2 + C_1^2.$$

ξ_1^2 sera une fonction périodique de t entièrement déterminée et C_1^2 est une constante qui dépend de B_2, de C_2^2 et de C_3^2.

Nous pouvons conclure de là que la première des équations (11) doit être satisfaite et par conséquent que ces trois équations (11) ne sont pas distinctes.

Prenons maintenant les équations (5′) et faisons-y $k = 2$; nous obtiendrons trois équations qui nous permettront de déterminer les constantes C_1^1, C_1^2 et C_1^3 et d'où l'on tirera en outre les y_i^2 sous la forme:

$$y_1^2 = \eta_1^2 + k_1^2, \qquad y_2^2 = \eta_2^2 + k_2^2, \qquad y_3^2 = \eta_3^2 + k_3^2,$$

les η étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les k étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Reprenons ensuite les équations (4′) en y faisant $k = 3$; si nous supposons $k_1^2 = 0$, nous pourrons tirer des trois équations ainsi obtenues, d'abord les deux constantes k_2^2 et k_3^2, puis les x_i^3 sous la forme:

$$x_i^3 = \xi_i^3 + C_i^3,$$

les ξ étant des fonctions périodiques connues de t et les C_i^3 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Et ainsi de suite.

Voilà un procédé pour trouver des séries ordonnées suivant les puissances de μ, périodiques de période T par rapport au temps et satisfaisant aux équations (1). *Ce procédé ne serait en défaut que si le hessien de F_0 par rapport aux x_i^0 était nul ou si le hessien de ψ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 était nul.*

On pourrait démontrer directement la convergence de ces séries par les procédés ordinaires du »calcul des limites» de Cauchy; mais d'autre part cette convergence est une conséquence nécessaire de l'existence même des solutions périodiques; je préfère donc employer le même raisonnement que dans ce paragraphe (1) pour établir cette existence.

Nous avons vu que les équations (1) admettent pour solution quand $\mu = 0$

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3,$$

$$y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad y_3 = n_3 t + \varpi_3,$$

les a et les ϖ étant des constantes d'intégration, et les n des fonctions des a.

Nous avons vu en outre que si

$$n_1 T, \, n_2 T, \, n_3 T$$

sont multiples de 2π, cette solution est périodique de période T.

Supposons maintenant que μ cesse d'être nul, et imaginons que, dans une certaine solution, les valeurs des x et des y pour $t = 0$ soient respectivement:

$$x_1 = a_1 + \delta a_1, \qquad x_2 = a_2 + \delta a_1, \qquad x_3 = a_3 + \delta a_3,$$

$$y_1 = \varpi_1 + \delta\varpi_1, \qquad y_2 = \varpi_2 + \delta\varpi_2, \qquad y_3 = \varpi_3 + \delta\varpi_3.$$

Supposons que, dans cette même solution, les valeurs des x et des y pour $t = T$ soient

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \delta a_1 + \Delta a_1, \\ x_2 &= a_2 + \delta a_2 + \Delta a_2, \\ x_3 &= a_3 + \delta a_3 + \Delta a_3, \\ y_1 &= \varpi_1 + n_1 T + \delta\varpi_1 + \Delta\varpi_1, \\ y_2 &= \varpi_2 + n_2 T + \delta\varpi_2 + \Delta\varpi_2, \\ y_3 &= \varpi_3 + n_3 T + \delta\varpi_3 + \Delta\varpi_3. \end{aligned}$$

La condition pour que cette solution soit périodique de période T c'est que l'on ait:

$$(12) \qquad \Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = \Delta\varpi_1 = \Delta\varpi_2 = \Delta\varpi_3 = 0.$$

Les six équations (12) ne sont pas distinctes. En effet, comme $F = \text{const.}$ est une intégrale des équations (1), et que d'ailleurs F est périodique par rapport aux y, on a:

$$F(a_i + \delta a_i, \varpi_i + \delta\varpi_i) = F(a_i + \delta a_i + \Delta a_i, \varpi_i + n_i T + \delta\varpi_i + \Delta\varpi_i)$$
$$= F(a_i + \delta a_i + \Delta a_i, \varpi_i + \delta\varpi_i + \Delta\varpi_i).$$

Il nous suffira donc de satisfaire à cinq des équations (12). Je supposerai de plus:

$$\varpi_1 = \delta\varpi_1 = 0.$$

Il est aisé de voir que les Δa_i et les $\Delta\varpi_i$ sont des fonctions holomorphes de μ, des δa_i et des $\delta\varpi_i$ s'annulant quand toutes ces variables s'annulent.

Il s'agit donc de démontrer que l'on peut tirer des cinq dernières équations (12) δa_1, δa_2, δa_3, $\delta\varpi_2$ et $\delta\varpi_3$ en fonctions de μ.

Remarquons que quand μ est nul, on a

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = 0.$$

Par conséquent Δa_1, Δa_2 et Δa_3, développés suivant les puissances de μ, des δa_i et des $\delta\varpi_i$, contiennent μ en facteur. Nous supprimerons ce facteur μ, et nous écrirons par conséquent les cinq équations (12) que nous avons à résoudre sous la forme:

$$(13) \qquad \frac{\Delta a_2}{\mu} = \frac{\Delta a_3}{\mu} = \Delta\varpi_1 = \Delta\varpi_2 = \Delta\varpi_3 = 0.$$

Il est aisé de voir que si dans les deux premières équations (13) on fait $\mu = 0$, ces équations se ramènent aux relations (6)

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0.$$

Nous choisirons donc ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire à ces relations. Quand on aura choisi de la sorte ϖ_2 et ϖ_3, on verra que les équations (13) sont satisfaites quand on y fait à la fois:

$$\mu = \delta\varpi_2 = \delta\varpi_3 = \delta a_1 = \delta a_2 = \delta a_3 = 0.$$

Nous pourrons donc tirer des équations (13) les cinq inconnues δa_i

et $\delta\varpi_i$ sous la forme de fonctions holomorphes de μ, s'annulant avec μ. Il n'y aurait d'exception que si le déterminant fonctionnel:

$$\frac{\partial\left(\frac{\Delta a_2}{\mu}, \frac{\Delta a_3}{\mu}, \Delta\varpi_1, \Delta\varpi_2, \Delta\varpi_3\right)}{\partial(\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \delta\varpi_2, \delta\varpi_3)}$$

était nul. Mais pour $\mu = 0$, $\Delta\varpi_1$, $\Delta\varpi_2$ et $\Delta\varpi_3$ sont indépendants de $\delta\varpi_2$ et de $\delta\varpi_3$, de sorte que ce déterminant fonctionnel est le produit de deux autres:

$$\frac{\partial\left(\frac{\Delta a_2}{\mu}, \frac{\Delta a_3}{\mu}\right)}{\partial(\delta\varpi_2, \delta\varpi_3)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\Delta\varpi_1, \Delta\varpi_2, \Delta\varpi_3)}{\partial(\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3)}.$$

Le premier de ces déterminants est égal au hessien de ψ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 et le second au hessien de F_0 par rapport à x_1^0, x_2^0 et x_3^0.

Si donc aucun de ces deux hessiens n'est nul, il sera possible de satisfaire aux cinq équations (13) et par conséquent pour des valeurs suffisamment petites de μ, il existera une solution périodique de période T.

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant chercher à déterminer, non plus seulement les solutions périodiques de période T, mais les solutions de période peu différente de T. Nous avons pris pour point de départ les trois nombres n_1, n_2, n_3; nous aurions pu tout aussi bien choisir trois autres nombres n_1', n_2', n_3', pourvu qu'ils soient commensurables entre eux, et nous serions arrivés à une autre solution périodique dont la période T' aurait été le plus petit commun multiple de $\frac{2\pi}{n_1'}, \frac{2\pi}{n_2'}, \frac{2\pi}{n_3'}$.

Si nous prenons en particulier:

$$n_1' = n_1(1 + \varepsilon), \qquad n_2' = n_2(1 + \varepsilon), \qquad n_3' = n_3(1 + \varepsilon)$$

les trois nombres n_1', n_2', n_3' seront commensurables entre eux puisqu'ils sont proportionnels aux trois nombres n_1, n_2 et n_3.

Ils nous conduiront donc à une solution périodique de période:

$$T' = \frac{T}{1 + \varepsilon}$$

de telle façon que nous aurons:

$$(14) \qquad x_i = \varphi_i(t, \mu, \varepsilon), \qquad y_i = \varphi'_i(t, \mu, \varepsilon),$$

les φ_i et les φ'_i étant des fonctions développables suivant les puissances de μ et de ε, et périodiques en t, mais de façon que la période dépende de ε.

Si dans F nous remplaçons les x_i et les y_i par leurs valeurs (14), F doit devenir une constante indépendante du temps (puisque $F =$ const. est une des intégrales des équations (1)). Mais cette constante qui est dite constante des forces vives, dépendra de μ et de ε et pourra être développée suivant les puissances croissantes de ces variables.

Si la constante des forces vives B est une donnée de la question, l'équation

$$F(\mu, \varepsilon) = B$$

peut être regardée comme une relation qui lie ε à μ. Si donc nous nous donnons arbitrairement B, il existera toujours une solution périodique quelle que soit la valeur choisie pour cette constante, mais la période dépendra de ε et par conséquent de μ.

Un cas plus particulier que celui que nous venons de traiter en détail est celui où il n'y a que deux degrés de liberté. F ne dépend alors que de quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2 et la fonction ψ ne dépend plus que d'une seule variable ϖ_2. Les relations (6) se réduisent alors à

$$(15) \qquad \frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0$$

et le hessien de ψ se réduit à $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$. D'où cette conclusion:

A chacune des racines simples de l'équation (15) correspond une solution périodique des équations (1), qui existe pour toutes les valeurs de μ suffisamment petites.

Je pourrais même ajouter qu'il en est encore de même pour chacune des racines d'ordre impair.

Ce que nous venons de dire s'applique en particulier à une équation que l'on rencontre quelquefois en Mécanique Céleste et dont plusieurs géomètres se sont déjà occupés. Cette équation est la suivante:

$$(16) \qquad \frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^3 = \mu R(\rho, t).$$

n et m sont des constantes, μ est un paramètre très petit et R est une fonction de ρ et de t, développée suivant les puissances croissantes de ρ et périodique par rapport à t.

Pour bien nous en rendre compte, il faut d'abord ramener l'équation (16) à la forme canonique des équations de la dynamique. Cela se fera en posant:

$$\xi = t, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \qquad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2\rho^2}{2} + \frac{m\rho^4}{4} - \mu\int R(\rho, \xi)d\rho + \eta,$$

ξ et η étant deux nouvelles variables auxiliaires et l'intégrale $\int R(\rho, \xi)d\rho$ étant calculée en regardant ξ comme une constante. On trouve alors:

$$(17) \qquad \frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta},$$

auxquelles nous pourrons adjoindre (η étant restée jusqu'ici complètement arbitraire) l'équation suivante:

$$(17) \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi}$$

qui complète un système canonique.

Quand $\mu = 0$ l'intégrale générale de l'équation (16) s'écrit

$$(18) \qquad \rho = h\,\mathrm{sn}(gt + \varpi), \qquad \sigma = hg\,\mathrm{cn}(gt + \varpi)\,\mathrm{dn}(gt + \varpi)$$

où g et ϖ sont deux constantes d'intégration et où h, ainsi que le module du sinus amplitude sont deux fonctions de g faciles à déterminer.

Nous allons changer de variables; nous prendrons au lieu de ξ, η, ρ et σ, quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2, définies comme il suit. Nous aurons d'abord:

$$x_2 = \eta, \qquad y_2 = \xi.$$

Des équations (18) qui donnent ρ et σ en fonctions de g et de $gt + \varpi$ pour $\mu = 0$, on peut tirer g et $gt + \varpi$ en fonctions de ρ et de σ. Il vient:

$$g = \chi_1(\rho, \sigma), \qquad gt + \varpi = \chi_2(\rho, \sigma).$$

Nous prendrons alors pour x_1 une certaine fonction de $\chi_1(\rho, \sigma)$ et pour y_1

$$y_1 = \frac{k}{2\pi} \chi_2(\rho, \sigma),$$

k désignant la période réelle de $\mathrm{sn}(x)$.

Si alors x_1 a été convenablement choisi en fonction de χ_1 les équations conserveront leur forme canonique

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{dF}{dx_2}, \quad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{dF}{dy_2}.$$

Il est clair d'ailleurs que pour $\mu = 0$, F ne dépend que de x_1 et de x_2 et non de y_1 et de y_2.

Nous nous trouvons donc bien dans les conditions énoncées au début de ce paragraphe.

L'équation (16) a surtout été étudiée par les géomètres dans le cas où $m = 0$; il semble au premier abord qu'elle est alors beaucoup plus simple. Ce n'est qu'une illusion; en effet, si l'on suppose $m = 0$, on se trouve dans le cas où le hessien de F_0 est nul et ce que nous avons dit dans ce paragraphe n'est plus applicable sans modification.

Ce n'est pas que les particularités que présente l'équation (16) dans le cas général ne soient encore vraies pour $m = 0$, toutes les fois du moins que μ n'est pas nul. La seule différence, c'est qu'on ne peut les mettre en évidence par un développement suivant les puissances de μ. L'apparente simplification qu'a reçue ainsi l'équation (16) n'a fait qu'augmenter les difficultés. Il est vrai qu'on est conduit quand $m = 0$, a des séries beaucoup plus simples que dans le cas général, mais ces séries ne convergent pas comme nous le verrons dans la suite.

§ 4. *Calcul des exposants caractéristiques.*

Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i=1,2,3)$$

Supposons qu'on ait trouvé une solution périodique de ces équations:

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t)$$

et proposons-nous de déterminer les exposants caractéristiques de cette solution.

Pour cela nous poserons:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i,$$

puis nous formerons les équations aux variations des équations (1) que nous écrirons:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k, \end{aligned} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

et nous chercherons à intégrer ces équations en faisant:

$$(3)\qquad \xi_i = e^{\alpha t} S_i, \qquad \eta_i = e^{\alpha t} T_i,$$

S_i et T_i étant des fonctions périodiques de t. Nous savons qu'il existe en général six solutions particulières de cette forme (les équations linéaires (2) étant du sixième ordre). Mais il importe d'observer, que dans le cas particulier qui nous occupe, il n'y a plus que quatre solutions particulières qui conservent cette forme, parce que deux des exposants caractéristiques sont nuls, et qu'il y a par conséquent deux solutions particulières d'une forme dégénérescente.

Cela posé, supposons d'abord $\mu = 0$, alors F se réduit à F_0 comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent et ne dépend plus que de x_1^0, x_2^0 et x_3^0.

Alors les équations (2) se réduisent à:

$$(2')\qquad \frac{d\xi_i}{dt} = 0, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0}\xi_k.$$

Les coëfficients de ξ_k dans la seconde équation (2') sont des constantes.

Nous prendrons comme solutions des équations (2')

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \qquad \eta_1 = \eta_1^0, \qquad \eta_2 = \eta_2^0, \qquad \eta_3 = \eta_3^0,$$

η_1^0, η_2^0 et η_3^0 étant trois constantes d'intégration.

Cette solution n'est pas la plus générale puisqu'elle ne contient que trois constantes arbitraires, mais c'est la plus générale parmi celles que l'on peut ramener à la forme (3). Nous voyons ainsi que pour $\mu = 0$, les six exposants caractéristiques sont nuls.

Ne supposons plus maintenant que μ soit nul. Nous allons maintenant chercher à développer α, S_i et T_i, non pas suivant les puissances croissantes de μ, mais suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ en écrivant:

$$\alpha = \alpha_1\sqrt{\mu} + \alpha_2\mu + \alpha_3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,$$

$$S_i = S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + S_i^2\mu + S_i^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots,$$

$$T_i = T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + T_i^2\mu + T_i^3\mu\sqrt{\mu} + \ldots.$$

Alors on a:

$$S_i^0 = 0, \qquad T_i^0 = \eta_i^0$$

et:

$$\xi_i = e^{\alpha t}(S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + \ldots), \qquad \eta_i = e^{\alpha t}(T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + \ldots),$$

$$(4) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\begin{array}{l} \dfrac{dS_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\dfrac{dS_i^1}{dt} + \ldots \\ + \alpha S_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}S_i^1 + \ldots \end{array}\right|, \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\begin{array}{l} \dfrac{dT_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\dfrac{dT_i^1}{dt} + \ldots \\ + \alpha T_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}T_i^1 + \ldots \end{array}\right|.$$

Nous développerons d'autre part les dérivées secondes de F qui entrent comme coëfficients dans les équations (2) en écrivant:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2F}{dy_i dx_k} &= A_{ik}^0 + \mu A_{ik}^2 + \mu^2 A_{ik}^4 + \ldots, \\ \frac{d^2F}{dy_i dy_k} &= B_{ik}^0 + \mu B_{ik}^2 + \mu^2 B_{ik}^4 + \ldots, \\ -\frac{d^2F}{dx_i dx_k} &= C_{ik}^0 + \mu C_{ik}^2 + \mu^2 C_{ik}^4 + \ldots, \\ -\frac{d^2F}{dx_i dy_k} &= D_{ik}^0 + \mu D_{ik}^2 + \mu^2 D_{ik}^4 + \ldots. \end{aligned}$$

Ces développements ne contiennent que des puissances entières de μ et ne possèdent pas comme les développements (4) des termes dépendants de $\sqrt{\mu}$.

On observera que:

$$(6)\qquad \begin{gathered} A^0_{ik} = B^0_{ik} = D^0_{ik} = 0, \\ C^m_{ik} = C^m_{ki}, \qquad B^m_{ik} = B^m_{ki}, \qquad A^m_{ik} = -D^m_{ki}. \end{gathered}$$

Nous substituons dans les équations (2) les valeurs (4) et (5) à la place des ξ, des η, de leurs dérivées et des dérivées secondes de F. Dans les expressions (4) je suppose que α soit développé suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, sauf lorsque cette quantité α entre dans un facteur exponentiel $e^{\alpha t}$.

Nous identifierons ensuite en égalant les puissances semblables de $\sqrt{\mu}$ et nous obtiendrons ainsi une série d'équations qui permettent de déterminer successivement:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \text{ etc. } \quad S^0_i, S^1_i, \ldots, T^0_i, T^1_i, \ldots.$$

Je n'écrirai que les premières de ces équations obtenues en égalant successivement les termes tout connus, les termes en $\sqrt{\mu}$, les termes en μ etc. Je fais d'ailleurs disparaître le facteur $e^{\alpha t}$ qui se trouve partout.

Egalons d'abord les termes en $\sqrt{\mu}$, il vient:

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{dS^1_i}{dt} + \alpha_1 S^0_i &= \Sigma_k A^0_{ik} S^1_k + \Sigma_k B^0_{ik} T^1_k, \\ \frac{dT^1_i}{dt} + \alpha_1 T^0_i &= \Sigma_k C^0_{ik} S^1_k + \Sigma_k D^0_{ik} T^1_k. \end{aligned}$$

Egalons les termes en μ, il vient:

$$(8)\qquad \frac{dS^2_i}{dt} + \alpha_1 S^1_i + \alpha_2 S^0_i = \Sigma_k (A^0_{ik} S^2_k + A^2_{ik} S^0_k + B^0_{ik} T^2_k + B^2_{ik} T^0_k), \qquad (i=1,2,3)$$

outre trois équations analogues donnant les $\frac{dT^2_i}{dt}$.

Si l'on tient compte maintenant des relations (6), les équations (7) deviennent:

$$\frac{dS^1_i}{dt} = 0, \qquad \frac{dT^1_i}{dt} + \alpha_1 \eta^0_i = \Sigma_k C^0_{ik} S^1_k.$$

La première de ces équations montre que S^1_1, S^1_2 et S^1_3 sont des constantes. Quant à la seconde, elle montre que $\frac{dT_i^1}{dt}$ est une constante; mais comme T_i^1 doit être une fonction périodique, cette constante doit être nulle, de sorte qu'on a:

$$(9) \qquad \alpha_1 \eta_i^0 = C_{i1}^0 S_1^1 + C_{i2}^0 S_2^1 + C_{i3}^0 S_3^1,$$

ce qui établit trois relations entre les trois constantes η_i^0, les trois constantes S_i^1 et la quantité inconnue α_1.

De son côté l'équation (8) s'écrira:

$$\frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 = \sum_k B_{ik}^2 \eta_k^0.$$

Les B_{ik}^2 sont des fonctions périodiques de t; développons-les d'après la formule de Fourier et soit b_{ik} le terme tout connu de B_{ik}^2. Il viendra:

$$\alpha_1 S_i^1 = \sum_k b_{ik} \eta_k^0$$

ou en tenant compte des équations (9), il viendra:

$$(10) \qquad \alpha_1^2 S_i^1 = \sum_{k=1}^{h=3} b_{ik}(C_{k1}^0 S_1^1 + C_{k2}^0 S_2^1 + C_{k3}^0 S_3^1).$$

En faisant dans cette équation (10) $i = 1, 2$ et 3, nous aurons trois relations linéaires et homogènes entre les trois constantes S_i^1. En éliminant ces trois constantes, nous aurons alors une équation du 3^me^ degré qui déterminera α_1^2.

Si nous posons pour abréger

$$e_{ik} = b_{i1} C_{1k}^0 + b_{i2} C_{2k}^0 + b_{i3} C_{3k}^0,$$

l'équation due à cette élimination s'écrira:

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} e_{11} - \alpha_1^2 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - \alpha_1^2 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle peut encore s'écrire:

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & C^0_{11} & C^0_{12} & C^0_{13} \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & C^0_{21} & C^0_{22} & C^0_{23} \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & C^0_{31} & C^0_{32} & C^0_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & -\alpha_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La détermination de α_1 est la seule partie du calcul qui présente quelque difficulté.

Les équations analogues à (7) et à (8) formées en égalant dans les équations (2) les coëfficients des puissances semblables de $\sqrt{\mu}$, permettent ensuite de déterminer sans peine les α_k, les S_i^m et les T_i^m. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

Les exposants caractéristiques α sont développables suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$. [1]

Concentrant donc toute notre attention sur la détermination de α_1, nous allons étudier spécialement l'équation (11). Nous devons chercher d'abord à déterminer les quantités C^0_{ik} et b_{ik}.

On a évidemment:

$$C^0_{ik} = -\frac{d^2F_0}{dx_i^0\,dx_k^0}$$

et

$$B^2_{ik} = \frac{d^2F_1}{dy_i^0\,dy_k^0}$$

ou

$$B^2_{ik} = -\sum A m_i m_k \sin\omega \qquad (\omega = m_1y_1^0 + m_2y_2^0 + m_3y_3^0 + h)$$

et

$$b_{ik} = -\mathrm{S} A m_i m_k \sin\omega.$$

D'après les conventions faites dans le paragraphe précédent, la sommation représentée par le signe Σ s'étend à tous les termes, quelles que

[1] Voir *Note H.*

soient les valeurs entières attribuées à m_1, m_2 et m_3. La sommation représentée par le signe S s'étend seulement aux termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 = 0.$$

Sous le signe S nous avons par conséquent:

$$\omega = m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3 + h.$$

Cela nous permet d'écrire

$$b_{ik} = \frac{d^2\psi}{d\varpi_i d\varpi_k} \qquad \text{(pour } i \text{ et } k = 2 \text{ ou } 3).$$

Si un ou deux des indices i et k sont égaux à 1, b_{ik} sera défini par la relation

$$n_1 b_{i1} + n_2 b_{i2} + n_3 b_{i3} = 0.$$

Nous allons à l'aide de cette dernière relation, transformer l'équation (11) de façon à mettre en évidence l'existence de deux racines nulles et à réduire l'équation au quatrième degré.

Je trouve en effet par une simple transformation de déterminant et en divisant par α_1^2:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & b_{23} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & b_{33} & b_{32} & 0 \\ C_{13}^0 & C_{23}^0 & C_{33}^0 & -\alpha_1 & 0 & n_3 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & C_{32}^0 & 0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & C_{31}^0 & 0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas particulier où l'on n'a plus que deux degrés de liberté, cette équation s'écrit:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & \dfrac{d^2\psi}{d\varpi_2^2} & 0 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou:

$$n_1^2\alpha_1^2 = \frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}(n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0).$$

L'expression $n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0$ ne dépend que de x_1^0 et x_2^0 ou si l'on veut de n_1 et de n_2. Quand nous nous serons donné les deux nombres n_1 et n_2 dont le rapport doit être commensurable, nous pourrons regarder $n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0$ comme une constante donnée. Alors le signe de α_1^2 dépend seulement de celui de $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$.

Quand on s'est donné n_1 et n_2, on forme l'équation:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0, \tag{15}$$

qui est l'équation (15) du paragraphe précédent. Nous avons vu dans ce paragraphe qu'à chaque racine de cette équation correspond une solution périodique.

Considérons le cas général où l'équation (15) n'a que des racines simples; chacune de ces racines correspond alors à un maximum ou à un minimum de ψ. Mais la fonction ψ étant périodique présente dans chaque période au moins un maximum et un minimum et précisément autant de maxima que de minima.

Or pour les valeurs de ϖ_2 correspondant à un minimum, $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$ est positif; pour les valeurs correspondant à un maximum, cette dérivée est négative.

Donc l'équation (15) aura précisément autant de racines pour lesquelles cette dérivée sera positive, que de racines pour lesquelles cette dérivée sera négative, et par conséquent autant de racines pour lesquelles α_1^2 sera positif que de racines pour lesquelles α_1^2 sera négatif.

Cela revient à dire qu'il y aura précisément autant de solutions périodiques stables que de solutions instables, en donnant à ce mot le même sens que dans le paragraphe 2 de ce chapitre.

Ainsi, si μ est suffisamment petit, à chaque système de valeurs de n_1 et de n_2, correspondront au moins une solution périodique stable et une solution périodique instable et précisément autant de solutions stables que de solutions instables.

Je n'examinerai pas ici comment ces résultats s'étendraient au cas où l'équation (15) aurait des racines multiples.

§ 5. *Solutions asymptotiques.*

Soient:

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

n équations différentielles simultanées. Les X sont des fonctions des x et de t.

Par rapport aux x elles peuvent être développées en séries de puissances.

Par rapport à t, elles sont périodiques de période 2π.

Soit:

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0$$

une solution particulière périodique de ces équations. Les x_i^0 seront des fonctions de t périodiques de période 2π. Posons:

$$x_i = x_i^0 + \xi_i.$$

Il viendra:

$$(2) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \Xi_i.$$

Les Ξ seront des fonctions des ξ et de t, périodiques par rapport à t et développées suivant les puissances des ξ; mais il n'y aura plus de termes indépendants des ξ.

Si les ξ sont très petits et qu'on néglige leurs carrés, les équations se réduisent à

$$(3) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1^0}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2^0}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n^0}\xi_n,$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Elles sont linéaires et à coefficients périodiques. On connaît la forme de leur intégrale générale, on trouve:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{11} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{21} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n1},\\
\xi_2 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{12} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{22} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi_n &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{1n} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{2n} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{nn};
\end{aligned}$$

les A sont des constantes d'intégration, les α des constantes fixes qu'on appelle exposants caractéristiques, les φ des fonctions périodiques de t.

Si alors nous posons:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \eta_1\varphi_{11} + \eta_2\varphi_{21} + \ldots + \eta_n\varphi_{n1},\\
\xi_2 &= \eta_1\varphi_{12} + \eta_2\varphi_{22} + \ldots + \eta_n\varphi_{n2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\xi_n &= \eta_1\varphi_{1n} + \eta_2\varphi_{2n} + \ldots + \eta_n\varphi_{nn},
\end{aligned}$$

les équations (2) deviendront:

$$(2') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i$$

où les H_i sont des fonctions de t et des η de même forme que les Ξ.

Nous pourrons d'ailleurs écrire

$$(2') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 + H_i^2 + \ldots + H_i^n + \ldots;$$

H_i^p représente l'ensemble des termes de H_i qui sont de degré p par rapport aux η.

Quant aux équations (3), elles deviennent:

$$(3') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 = \alpha_i\eta_i.$$

Cherchons maintenant la forme des solutions générales des équations (2) et (2').

Je dis que nous devrons trouver:

$\eta_i =$ fonction développée suivant les puissances de $A_1 e^{\alpha_1 t}$, $A_2 e^{\alpha_2 t}$, ..., $A_n e^{\alpha_n t}$ dont les coëfficients sont des fonctions périodiques de t.

Nous pouvons écrire alors:

$$(4') \qquad \eta_i = \eta_i^1 + \eta_i^2 + \dots + \eta_i^p + \dots,$$

η_i^p représentant l'ensemble des termes de η_i qui sont de degré p par rapport aux A.

Nous remplacerons les η_i par leurs valeurs dans H_i^p et nous trouverons:

$$H_i^p = H_i^{p.p} + H_i^{p.p+1} + \dots + H_i^{p.q} + \dots,$$

$H_i^{p.q}$ désignant l'ensemble des termes qui sont de degré q par rapport aux A.

Nous trouverons alors:

$$\frac{d\eta_i^1}{dt} = \alpha_i \eta_i^1, \qquad \eta_i^1 = A_i e^{\alpha_i t},$$

$$\frac{d\eta_i^2}{dt} - \alpha_i \eta_i^2 = H_i^{2.2}, \qquad \frac{d\eta_i^3}{dt} - \alpha_i \eta_i^3 = H_i^{2.3} + H_i^{3.3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d\eta_i^q}{dt} - \alpha_i \eta_i^q = H_i^{2.q} + H_i^{3.q} + \dots + H_i^{q.q} = K_q.$$

Ces équations permettront de calculer successivement par récurrence

$$\eta_i^2, \eta_i^3, \dots, \eta_i^q, \dots.$$

En effet K_q ne dépend que des $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^{q-1}$. Si nous supposons que ces quantités aient été préalablement calculées, nous pourrons écrire K_q sous la forme suivante:

$$K_q = \Sigma A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n} e^{t(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n)} \phi,$$

les β étant des entiers positifs dont la somme est q et ϕ une fonction périodique.

On peut écrire encore:

$$\phi = \Sigma C e^{\gamma t \sqrt{-1}},$$

C étant un coëfficient généralement imaginaire et γ un entier positif ou négatif. Nous écrirons pour abréger:

$$A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n} = A^q, \qquad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \Sigma\alpha\beta,$$

et il viendra:

$$\frac{d\eta_i^q}{dt} - \alpha_i\eta_i^q = \Sigma C A^q e^{t(\gamma\sqrt{-1}+\Sigma\alpha\beta)}.$$

Or on peut satisfaire à cette équation en faisant:

$$\eta_i^q = \sum \frac{CA^q e^{t(\gamma\sqrt{-1}+\Sigma\alpha\beta)}}{\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i}.$$

Il y aurait exception dans le cas où l'on aurait:

$$\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i = 0,$$

auquel cas il s'introduirait dans les formules des termes en t. Nous réserverons ce cas qui ne se présente pas en général.

Nous devons maintenant traiter la question de la convergence de ces séries. La seule difficulté provient d'ailleurs comme on va le voir des diviseurs

$$(5) \qquad \gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i.$$

En effet remplaçons les équations (2') par les suivantes:

$$(2'') \qquad \eta_i = A_i e^{\alpha_i t} + \overline{H}_i^2 + \overline{H}_i^3 + \ldots + \overline{H}_i^p + \ldots.$$

Définissons $\overline{H}_i^p$. On voit sans peine que H_i^p est de la forme suivante:

$$H_i^p = \Sigma C \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n} e^{\gamma t\sqrt{-1}}.$$

C est une constante quelconque, les β sont des entiers positifs dont la somme est p, γ est un entier positif ou négatif. Nous prendrons alors:

$$\overline{H}_i^p = \Sigma |C| \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \ldots \eta_n^{\beta_n}.$$

Les séries ainsi obtenues seront convergentes pourvu que les séries trigonométriques qui définissent les fonctions périodiques dont dépendent les H convergent absolument et uniformément; or cela aura toujours lieu parce que ces fonctions périodiques sont analytiques.

On peut tirer des équations (2″) les η sous la forme suivante:

$$\eta_i = \Sigma M A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n} e^{(\Sigma\alpha\beta)t}. \tag{4″}$$

Plusieurs termes pourront d'ailleurs correspondre aux mêmes exposants β. Si on compare avec les séries tirées de (2′) qui s'écrivent:

$$\eta_i = \sum N \frac{A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n}}{\Pi} e^{t[\Sigma\alpha\beta + \gamma\sqrt{-1}]}$$

voici ce qu'on observe: 1° M est réel positif et plus grand que $|N|$. 2° Π désigne le produit des diviseurs (5) ($q < \Sigma\beta$).

Si donc la série (4″) converge pourvu que l'on ait:

$$|A_i e^{\alpha_i t}| < R, \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

si aucun des diviseurs (5) n'est plus petit que ε, la série (4′) convergera pourvu que

$$|A_i e^{\alpha_i t}| < R\varepsilon.$$

Voici donc comment on peut énoncer la condition de convergence.

La série converge:

Si l'expression

$$\gamma\sqrt{-1} + \Sigma\alpha\beta - \alpha_i$$

ne peut pas devenir plus petite que toute quantité donnée pour des valeurs entières et positives des β et entières (positives ou négatives) de γ; c'est à dire si aucun des deux polygones convexes qui enveloppe, le premier les α et $+\sqrt{-1}$, le second les α et $-\sqrt{-1}$, ne contient l'origine.

Ou si toutes les quantités α ont leurs parties réelles de même signe et si aucune d'elles n'a sa partie réelle nulle.

Que ferons-nous alors s'il n'en est pas ainsi.

Supposons par exemple que k des quantités α aient leur partie réelle positive, et que $n-k$ aient leur partie réelle négative ou nulle. Il arrivera alors que la série (4′) restera convergente si on y annule les constantes A qui correspondent à un α dont la partie réelle est négative ou nulle, de sorte que ces séries ne nous donneront plus la solution générale des équations proposées, mais une solution contenant seulement k constantes arbitraires.

Si on suppose que les équations données rentrent dans les équations de la dynamique, nous avons vu que n est pair et que les α sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Alors si k d'entre eux ont leur partie réelle positive, k auront leur partie réelle négative et $n - 2k$ auront leur partie réelle nulle. En prenant d'abord les α qui ont leur partie réelle positive, on obtiendra une solution particulière contenant k constantes arbitraires; on en obtiendra une seconde en prenant les α qui ont leur partie réelle négative.

Dans le cas où aucun des α n'a sa partie réelle nulle et en particulier si tous les α sont réels, on a d'ailleurs:

$$k = \frac{n}{2}.$$

Si maintenant nous supposons que dans les équations (1) les X dépendent d'un paramètre μ de telle sorte que ces fonctions X soient développables suivant les puissances de μ, les quantités η_i seront encore représentables par les séries (4'), mais ces séries seront développées, non seulement suivant les puissances des $A_i e^{\alpha_i t}$, mais encore suivant les puissances de μ.

Il peut arriver toutefois que ces séries (4') au lieu d'être développées suivant les puissances de μ, le soient suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$. En effet les α_i sont aussi des fonctions de μ; il arrivera en général que les α_i^2 seront développés suivant les puissances de μ, mais dans certains cas particuliers, $\sqrt{\mu}$ s'introduira dans les α_i et par conséquent dans les séries (4'). C'est précisément, d'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, ce qui arrive dans le cas des équations (1) du § 3 de ce chapitre.[1]

Nous allons nous placer maintenant dans un cas très particulier. Supposons d'abord $n = 2$, de telle façon que les équations (1) se réduisent à:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2.$$

[1] Les développements contiennent en général à la fois des puissances positives et négatives de $\sqrt{\mu}$. Mais les puissances négatives disparaissent dans les cas où les solutions asymptotiques subsistent pour $\mu = 0$. C'est ce qui arrive dans la plupart des applications et en particulier pour les équations de la dynamique. (Voir *Note I.*)

Supposons de plus que

$$\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} = 0. \tag{6}$$

La situation du système dépend alors des trois quantités x_1, x_2 et t; on peut donc la représenter par la position d'un point dans l'espace; voici quel mode de représentation on peut adopter pour fixer les idées:

Les coordonnées rectangulaires du point représentatif seront:

$$e^{x_1} \cos t \,, e^{x_1} \sin t \quad \text{et} \quad x_2.$$

De cette façon

1°. A tout système de valeurs des trois quantités x_1, x_2 et t correspondra un point de l'espace.

2°. A tout point de l'espace correspondra un seul système de valeurs des quantités x_1, x_2, $\cos t$, $\sin t$, et par conséquent une seule situation du système si l'on ne considère pas comme distinctes deux situations qui ne diffèrent que parce que t a augmenté d'un certain nombre de périodes 2π.

3°. Si l'on fait varier t, (x_1 et x_2 restant constants) le point représentatif décrit une circonférence.

4°. A la condition $x_1 = x_2 = 0$ correspond le cercle $z = 0, x^2 + y^2 = 1$.

5°. A la condition $x_1 = -\infty$ correspond l'axe des z.

A toute solution des équations (1) correspondra une courbe décrite par le point représentatif. Si la solution est périodique, cette courbe est fermée.

Considérons donc une courbe fermée C correspondant à une solution périodique.

Formons les équations (2), (3), (2') et (3') relatives à cette solution périodique et imaginons que l'on calcule les quantités α correspondantes.

Ces quantités sont au nombre de deux, et en vertu de la relation (6) elles sont égales et de signe contraire.

Deux cas peuvent se présenter: ou bien leur carré est négatif et la solution périodique est stable; ou bien leur carré est positif et la solution est instable.

Plaçons-nous dans ce dernier cas et appelons $+\alpha$ et $-\alpha$ les deux valeurs de l'exposant α; nous pourrons supposer alors que α est réel positif.

Cela posé, les séries (4') seront développées suivant les puissances croissantes de $Ae^{\alpha t}$ et de $Be^{-\alpha t}$; mais elles ne seront pas convergentes si A et B y entrent à la fois; elles le deviendront au contraire, si l'on y fait soit $A = 0$, soit $B = 0$.

Faisons d'abord $A = 0$; alors les η seront développées suivant les puissances de $Be^{-\alpha t}$; si donc t croît indéfiniment, η_1 et η_2 tendent simultanément vers 0. Les solutions correspondantes peuvent s'appeler *solutions asymptotiques;* car pour $t = +\infty$, les η et par conséquent les ξ tendent vers 0, ce qui veut dire que la solution asymptotique se rapproche asymptotiquement de la solution périodique considérée.

Si on fait de même $B = 0$, les η sont développés suivant les puissances de $Ae^{\alpha t}$; ils tendent donc vers 0 quand t tend vers $-\infty$. Ce sont donc encore des solutions asymptotiques.

Il y a donc deux séries de solutions asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Chacune d'elles contient une constante arbitraire, la première B, la seconde A.

A chacun de ces séries de solutions asymptotiques correspondra une série de courbes se rapprochant asymptotiquement de la courbe fermée C et qu'on pourra appeler courbes asymptotiques. L'ensemble de ces courbes asymptotiques formera une *surface asymptotique.* Il y aura deux surfaces asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Ces deux surfaces iront passer par la courbe fermée C.

Voici maintenant comment on peut trouver l'équation des surfaces asymptotiques.

Nous avons trouvé pour les séries (4') en y faisant $A = 0$

$$\eta_1 = B^2e^{-2\alpha t}\phi_2 + B^3e^{-3\alpha t}\phi_3 + B^4e^{-4\alpha t}\phi_4 + \dots,$$

$$\eta_2 = Be^{-\alpha t} + B^2e^{-2\alpha t}\theta_2 + B^3e^{-3\alpha t}\theta_3 + \dots,$$

les ϕ et les θ étant des fonctions périodiques du temps. Si entre ces deux équations ou éliminé $Be^{-\alpha t}$, il vient:

$$\eta_1 = \eta_2^2 f_2 + \eta_2^3 f_3 + \eta_2^4 f_4 + \dots, \tag{7}$$

les f étant des fonctions périodiques du temps. C'est là l'équation de la surface asymptotique et on n'a qu'à y remplacer les η par leurs valeurs en fonctions des ξ, puis des x, pour avoir cette équation sous la forme:

$$F(x_1, x_2, t) = 0. \tag{8}$$

La série (7) n'est convergente que pour les petites valeurs de η_1; elle ne donne donc qu'un élément de la surface asymptotique cherchée; mais on peut trouver le reste par le moyen de la continuation analytique.

Si dans les équations (1), X_1 et X_2 dépendent d'un paramètre arbitraire μ, nous avons vu que les séries (4') (et par conséquent la série (7)) étaient développées également suivant les puissances croissantes de μ ou de $\sqrt{\mu}$. Nous pouvons donc écrire l'équation (8) sous la forme

$$F(x_1, x_2, t, \mu) = 0,$$

F étant une fonction holomorphe de μ. Il importe de remarquer que F reste une fonction holomorphe de μ même quand on donne aux η des valeurs telles que la série (7) ne soit plus convergente.[1]

Il y a dans le cas qui nous occupe un invariant intégral que l'on peut écrire

$$\iiint dx_1 dx_2 dt = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{x^2 + y^2}.$$

[1] Voir *Note E* (Sur le calcul des limites).

Deuxième partie.

Équations de la dynamique et problème des n corps.

CHAPITRE I.

Etude du cas où il n'y a que deux degrés de liberté.

§ 1. *Représentations géométriques diverses.*

Reprenons les équations (1) du § 3 (1ère partie, chapitre III)

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2},$$
$$(1) \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

Nous nous bornerons au cas le plus simple qui est celui où il n'y a que deux degrés de liberté; je n'ai pas à m'occuper en effet de celui où il n'y a qu'un degré de liberté, car les équations de la dynamique s'intègrent alors aisément par de simples quadratures.

Nous supposerons donc que la fonction F ne dépend que de quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2. Nous supposerons de plus que cette fonction est uniforme par rapport à ces quatre variables et périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2.

La situation du système est donc définie par les quatre quantités x_1, x_2, y_1, y_2, mais cette situation ne change pas quand y_1 ou y_2 augmente de 2π ou d'un multiple de 2π. En d'autres termes, et pour reprendre le langage du chapitre I de la 1ère partie, x_1 et x_2 sont des variables linéaires, pendant que y_1 et y_2 sont des variables angulaires.

Nous connaissons une intégrale des équations (2) qui est la suivante:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C, \tag{2}$$

C désignant la constante des forces vives. Si cette constante est regardée comme une des données de la question, les quatre quantités x et y ne sont plus indépendantes; elles sont liées par la relation (2). Il suffira donc, pour déterminer la situation du système, de se donner arbitrairement trois de ces quatre quantités. Il devient possible, par conséquent, de représenter la situation du système par la position d'un point P dans l'espace.

Il pourra arriver en outre pour des raisons diverses que les quatre variables x et y soient soumises, non seulement à l'égalité (2), mais à une ou plusieurs inégalités:

$$\varphi_1(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0, \qquad \varphi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0. \tag{3}$$

Supposons par exemple pour fixer les idées que les inégalités (3) s'écrivent:

$$a > x_1 > b,$$

et que l'égalité (2) soit telle que lorsque x_1 satisfait à ces inégalités, on puisse tirer de la relation (2) la quatrième variable x_2 en fonction uniforme des trois autres x_1, y_1 et y_2.

Nous pouvons alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X = \cos y_1[1 + \cos y_2(cx_1 + d)], \qquad Y = \sin y_1[1 + \cos y_2(cx_1 + d)],$$
$$Z = \sin y_2(cx_1 + d),$$

c et d étant deux nouvelles constantes positives telles que

$$ca + d < 1\,;\; cb + d > 0.$$

Il est clair en effet qu'à toute situation du système, c'est à dire à tout système de valeurs de x_1, y_1 et y_2 satisfaisant aux conditions:

$$a > x_1 > b\,,\; 2\pi > y_1 > 0\,,\; 2\pi > y_2 > 0$$

correspond un point de l'espace et un seul, compris entre les deux tores:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &(1-\sqrt{X^2+Y^2})^2+Z^2=(cb+d)^2,\\ &(1-\sqrt{X^2+Y^2})^2+Z^2=(ca+d)^2. \end{aligned}$$

Et réciproquement, à tout point de l'espace compris entre ces deux tores correspond un système de valeurs de x_1, y_1 et y_2 et un seul, satisfaisant aux inégalités précédentes.

Il peut se faire que les inégalités (3) ne s'écrivent plus $a > x_1 > b$; mais que cependant ces inégalités, jointes à la relation (2) entraînent comme conséquence

$$a > x_1 > b.$$

Si de plus x_2 est encore fonction uniforme des trois autres variables, le même mode de représentation géométrique est encore applicable.

Nous pouvons nous placer dans un cas plus général encore:

Supposons que l'on puisse trouver une variable auxiliaire ξ, jouissant de la propriété suivante. Si x_1, x_2, y_1 et y_2 satisfont à la fois à l'égalité (2) et aux inégalités (3), on pourra exprimer x_1 et x_2 en fonctions uniformes de ξ, de y_1 et de y_2. De plus, en vertu des inégalités (3), ξ ne peut devenir infinie et reste comprise entre certaines limites de telle façon que l'on a comme conséquence de (2) et de (3)

$$a > \xi > b.$$

Nous pourrons alors définir complètement la situation du système en nous donnant les trois variables ξ, y_1 et y_2, et la représenter par un point P dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X=\cos y_1[1+\cos y_2(c\xi+d)],\qquad Y=\sin y_1[1+\cos y_2(c\xi+d)],$$
$$Z=\sin y_2(c\xi+d)$$

avec les conditions:

$$c \geqq 0\,,\; ca+d<1\,,\; cb+d>0.$$

On voit alors, comme dans le cas précédent, qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace et un seul compris entre les deux tores (4), et réciproquement, qu'à tout point compris entre ces deux tores ne peut correspondre plus d'une situation du système.

Il peut se faire que pour $x_1 = a$, (ou plus généralement pour $\xi = a$) la situation du système reste la même quelle que soit la valeur attribuée à y_2. Nous en verrons dans la suite des exemples. C'est ainsi qu'en coordonnées polaires, il faut en général pour définir la position d'un point se donner les deux coordonnées ρ et ω, mais que si on suppose $\rho = 0$, on retrouve toujours le même point, à savoir le pôle, quel que soit ω.

Dans ce cas on choisira les constantes c et d de telle façon que

$$ca + d = 0.$$

Le second des deux tores (4) se réduit alors à un cercle:

$$Z = 0, \qquad X^2 + Y^2 = 1.$$

En chacun des points de ce cercle y_2 est indéterminé; mais néanmoins, comme pour $\xi = a$ la situation du système ne dépend pas de y_2, à chaque point du cercle correspond une situation du système et une seule.

On peut dire alors qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace intérieur au premier des deux tores (4) et que réciproquement, à un point intérieur de ce tore ne peut correspondre qu'une seule situation du système.

J'envisagerai encore un autre cas.

Imaginons qu'en vertu des inégalités (3), ξ puisse prendre toutes les valeurs positives, de telle sorte que:

$$a = 0, \qquad b = +\infty.$$

Supposons que pour $\xi = 0$ la situation du système ne dépende pas de y_2 et que pour $\xi = \infty$, cette situation ne dépende pas de y_1.

Nous pourrons alors représenter la situation par un point dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X = \cos y_1 e^{\xi \cos y_2}, \qquad Y = \sin y_1 e^{\xi \cos y_2}, \qquad Z = \xi \sin y_2.$$

Pour $\xi = 0$ il vient (quel que soit y_2)

$$X = \cos y_1, \qquad Y = \sin y_1, \qquad Z = 0.$$

Le point représentatif se trouve sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \qquad Z = 0$$

et sa position ne dépend pas de y_2; cela n'a pas d'inconvénient puisque par hypothèse la situation du système pour $\xi = 0$ ne dépend pas non plus de y_2.

Pour $\xi = \infty$, on trouve pourvu que $\cos y_2$ soit négatif:

$$X = Y = 0, \qquad Z = \sin y_2.$$

Le point représentatif se trouve alors sur l'axe des Z et sa position ne dépend pas de y_1, mais pour $\xi = \infty$, la situation du système ne dépend pas non plus de y_1.

Le mode de représentation adopté est donc légitime.

Ce qui précède a besoin d'être appuyé de quelques exemples. Je n'en traiterai ici que trois.

Le premier de ces exemples est le plus important parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps. Imaginons deux corps, le premier de grande masse, le second de masse finie, mais très petite et supposons que ces deux corps décrivent autour de leur centre de gravité commun une circonférence d'un mouvement uniforme. Considérons ensuite un troisième corps de masse infiniment petite, de façon que son mouvement soit troublé par l'attraction des deux premiers corps, mais qu'il ne puisse pas troubler l'orbite de ces deux premiers corps. Bornons-nous de plus au cas où ce troisième corps se meut dans le plan des deux circonférences décrites par les deux premières masses.

Tel est le cas d'une petite planète se mouvant sous l'influence du Soleil et de Jupiter quand on néglige l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Tel est encore le cas de la lune se mouvant sous l'influence du Soleil et de la Terre quand on néglige l'excentricité de l'orbite terrestre et l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique.

Nous définirons la position du troisième corps par ses éléments osculateurs à un instant donné et nous écrirons les équations du mouvement en adoptant les notations de M. Tisserand dans sa Note des Comptes Rendus du 31 janvier 1887

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dR}{dl}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{dR}{dL}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{dR}{dg}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{dR}{dG}. \end{aligned}$$

Je désigne par a, e et n le grand axe osculateur, l'excentricité et le moyen mouvement de la troisième masse; j'appelle l l'anomalie moyenne de cette troisième masse et g la longitude de son périhélie.

Je pose ensuite:

$$L = \sqrt{a}, \qquad G = \sqrt{a(1 - e^2)}.$$

Je choisis les unités de telle façon que la constante de Gauss soit égale à 1, que le moyen mouvement de la seconde masse soit égal à 1 et que la longitude de cette seconde masse soit égale à t.

Dans ces conditions, l'angle sous lequel la distance des deux dernières masses est vue de la première ne diffère de $l + g - t$ que par une fonction périodique de l de période 2π.

La fonction R est la fonction perturbatrice ordinaire augmentée de $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2L^2}$. Cette fonction ne dépend que de L, de G, de l et de $l + g - t$; car la distance de la seconde masse à la première est constante et la distance de la troisième à la première ne dépend que de L, G et l. Cette fonction est d'ailleurs périodique de période 2π tant par rapport à l que par rapport à $l + g - t$.

On conclut de là que l'on a:

$$\frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dg} = 0$$

et que les équations (5) admettent comme intégrale:

$$R + G = \text{const.}$$

Nous allons chercher à ramener les équations (5) à la forme des équations (1). Pour cela nous n'avons qu'à poser:

$$x_1 = G, \qquad x_2 = L,$$

$$y_1 = g - t, \qquad y_2 = l,$$

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = R + G,$$

et les équations (5) reprennent la forme:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

La fonction F dépend d'un paramètre très petit μ qui est la masse du second corps et nous pouvons écrire:

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

F est périodique par rapport à y_1 et y_2 qui sont des variables angulaires, tandis que x_1 et x_2 sont des variables linéaires. Si l'on fait $\mu = 0$, F se réduit à F_0 et:

$$F_0 = \frac{1}{2a} + G = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}$$

ne dépend plus que des variables linéaires.[1]

Il résulte de la définition même de L et de G en fonctions de a et e que l'on doit avoir:

$$L^2 > G^2 \quad \text{ou} \quad x_2^2 > x_1^2,$$

ce qui montre que x_1 peut varier depuis $-x_2$ jusqu'à $+x_2$.

Si l'on suppose $x_1 = +x_2$, l'excentricité est nulle; il en résulte que la fonction perturbatrice et la situation du système ne dépendent plus que de la différence de longitude des deux petites masses, c'est à dire de:

$$l + g - t = y_1 + y_2.$$

[1] Il est aisé de voir que le hessien de F_0 par rapport à x_1 et à x_2 est identiquement nul. Il semble donc que les conclusions du § 3 (chapitre III, 1ère partie) ne soient plus applicables. Il n'en est rien pourtant, parce qu'on peut remplacer F par une fonction arbitraire $\varphi(F)$ de telle sorte que le hessien de $\varphi(F_0)$ ne soit pas nul. Cela revient à changer l'unité de temps de façon que cette unité dépende de la constante C des forces vives.

On en déduit:

$$\frac{dF}{dy_1} = \frac{dF}{dy_2},$$

d'où:

$$\frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0, \tag{6}$$

d'où l'on conclurait (puisque la valeur initiale de $x_1 - x_2$ est supposée nulle) que x_1 doit rester constamment égal à x_2; mais ce n'est là pour les équations (1) qu'une solution singulière qui doit être rejetée. En ce qui concerne les solutions »particulières» que nous devons conserver, l'équation (6) signifie simplement que quand $x_1 - x_2$ atteint la valeur 0, cette valeur est un maximum, ce qui est d'ailleurs une conséquence de l'inégalité $x_2^2 > x_1^2$.

Si nous supposons maintenant $x_2 = -x_1$, l'excentricité sera encore nulle, mais le mouvement sera rétrograde (il l'est toutes les fois que x_1 et x_2 ne sont pas de même signe); alors F et la situation du système ne dépendent plus que de l'angle:

$$-l + g - t = y_1 - y_2,$$

ce qui donne:

$$\frac{dF}{dy_1} + \frac{dF}{dy_2} = 0.$$

Je vais maintenant traiter la question suivante:

Trouver une variable ξ telle que si x_1, x_2, y_1, y_2 satisfont aux égalités et inégalités (2) et (3) (qui dans le cas qui nous occupe se réduisent à

$$F = C, \qquad x_2^2 > x_1^2)$$

ces quatre quantités peuvent s'exprimer en fonctions uniformes de ξ, y_1 et y_2.

Je traiterai d'abord la question dans le cas où $\mu = 0$ et où

$$F = F_0 = \frac{1}{2x_2^2} + x_1.$$

Envisageons un plan et dans ce plan un point dont les coordonnées sont:

$$X = x_1 - c, \qquad Y = x_2.$$

Alors les égalités et inégalités (2) et (3) s'écrivent:

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0, \qquad Y > X + c > -Y.$$

Construisons la courbe:

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0$$

et les deux droites:

$$X + c = \pm Y.$$

Ces droites et cette courbe peuvent être dans deux situations différentes, représentées par les figures 4 et 5.

Fig. 4.

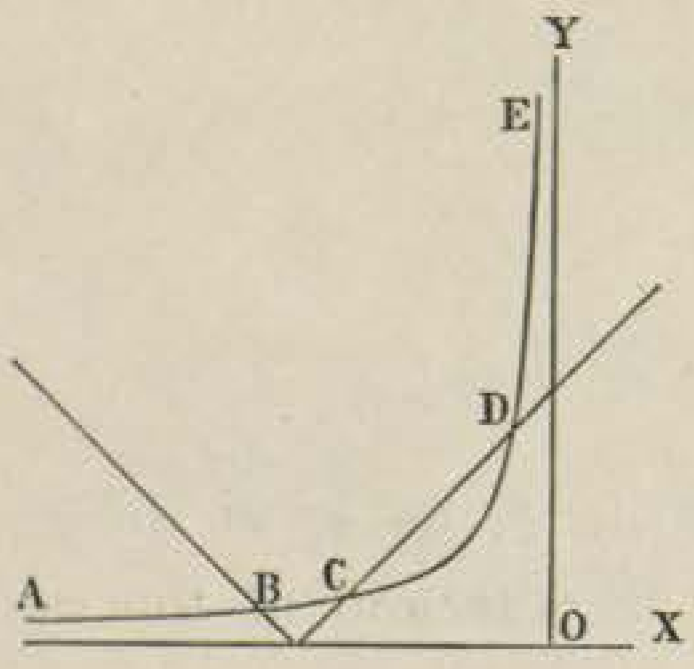
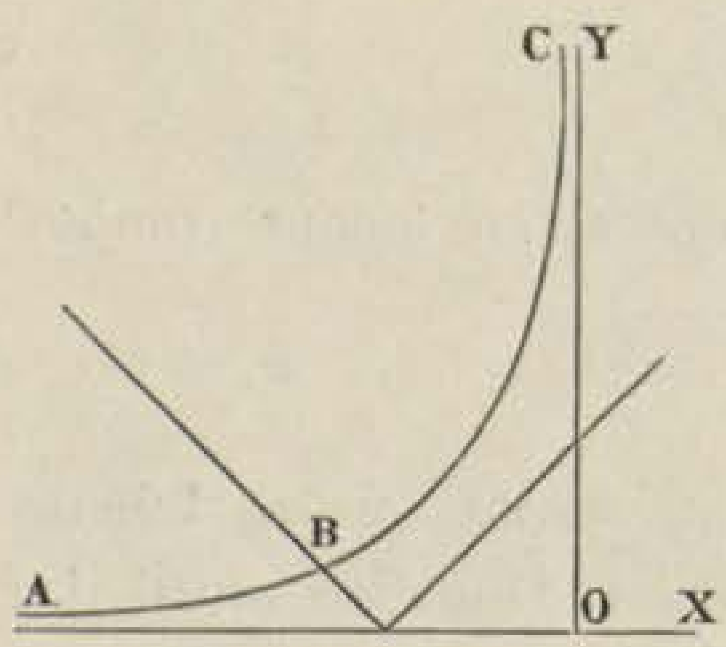


Fig. 5.



Chacune des deux figures devrait se composer de deux moitiés symétriques par rapport à l'axe des x, mais nous n'avons représenté que la moitié qui est au-dessus de cet axe. Dans le cas de la figure 4, la courbe nous offre deux arcs utiles BC et DE pendant que les arcs AB et CD doivent être rejetés à cause de l'inégalité $Y^2 > (X + c)^2$. Dans le cas de la figure 5, il n'y a qu'un arc utile BC et l'arc AB doit être rejeté.

Le passage de la figure 4 à la figure 5 se fait quand la droite CD devenant tangente à la courbe, les deux points C et D se confondent. Cela a lieu pour:

$$C = \frac{3}{2}, \qquad X = -\frac{1}{2}, \qquad Y = 1.$$

Nous nous supposerons dans ce qui va suivre placés dans le cas de la figure 4 et nous envisagerons seulement l'arc utile BC; c'est en effet le cas le plus intéressant au point de vue des applications.

Posons:

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G};$$

on voit que ξ s'annule au point C et devient infini au point B et que quand on parcourt l'arc BC depuis C jusqu'en B, on voit ξ croître constamment depuis 0 jusqu'à $+\infty$. Si donc on se donne ξ, le point correspondant de l'arc BC sera entièrement déterminé, ce qui revient à dire que x_1 et x_2 sont fonctions uniformes de ξ.

Qu'arrivera-t-il maintenant si μ n'est plus nul, mais seulement très petit?

Faisons encore

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$$

et voyons si en tenant compte des relations

$$(7) \qquad F = C, \qquad \xi > 0, \qquad x_2 > 0,\text{[1]}$$

x_1 et x_2 seront encore fonctions uniformes de ξ, de y_1 et de y_2. Pour qu'il cessât d'en être ainsi, il faudrait que le déterminant fonctionnel:

$$\frac{\partial(\xi, F)}{\partial(x_1, x_2)}$$

s'annulât pour un système de valeurs satisfaisant aux conditions (7). Or cela n'arrivera pas si μ est assez petit et si C est assez différent de $\frac{3}{2}$.

Dans la plupart des applications, ces conditions seront remplies; nous pourrons donc prendre ξ comme variable indépendante; cette variable sera essentiellement positive et x_1 et x_2 seront fonctions uniformes de ξ, y_1 et y_2.

[1] On voit aisément pourquoi j'écris cette dernière relation; l'arc BC comme on le voit sur la figure est tout entier au-dessus de l'axe des X, ce qui entraîne l'inégalité $x_2 > 0$; il est clair que cette inégalité subsistera encore pour les valeurs suffisamment petites de μ.

Toutefois pour trouver le mode de représentation géométrique le plus convenable, il faut encore faire un changement de variables. Posons:

$$x'_1 = x_1 + x_2, \qquad x'_2 = x_1 - x_2,$$

$$y'_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y'_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2).$$

Après ce changement de variables, les équations conserveront la forme canonique:

$$\frac{dx'_1}{dt} = \frac{dF}{dy'_1}, \qquad \frac{dy'_1}{dt} = -\frac{dF}{dx'_1},$$

$$\frac{dx'_2}{dt} = \frac{dF}{dy'_2}, \qquad \frac{dy'_2}{dt} = -\frac{dF}{dx'_2}.$$

On voit que y'_1 et y'_2 sont encore des variables angulaires; quand en effet y'_1 ou y'_2 augmente d'un multiple 2π, y_1 et y_2 augmentent aussi d'un multiple de 2π et par conséquent la situation du système ne change pas.

Mais il y a plus; quand on change simultanément y'_1 et y'_2 en $y'_1 + \pi$ et $y'_2 + \pi$, y_2 ne change pas et y_1 augmente de 2π. La situation du système ne change donc pas.

Cela posé nous représenterons la situation du système par le point de l'espace qui a pour coordonnées rectangulaires:

$$X = \cos y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \qquad Y = \sin y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \qquad Z = \xi \sin y'_2.$$

Pour $\xi = 0$ la situation du système ne dépend pas de y'_2 et il en est de même du point représentatif qui est alors sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \qquad Z = 0.$$

Pour $\xi = \infty$, la situation du système ne dépend pas de y'_1 et il en est de même du point représentatif qui est alors sur l'axe des Z si $\cos y'_2$ est négatif et à l'infini si $\cos y'_2$ est positif.

A chaque point de l'espace correspond donc une situation du système et une seule; réciproquement, à chaque situation du système correspondent, non pas un, mais deux points de l'espace et en effet aux deux systèmes de valeurs (x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) et $(x'_1, x'_2, y'_1 + \pi, y'_2 + \pi)$ correspondent deux points différents de l'espace, mais une seule situation du système.

Les équations (1) admettent les invariants intégraux:

$$\int(dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2) = \int(dx'_1 dy'_1 + dx'_2 dy'_2)$$

et

$$\int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \int dx'_1 dy'_1 dx'_2 dy'_2.$$

Si nous transformons cet invariant par les règles exposées dans le § 3 (1ère partie, chapitre II) nous verrons que:

$$\int \frac{x_1'^2 d\xi dy'_1 dy'_2}{x'_1 \frac{dF}{dx'_1} + x'_2 \frac{dF}{dx'_2}} = \int \frac{x_1'^2 dX dY dZ}{\left(x'_1 \frac{dF}{dx'_1} + x'_2 \frac{dF}{dx'_2}\right) \xi(X^2 + Y^2)}$$

est encore un invariant intégral.

Comme ξ est essentiellement positif, la quantité sous le signe $\int$ est de même signe que:

$$x'_1 \frac{dF}{dx'_1} + x'_2 \frac{dF}{dx'_2} = x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2}.$$

Or pour $\mu = 0$, on trouve:

$$x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2} = x_1 - \frac{1}{x_2^2}.$$

Si nous nous supposons placés dans le cas de la figure 4 et sur l'arc BC, nous devons supposer:

$$C > \frac{3}{2}, \; x_1^2 < x_2^2, \; 0 < x_2 < 1,$$

d'où l'on tire:

$$x_1 - \frac{1}{x_2^2} = 3x_1 - 2C > 3x_1 - 2 . \frac{3}{2} = 3(x_1 - 1) < 0.$$

Ainsi $x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2}$ est toujours négatif quand μ est nul. Il en sera encore de même quand μ cessera d'être nul, pourvu que C soit assez différent de $\frac{3}{2}$.

Dans ces conditions l'intégrale:

$$\int \frac{x_1'^2 dX dY dZ}{\xi(X^2 + Y^2)\left(-x_1' \frac{dF}{dx_1'} - x_2' \frac{dF}{dx_2'}\right)}$$

est un invariant positif.

Pour $\mu = 0$, les équations (5) s'intègrent aisément comme on le sait et on trouve:

$$L = \text{const.}, \qquad G = \text{const.}, \qquad g = \text{const.}, \qquad l = nt + \text{const.}$$

Les solutions ainsi obtenues sont représentées dans le mode de représentation géométrique adopté par certaines trajectoires. Ces trajectoires sont fermées toutes les fois que le moyen mouvement n est un nombre commensurable. Elles sont tracées sur des surfaces trajectoires qui ont pour équation générale

$$\xi = \text{const.}$$

et qui sont par conséquent des surfaces de révolution fermées analogues à des tores.

Nous verrons dans la suite comment ces résultats sont modifiés quand μ n'est plus nul.

Comme second exemple, je reprends l'équation dont j'ai déjà parlé à la fin du § 3 (1ère partie, chapitre III)

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^3 = \mu R,$$

R étant une fonction de ρ et de t, holomorphe par rapport à ρ et s'annulant avec ρ et périodique par rapport à t. Cette équation peut s'écrire en reprenant les notations du paragraphe cité:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi}.$$

avec:

$$\xi = t, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \qquad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2\rho^2}{2} + \frac{m\rho^4}{4} - \mu\int R(\rho, \xi)d\rho + \eta$$

Posons:

$$\sigma = \sqrt{n}\sqrt{2x_1}\cos y_1, \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2x_1}\sin y_1.$$

Les équations conserveront la forme canonique des équations de la dynamique et la fonction F dépendra de deux variables linéaires x_1 et η de deux variables angulaires y_1 et ξ.

On voit aisément que quand on se donne la constante des forces vives C, x_1, y_1 et ξ, la quatrième variable η est entièrement déterminée; on a en effet:

$$\eta = C - nx_1 - \frac{m}{n^2}x_1^2\sin^2 y_1 + \mu\int R(\rho, \xi)d\rho.$$

Pour $x_1 = 0$, la situation du système ne dépend pas de y_1. Nous pouvons donc adopter pour représenter cette situation le point dont les coordonnées sont:

$$X = \cos\xi e^{x_1\cos y_1}, \qquad Y = \sin\xi e^{x_1\cos y_1}, \qquad Z = x_1\sin y_1.$$

A chaque situation du système correspond ainsi un point de l'espace et inversement. Il faut excepter les points à l'infini et les points de l'axe des Z qui nous donneraient $x_1 = \infty$ et par conséquent un résultat illusoire.

Comme troisième exemple, envisageons un point mobile pesant se mouvant sur une surface parfaitement polie et dans le voisinage d'une position d'équilibre stable.

Prenons pour origine le point le plus bas de la surface; pour plan des xy le plan tangent qui sera horizontal; pour axes des x et des y les axes de l'indicatrice de façon que l'équation de la surface s'écrive:

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} + \mu\varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ étant un ensemble de termes du 3^{me} degré au moins en x et en y et μ un coëfficient très petit.

Nous aurons alors en appelant x' et y' les projections de la vitesse sur les axes des x et des y

$$F = \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + gz,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx'}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dy'}, \qquad \frac{dx'}{dt} = -\frac{dF}{dx}, \qquad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF}{dy}.$$

Changeons de variable en posant:

$$x = \frac{\sqrt{2x_1}}{\sqrt[4]{ga}} \cos y_1, \qquad x' = \sqrt{2x_1}\sqrt[4]{ga} \sin y_1,$$

$$y = \frac{\sqrt{2x_2}}{\sqrt[4]{gb}} \cos y_2, \qquad y' = \sqrt{2x_2}\sqrt[4]{gb} \sin y_2.$$

Les équations différentielles conserveront la forme canonique des équations de la dynamique. L'équation des forces vives s'écrit:

$$\sqrt{ga}\, x_1 + \sqrt{gb}\, x_2 + \mu g \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

φ désignant la même fonction que plus haut, mais transformée par le changement de variables. Comme x_1 et x_2 sont essentiellement positifs (ainsi d'ailleurs que les coëfficients a et b), l'équation des forces vives montre que ces deux quantités restent toujours inférieures à une certaine limite. D'après la définition de la fonction φ cette fonction s'annule avec x_1 et x_2, et il en est encore de même de ses dérivées partielles du 1^er^ ordre. Nous en conclurons que μ étant très petit, la fonction $\mu\varphi$ et ses dérivées du 1^er^ ordre ne pourront jamais dépasser une certaine limite supérieure très petite. Nous pouvons donc écrire:

$$(8) \qquad \left|\mu \frac{d\varphi}{dx_1}\right| < \sqrt{\frac{a}{g}}, \qquad \left|\mu \frac{d\varphi}{dx_2}\right| < \sqrt{\frac{b}{g}}.$$

Faisons maintenant $x_2 = \xi x_1$; le rapport ξ sera essentiellement positif. L'équation des forces vives devient:

$$(9) \qquad x_1(\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\,\xi) + \mu g \varphi(x_1, \xi x_1, y_1, y_2) = C.$$

La dérivée du premier membre de (9) par rapport à x_1 s'écrit:

$$\sqrt{ga} + \sqrt{gb}\,\xi + \mu g \frac{d\varphi}{dx_1} + \mu \xi g \frac{d\varphi}{dx_2}.$$

En vertu des inégalités (8), cette expression est toujours positive, ce qui montre que l'on peut tirer de l'équation (9) x_1 en fonction uniforme de ξ, y_1 et y_2, et par conséquent que la situation du système est complètement définie par les trois variables y_1, y_2 et ξ.

Pour $\xi = 0$ la situation ne dépend pas de y_1, pour $\xi = \infty$ elle ne dépend pas de y_2.

Nous représenterons donc cette situation par le point:

$$X = \cos y_2 e^{\xi \cos y_1}, \qquad Y = \sin y_2 e^{\xi \cos y_1}, \qquad Z = \xi \sin y_1.$$

A chaque point de l'espace correspondra ainsi une situation du système et réciproquement.

Les exemples qui précèdent suffiront, je pense, pour faire comprendre l'importance du problème qui va nous occuper dans ce chapitre et la façon dont on peut varier les modes de représentation géométrique.

§ 2. *Équation des surfaces asymptotiques.*

Reprenons nos hypothèses ordinaires, à savoir: que quatre variables, deux linéaires x_1 et x_2, deux angulaires y_1 et y_2 sont liées par les équations:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}. \end{aligned}$$

Que la constante C des forces vives étant regardée comme une des données de la question, ces quatre variables satisfont à l'équation:

$$(2) \qquad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

de telle façon qu'il n'y en a que trois d'indépendantes.

Que l'on a adopté un mode de représentation géométrique tel qu'à toute situation du système correspond un point représentatif et réciproquement.

Que F dépend d'un paramètre très petit μ, de telle façon qu'on puisse développer F suivant les puissances de μ et écrire:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots.$$

Que F_0 ne dépend que de x_1 et x_2 et est indépendant de y_1 et de y_2.

Ces conditions sont remplies dans le cas particulier du problème des trois corps qui nous a servi d'exemple au paragraphe précédent.

Supposons que pour certaines valeurs de x_1 et de x_2, par exemple pour:

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0$$

les deux nombres

$$-\frac{dF_0}{dx_1} \quad \text{et} \quad -\frac{dF_0}{dx_2}$$

(que j'appellerai pour abréger n_1 et n_2) sont commensurables entre eux.

D'après ce que nous avons vu dans le § 3 (1ère partie, chapitre III) à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspond une équation

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0,$$

qui portait le n° 15 dans le paragraphe cité, et à chaque racine de cette équation (15) correspond une solution périodique des équations (1).

Par conséquent les équations (1) ont une infinité de solutions périodiques si μ est suffisamment petit.

Nous avons vu ensuite dans le § 4 (1ère partie, chapitre III) que le nombre des racines de l'équation (15) est toujours pair, que la moitié de ces racines correspond à des solutions périodiques stables et l'autre moitié à des solutions instables.

Les équations (1) *ont donc une infinité de solutions périodiques instables.*

Chacune de ces solutions périodiques sera représentée dans le mode de représentation adopté par une courbe trajectoire fermée.

Nous avons vu au § 5 (1ère partie, chapitre III) que par chacune des courbes fermées qui représentent une solution périodique instable, passent deux surfaces trajectoires dites *asymptotiques* sur lesquelles sont tracées en nombre infini des trajectoires qui vont en se rapprochant asymptotiquement de la courbe trajectoire fermée.

Les équations (1) nous conduisent donc à une infinité de surfaces trajectoires asymptotiques dont je me propose de trouver l'équation.

Voyons d'abord sous quelle forme se présente en général l'équation d'une surface trajectoire. Cette équation pourra s'écrire

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = \Phi_2(y_1, y_2),$$

Φ_1 et Φ_2 étant deux fonctions de y_1 et de y_2 qui doivent être choisies de telle sorte que l'on ait identiquement:

$$F(\Phi_1, \Phi_2, y_1, y_2) = C.$$

Ces deux fonctions Φ_1 et Φ_2 devront d'ailleurs satisfaire à deux équations aux dérivées partielles:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dy_1} = 0, \\ \frac{dF}{dx_1}\frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2}\frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0. \end{aligned}$$

Il pourrait d'ailleurs nous suffire d'envisager la première de ces équations, car on peut en faire disparaître x_2, en remplaçant cette variable par sa valeur que l'on peut tirer de (2) en fonction de x_1, de y_1 et de y_2.

Voici comment nous procèderons pour intégrer les équations (3) en supposant que x_1 et x_2 sont très voisins de x_1^0 et de x_2^0, et que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable.

Nous supposerons que x_1 et x_2 sont développés selon les puissances de $\sqrt{\mu}$ et nous écrirons:

$$(4) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \dots \\ x_2 &= x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \dots \end{aligned}$$

et nous chercherons à déterminer les fonctions x_i^k de telle façon qu'en substituant dans les équations (3) à la place de x_1 et de x_2 leurs valeurs (4), ces équations soient satisfaites.[1]

Si dans F nous substituons à la place de x_1 et de x_2 leurs valeurs (4), F deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et on pourra écrire

$$F = H_0 + \sqrt{\mu} H_1 + \mu H_2 + \mu\sqrt{\mu} H_3 + \dots.$$

On voit d'ailleurs sans peine que:

$$H_0 = F_0(x_1^0, x_2^0),$$

$$H_1 = x_1^1 \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1 \frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_1 x_1^1 - n_2 x_2^1,$$

$$H_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[(x_1^1)^2 \frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2} + 2x_1^1 x_2^1 \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_2^0} + (x_2^1)^2 \frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}\right] - n_1 x_1^2 - n_2 x_2^2,$$

. . . .

et plus généralement:

$$H_k = \theta_k - [L x_1^1 x_1^{k-1} + M(x_1^1 x_2^{k-1} + x_2^1 x_1^{k-1}) + N x_2^1 x_2^{k-1}] - n_1 x_1^k - n_2 x_2^k,$$

θ_k ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \dots, x_2^{k-2}$, et en posant pour abréger

$$L = -\frac{d^2F_0}{(dx_1^0)^2}, \qquad M = -\frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_2^0}, \qquad N = -\frac{d^2F_0}{(dx_2^0)^2}.$$

La première des équations (3) nous donne alors, en égalant les puissances semblables de $\sqrt{\mu}$, une suite d'équations qui nous permettront de déter-

---

[1] Si x_1^0 et x_2^0 étaient choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, on pourrait se contenter de développer x_1 et x_2 suivant les puissances de μ (et non de $\sqrt{\mu}$). On arriverait ainsi à des séries, qui à la vérité ne seraient pas convergentes au sens géométrique du mot, mais qui comme celles de M. LINDSTEDT pourraient rendre des services dans certains cas.

miner successivement $x_1^0, x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^k$; en effet, si nous posons pour abréger:

$$[i, k] = \frac{dH_i}{dx_1^0}\frac{dx_1^k}{dy_1} + \frac{dH_i}{dx_2^0}\frac{dx_1^k}{dy_1},$$

ces équations s'écriront:

$$
\begin{aligned}
&[0, 0] + \frac{dH_0}{dy_1} = 0,\\
&[0, 1] + [1, 0] + \frac{dH_1}{dy_1} = 0,\\
(5)\qquad &[0, 2] + [1, 1] + [2, 0] + \frac{dH_2}{dy_1} = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&[0, k] + [1, k-1] + \dots + [k-1, 1] + [k, 0] + \frac{dH_k}{dy_1} = 0.
\end{aligned}
$$

Développons d'abord la première des équations (5); elle s'écrira:

$$-n_1\frac{dx_1^0}{dy_1} - n_2\frac{dx_1^0}{dy_2} = 0.$$

Cette première équation sera satisfaite d'elle-même, puisqu'on a supposé plus haut que

$$x_1^0 = \text{const.}$$

Dans ces conditions nous aurons:

$$[k, 0] = 0,$$

car les dérivées partielles de x_1^0 doivent être nulles.

On a d'autre part:

$$[0, k] = -n_1\frac{dx_1^k}{dy_1} - n_2\frac{dx_1^k}{dy_2}.$$

On trouve également:

$$[k-1, 1] = Z_k - Lx_1^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_1} - M\left(x_2^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_1} + x_1^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_2}\right) - Nx_2^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_2},$$

Z_k étant une fonction qui ne dépend que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \dots, x_2^{k-2}$, et enfin

$$[1, k-1] = -Lx_1^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_1} - M\left(x_2^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_1} + x_1^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_2}\right) - Nx_2^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_2}.$$

Quant aux expressions $[2, k-2], [3, k-3], \ldots, [k-2, 2]$, il est clair qu'elles ne peuvent dépendre que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$.

Nous pouvons donc écrire les équations (5) en mettant en évidence les termes qui dépendent de x_1^k, de x_2^k, de x_1^{k-1} ou de x_2^{k-1}, mais nous devons d'abord observer que ces équations sont susceptibles d'être mises sous une forme plus simple.

Nous pouvons toujours supposer en effet que $n_2 = 0$. Car si cela n'avait pas lieu nous poserions:

$$x_1'' = ax_1 + bx_2, \qquad y_1'' = dy_1 - cy_2,$$

$$x_2'' = cx_1 + dx_2, \qquad y_2'' = -by_1 + ay_2,$$

a, b, c, d étant quatre nombres entiers tels que

$$ad - bc = 1.$$

Après ce changement de variables les équations conservent la forme canonique.

La fonction F qui est périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2, est encore périodique de période 2π par rapport à y_1'' et à y_2''. Le changement de variables n'a donc pas altéré la forme des équations (1).

Les nombres n_1 et n_2 sont remplacés par deux nouveaux nombres n_1'' et n_2'' qui jouent par rapport aux équations transformées le même rôle que n_1 et n_2 par rapport aux équations primitives et l'on a:

$$n_1'' = dn_1 - cn_2,$$

$$n_2'' = -bn_1 + an_2.$$

Mais le rapport de n_1 à n_2 étant commensurable par hypothèse, il est toujours possible de choisir les quatre entiers a, b, c, d de telle sorte que

$$n_2'' = -bn_1 + an_2 = 0.$$

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer que n_2 soit nul; c'est ce que nous ferons jusqu'à nouvel ordre.

Grâce à cette simplification les équations (5) peuvent s'écrire:

$$-n_1\frac{dx_1^1}{dy_1}=0,$$

$$-n_1\frac{dx_1^2}{dy_1}+[1\,,1]+\frac{dH_2}{dy_1}=0,$$

$$(6)\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-n_1\frac{dx_1^k}{dy_1}-L\left(x_1^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_1}+x_1^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_1}\right)$$

$$-M\left(x_2^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_1}+x_1^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_2}+x_2^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_1}+x_1^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_2}\right)-N\left(x_2^1\frac{dx_1^{k-1}}{dy_2}+x_2^{k-1}\frac{dx_1^1}{dy_2}\right)+T_k=0,$$

T_k ne dépendant que de y_1, y_2 et des x_i^0, x_i^1, x_i^2 etc. jusqu'à x_i^{k-2}.

On a d'autre part:

$$[1\,,1]=-(Lx_1^1+Mx_2^1)\frac{dx_1^1}{dy_1}-(Mx_1^1+Nx_2^1)\frac{dx_1^1}{dy_2}.$$

La première des équations (6) montre que x_1^1 ne dépend que de y_2. On trouverait de même:

$$-n_1\frac{dx_2^1}{dy_1}=0;$$

ce qui montre que x_2^1 ne dépend non plus que de y_2.

En tenant compte de cette circonstance, la seconde équation (6) s'écrit

$$-n_1\frac{dx_1^2}{dy_1}-(Mx_1^1+Nx_2^1)\frac{dx_1^1}{dy_2}+\frac{dF_1}{dy_1}=0.$$

Il y faut d'ailleurs adjoindre l'équation suivante qu'on obtiendrait de la même manière:

$$-n_1\frac{dx_2^2}{dy_1}-(Mx_1^1+Nx_2^1)\frac{dx_2^1}{dy_2}+\frac{dF_1}{dy_2}=0.$$

Nous nous proposerons dans ce qui va suivre de déterminer les fonctions x_i^k de telle façon que ce soient des fonctions périodiques de y_1, qui ne doivent pas être altérées quand, y_2 conservant la même valeur, y_1 augmentera de 2π.

Nos fonctions pourront alors être développées en séries trigonométriques suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1. Nous conviendrons de représenter par la notation

$$[U]$$

le terme tout connu dans le développement de la fonction périodique U, suivant les lignes trigonométriques de y_1 et de ses multiples. Dans ces conditions on aura:

$$\left[\frac{dU}{dy_1}\right] = 0,$$

et je puis écrire

$$\left[(Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_1^1}{dy_1}\right] = 0,$$

$$\left[(Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_2^1}{dy_1}\right] = \left[\frac{dF_1}{dy_2}\right].$$

Comme x_1^1 et x_2^1 ne dépendent pas de y_1, je puis écrire plus simplement:

$$\text{(7)} \qquad \frac{dx_1^1}{dy_2} = 0, \qquad (Mx_1^1 + Nx_2^1)\frac{dx_2^1}{dy_2} = \left[\frac{dF_1}{dy_2}\right].$$

La première de ces équations montre que x_1^1 se réduit à une constante. Quant à la seconde, elle est facile à intégrer. On a en effet:

$$\left[\frac{dF_1}{dy_2}\right] = \frac{d[F_1]}{dy_2},$$

ce qui nous donne pour l'intégrale de l'équation (7)

$$\text{(8)} \qquad Mx_1^1x_2^1 + \frac{N}{2}(x_2^1)^2 = [F_1] + C_1,$$

C_1 désignant une constante d'intégration.

Mais si nous regardons la constante des forces vives C comme une des données de la question, nous ne pouvons plus considérer les deux constantes x_1^1 et C_1 comme arbitraires. On doit avoir en effet identiquement

$$F = H_0 + \sqrt{\mu}H_1 + \mu H_2 + \mu\sqrt{\mu}H_3 + \ldots = C$$

ou

$$H_0 = C, \qquad H_1 = 0, \qquad H_2 = 0 \; , \; \ldots$$

ou:

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C, \qquad -n_1 x_1^1 = 0 \; , \; \ldots .$$

Ainsi la constante x_1^1 est nulle, ce qui apporte de nouvelles simplifications dans nos équations.

La plus générale des équations (6) s'écrit alors:

$$-n_1 \frac{dx_1^k}{dy_1} - Mx_2^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_1} - Nx_2^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_2} + T_k = 0$$

ou bien:

$$n_1 \frac{dx_1^k}{dy_1} + Nx_2^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_2} = Y_k, \tag{9}$$

Y_k ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$ et $\dfrac{dx_1^{k-1}}{dy_1}$.

Nous avons obtenu l'équation (9) en partant des équations (6) et les équations (6) elles-mêmes sont des transformations de la première équation (3). En opérant de même sur la seconde équation (3) nous aurions trouvé:

$$n_1 \frac{dx_2^k}{dy_1} + Mx_1^{k-1} \frac{dx_2^1}{dy_2} + N\left(x_2^1 \frac{dx_2^{k-1}}{dy_2} + x_2^{k-1} \frac{dx_2^1}{dy_2}\right) = Y_k', \tag{9'}$$

Y_k' ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$ et $\dfrac{dx_2^{k-1}}{dy_1}$.

Nous allons chercher à déterminer par récurrence les fonctions x_i^k et à cet effet, voici comment nous procèderons. Supposons qu'on ait déterminé par un calcul préalable, d'une part:

$$x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2},$$

$$x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$$

d'une manière complète et d'autre part:

$$x_1^{k-1} \quad \text{et} \quad x_2^{k-1}$$

à une fonction arbitraire près de y_2. Nous pourrons alors regarder $\frac{dx_1^{k-1}}{dy_1}$, $\frac{dx_2^{k-1}}{dy_1}$ et par conséquent Y_k et Y'_k comme des fonctions connues de y_1 et de y_2; les équations (9) et (9') nous donneront donc, si nous voulons que x_1^k et x_2^k soient des fonctions périodiques de y_1:

$$Nx_2^1\left[\frac{dx_1^{k-1}}{dy_2}\right] = [Y_k] \tag{10}$$

et

$$M\frac{dx_2^1}{dy_2}[x_1^{k-1}] + N\left[\frac{d(x_2^1 x_2^{k-1})}{dy_2}\right] = [Y'_k]. \tag{10'}$$

Ces équations (10) et (10') détermineraient complètement les fonctions x_1^{k-1} et x_2^{k-1} que nous ne connaissions encore qu'à une fonction arbitraire près de y_2; mais il y a intérêt à remplacer l'équation (10) par une autre équivalente mais plus simple, qu'on obtient de la façon suivante:

Nous avons vu plus haut que l'on doit avoir:

$$H_0 = C, \qquad H_1 = H_2 = \ldots = H_{k-1} = 0.$$

Considérons l'équation $H_{k-1} = 0$; elle peut s'écrire:

$$n_1 x_1^{k-1} = \theta'_{k-1}, \tag{11}$$

θ'_{k-1} ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^{k-2}$.

En vertu de cette équation (11) la fonction x_1^{k-1} peut être regardée comme entièrement déterminée.

J'écrirai alors l'équation (10') sous la forme:

$$N\frac{d(x_2^1[x_2^{k-1}])}{dy_2} = [Y'_k] - M\frac{dx_2^1}{dy_2}[x_1^{k-1}]. \tag{12}$$

Le second membre de (12) est une fonction entièrement connue de y_2 et je pourrai la représenter par la notation:

$$\frac{dS_{k-1}}{dy_2},$$

S_{k-1} étant une fonction entièrement connue de y_2. L'équation (12) nous donnera alors:

$$[x_2^{k-1}] = \frac{S_{k-1}}{Nx_2^1} + \frac{C_{k-1}}{Nx_2^1}, \tag{13}$$

C_{k-1} désignant une constante d'intégration que nous choisirons d'une manière arbitraire. Une fois cette constante choisie, $[x_2^{k-1}]$ sera entièrement déterminé.

Connaissant à la fois $\frac{dx_2^{k-1}}{dy_2}$ et $[x_2^{k-1}]$ nous pourrons regarder x_2^{k-1} comme complètement connu.

Ayant choisi x_1^{k-1} et x_2^{k-1} de façon à satisfaire aux équations (10) et (10'), les équations (9) et (9') nous donneront $\frac{dx_1^k}{dy_1}$ et $\frac{dx_2^k}{dy_1}$ sous la forme de séries trigonométriques en y_1, n'ayant pas de terme tout connu. Elles nous feront donc connaître x_1^k et x_2^k à une fonction arbitraire près de y_2, de sorte qu'on peut recommencer la même opération sur les équations analogues à (9) et à (9') mais correspondant à une valeur de k plus élevée d'une unité, et ainsi de suite.

On pourra donc par la méthode que je viens d'exposer calculer par récurrence x_1^0 et x_2^0, x_1^1 et $x_2^1, \ldots, x_1^k$ et $x_2^k, \ldots$; mais il reste plusieurs points à discuter:

1°. Dans quels cas les séries ainsi obtenues sont-elles convergentes?

2°. Comment faut-il choisir les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_{k-1}, \ldots$?

3°. Quelles sont les propriétés des fonctions définies par les séries qui précèdent?

C'est à cette discussion que nous consacrerons les paragraphes suivants.

§ 3. *Construction des surfaces asymptotiques.*

(Première approximation.)

Nous nous contenterons dans ce paragraphe d'écrire et de discuter les équations de nos surfaces trajectoires en négligeant les termes en μ et ne tenant compte que des termes en $\sqrt{\mu}$.

Nous supposerons donc que x_1 et x_2 sont définis en fonction de y_1 et de y_2 par les équations suivantes:

$$x_1 = x_1^0 + \sqrt{\mu} x_1^1 = x_1^0,$$

$$x_2 = x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 = x_2^0 + \sqrt{\frac{2\mu}{N}([F_1] + C_1)}.$$

D'après cela, x_1 serait une constante et x_2 une fonction de y_2 seulement, indépendante de y_1.

Revenons à notre premier exemple du § 1. Ce que nous dirons s'appliquerait également aux deux autres exemples, mais c'est sur le premier que je veux insister parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps.

Nous avons vu que l'on pouvait représenter la situation du système par le point P qui a pour coordonnées rectangulaires:

$$\cos y_1' e^{\xi \cos y_2'}, \ \sin y_1' e^{\xi \cos y_2'}, \ \xi \sin y_2',$$

où

$$y_1' = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad y_2' = \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \qquad \xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G} = \frac{-x_2'}{x_1'},$$

$$y_1 = g - t, \qquad y_2 = l.$$

Nous avions observé de plus que les variables

$$x_1' = x_1 + x_2, \qquad x_2' = x_1 - x_2$$

forment avec y_1' et y_2' un système de variables canoniques.

Nous pouvons donc regarder ξ, y_1' et y_2' comme un système particulier de coordonnées définissant la position du point P dans l'espace, de sorte que toute relation entre ξ, y_1', y_2' est l'équation d'une surface.

Mais pour amener les équations à la forme que nous leur avions donnée dans le paragraphe précédent, nous avons dû faire un autre changement de variables.

Nous avons posé dans ce paragraphe:

$$x_1'' = ax_1 + bx_2, \qquad y_1'' = dy_1 - cy_2,$$

$$x_2'' = cx_1 + dx_2, \qquad y_2'' = -by_1 + ay_2,$$

en choisissant les nombres entiers a, b, c, d de façon à annuler le nombre que nous avons appelé n_2''.

Après ce changement de variables, nous avons supprimé les accents devenus inutiles et nous avons restitué le nom de x_1, x_2, y_1, y_2 à nos nouvelles variables indépendantes x_1'', x_2'', y_1'' et y_2''.

En conséquence, les variables que nous avons appelées x_1, x_2, y_1 et y_2 dans tout le calcul qui remplit le § 2, et *auxquelles nous conserverons désormais ce nom*, ne sont pas les mêmes que celles que nous avions désignées par les mêmes lettres dans le premier exemple du § 1, c'est à dire $G, L, g-t$ et l.

Il est clair que notre nouvel y_1 et notre nouvel y_2 sont des fonctions linéaires de:

$$y_1' = \frac{1}{2}(g - t + l) \quad \text{et de} \quad y_2' = \frac{1}{2}(g - t - l)$$

et que le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1 est une fonction linéaire et fractionnaire de ξ.

Nous devons conclure de là que l'on peut définir complètement la position du point P dans l'espace par le nouvel y_1, le nouvel y_2 et le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1 de telle façon que toute relation entre y_1, y_2 et $\frac{x_2}{x_1}$ est l'équation d'une surface.

Que ce système particulier de coordonnées est tel que l'on peut augmenter y_1 ou y_2 d'un multiple de 2π sans que le point P change.

Dans ces conditions, il est clair que l'équation exacte de nos surfaces trajectoires sera:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + \dots}{x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + \dots}$$

et que l'équation approximative, en négligeant les termes en μ sera:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu}}{x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu}} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}. \tag{1}$$

Nous nous proposons tout d'abord de construire les surfaces représentées par cette équation approximative (1).

Observons d'abord que $y_1 = 0$ est l'équation d'une certaine surface S et que la portion de cette surface qui nous sera utile est une portion de surface sans contact.

En effet il suffit de montrer que l'on a:

$$\frac{dy_1}{dt} \gtrless 0.$$

Or il en est évidemment ainsi, car si l'on pose

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

il vient:

$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 - \mu \frac{dF_1}{dx_1} - \mu^2 \frac{dF_2}{dx_1} + \dots.$$

Le paramètre μ étant très petit, $\frac{dy_1}{dt}$ est de même signe que n_1 et n_1 est une constante qui est toujours de même signe.

Donc $\frac{dy_1}{dt}$ est toujours de même signe et ne peut s'annuler.

C. Q. F. D.

La position d'un point P sur la surface S sera définie par les deux autres coordonnées y_2 et $\frac{x_2}{x_1}$; ce système de coordonnées est tout à fait analogue aux coordonnées polaires, c'est à dire que les courbes:

$$\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$$

sont des courbes fermées concentriques et que le point P ne change pas quand l'autre coordonnée y_2 augmente de 2π.

Reprenons les surfaces définies par l'équation (1) et étudions leurs intersections avec la portion de surface S qui a pour équation $y_1 = 0$.

Je remarque d'abord que $\sqrt{\mu}$ étant très petit, ces intersections différeront fort peu des courbes $\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$

Mais pour étudier plus complètement la forme de ces courbes d'intersection, il faut d'abord rechercher quelles sont les propriétés de la fonction

$$[F_1].$$

Revenons aux notations du § 3 ($1^{\text{ère}}$ partie, chapitre III). Dans ce paragraphe nous avons posé:

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + h),$$

A et h étant des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0; comme nous n'avons plus ici que deux degrés de liberté, j'écrirai simplement:

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + h).$$

En faisant ensuite:

$$y_1 = n_1 t, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad \omega = (n_1 m_1 + n_2 m_2)t + m_2 \varpi_2 + h,$$

nous trouvions:

$$F_1 = \Sigma A \sin \omega.$$

Je posais ensuite:

$$\phi = \mathrm{S} A \sin \omega,$$

la sommation indiquée par le signe S s'étendant à tous les termes tels que:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0;$$

d'où

$$\omega = m_2 \varpi_2 + h.$$

Dans le cas qui nous occupe, n_2 est nul; la condition $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$ se réduit à $m_1 = 0$ et on a $y_2 = \varpi_2$; il vient donc:

$$\phi = \mathrm{S} A \sin(m_2 \varpi_2 + h) = \mathrm{S} A \sin(m_2 y_2 + h).$$

D'après la définition de $[F_1]$, il suffit pour obtenir cette quantité de supprimer dans l'expression de F_1 tous les termes où m_1 n'est pas nul; il vient donc:

$$[F_1] = \mathrm{S} A \sin(m_2 y_2 + h) = \phi.$$

Ainsi la fonction que nous appelons ici $[F_1]$ est la même que nous désignions par ϕ dans la $1^{\text{ère}}$ partie.

$[F_1]$ est par conséquent une fonction périodique de y_2 et cette fonction est finie; elle doit donc passer au moins par un maximum et par un minimum.

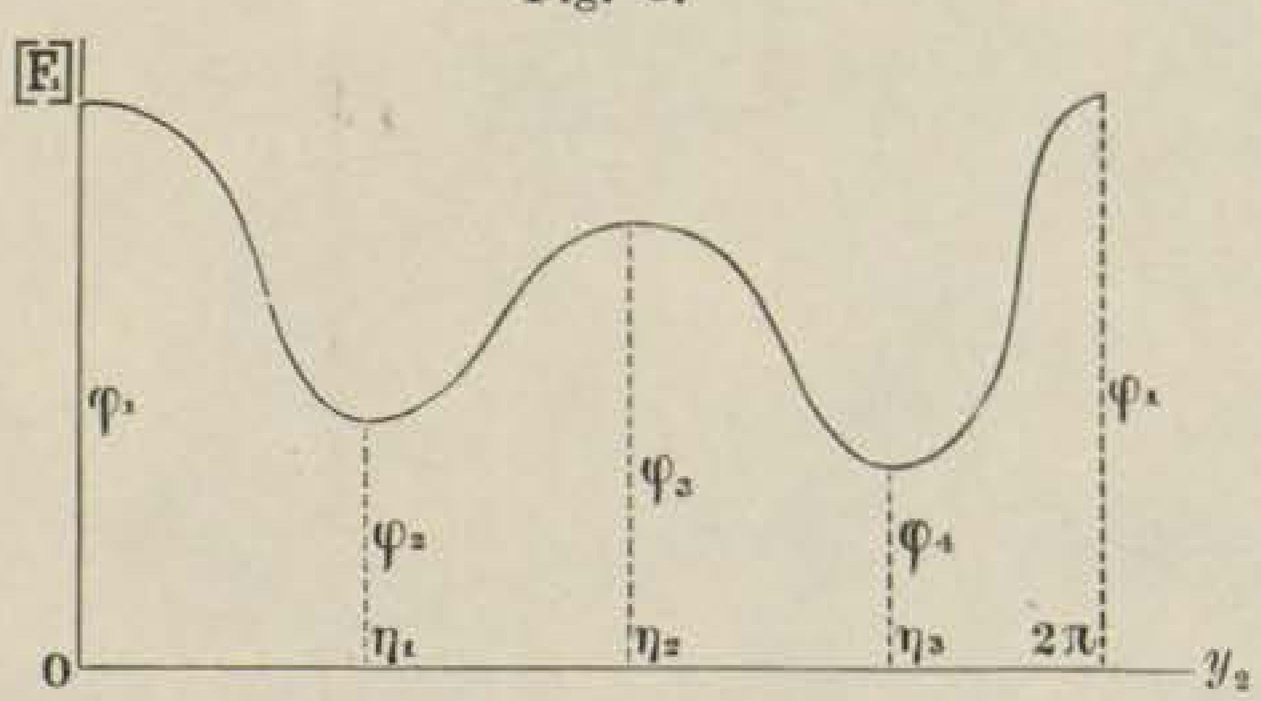
Nous supposerons pour fixer les idées que $[F_1]$ varie de la façon suivante quand y_2 varie depuis o jusqu'à 2π.

Pour $y = 0$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à φ_1.
Pour $y = \eta_1$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à φ_2.
Pour $y = \eta_2$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à φ_3.
Pour $y = \eta_2$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à φ_4.
Pour $y = 2\pi$ $[F_1]$ reprend la valeur φ_1.

$$\varphi_1 > \varphi_3 > \varphi_2 > \varphi_4.$$

Ces hypothèses peuvent être représentées par la courbe suivante dont l'abscisse est y_2 et l'ordonnée $[F_1]$:

Fig. 6.



Ayant ainsi fixé les idées, je puis construire les courbes

$$y_1 = 0, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

Nous verrons que selon la valeur de la constante d'intégration C_1, ces courbes affecteront des formes différentes.

Dans la figure (7), j'ai représenté par un trait plein ———— les deux courbes $C_1 = -\varphi_4$ et $C_1 = -\varphi_2$; ces deux courbes ont chacune un point double dont les coordonnées sont respectivement:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_3$$

et:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_1.$$

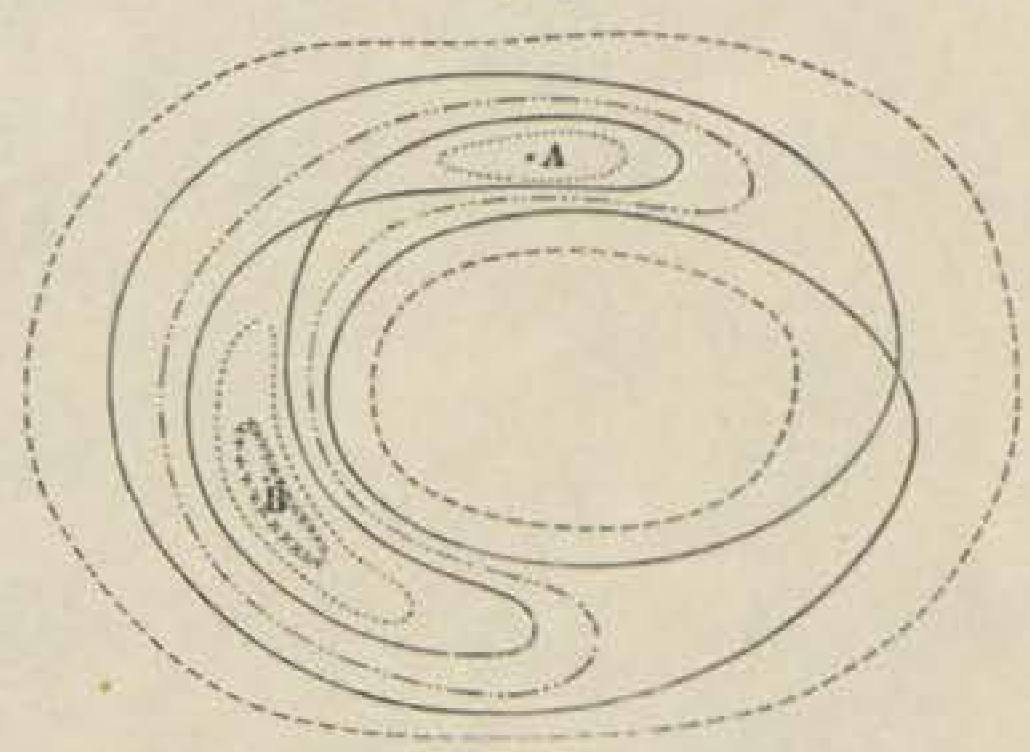
J'ai représenté par un trait pointillé - - - - - - - les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de $C_1 > -\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait mixte _.._.._.._.._.. une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait ponctué .... les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$.

Pour $C_1 = -\varphi_3$ l'une de ces deux branches se réduit à un point représenté sur la figure en A, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}$, $y_2 = \eta_2$; l'autre branche est représentée sur la figure par le trait × × × × × ×.

Fig. 7.



Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, cette seconde branche subsiste seule; pour $C_1 = -\varphi_1$. elle se réduit à son tour à un point représenté en B sur la figure et ayant pour coordonnées:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = 0.$$

Enfin pour $C_1 < -\varphi_1$, la courbe devient toute entière imaginaire.

Les surfaces définies par l'équation (1) ont une forme générale qu'il est aisé de déduire de celle des courbes que nous venons de construire.

Considérons en effet une quelconque de ces courbes et par tous ses points faisons passer une des lignes dont l'équation générale est:

$$y_2 = \text{const.}; \qquad \frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$$

L'ensemble des lignes ainsi construites constituera une surface fermée qui sera précisément l'une des surfaces définies par l'équation (1).

On voit par là que ces surfaces seront en géneral des surfaces fermées triplement connexes (c'est à dire ayant mêmes connexions que le tore).

Pour $C_1 > -\varphi_4$ ou pour C_1 compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$ on trouve deux pareilles surfaces, intérieures l'une à l'autre dans le premier cas, extérieures l'une à l'autre dans le second.

Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, ou entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$ on n'a plus qu'une seule surface triplement connexe; enfin pour $C_1 < -\varphi_1$ la surface cesse complètement d'exister.

Passons aux quatre surfaces remarquables:

$$C_1 = -\varphi_1\,,\ -\varphi_2\,,\ -\varphi_3 \quad \text{et} \quad -\varphi_4.$$

Les surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $C_1 = -\varphi_4$ présentent une courbe double et ont mêmes connexions que la surface engendrée par la révolution d'un limaçon de PASCAL à point double, ou d'une lemniscate autour d'un axe qui ne rencontre pas la courbe.

La surface $C_1 = -\varphi_3$ se réduit à une seule surface fermée triplement connexe et à une courbe fermée isolée; enfin la surface $C_1 = -\varphi_1$ se réduit à une courbe fermée isolée.

Dans le § 3 (1ère partie, chapitre III) nous avons envisagé l'équation:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0$$

qui portait le n° 15 dans ce paragraphe; nous avons vu qu'à chacune des racines de cette équation correspond une solution périodique. Mais dans le cas qui nous occupe, et d'après une remarque que nous venons de faire, cette équation peut s'écrire:

$$\frac{[dF_1]}{dy_2} = 0,$$

de telle sorte que les solutions périodiques correspondront aux maxima et aux minima de $[F_1]$. Dans le cas actuel, ces maxima, de même que les minima, seront au nombre de deux.

Nous aurons donc deux solutions périodiques instables correspondant aux deux courbes doubles des surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $-\varphi_4$ et deux solutions périodiques stables, correspondant aux deux courbes fermées isolées des surfaces $C_1 = -\varphi_3$ et $-\varphi_1$.

Mais voyons de plus près en quoi consiste cette correspondance.

Envisageons en particulier la solution périodique qui correspond à la courbe double de $C_1 = -\varphi_4$. Cette solution pourra d'après ce que nous avons vu dans le § 3 (1ère partie, chapitre III) se mettre sous la forme suivante:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \ldots, \\ x_2 &= \xi'_0 + \mu\xi'_1 + \mu^2\xi'_2 + \ldots, \\ y_1 &= \zeta_0 + \mu\zeta_1 + \mu^2\zeta_2 + \ldots, \\ y_2 &= \zeta'_0 + \mu\zeta'_1 + \mu^2\zeta'_2 + \ldots, \end{aligned}$$

où l'on a:

$$\xi_0 = x_1^0, \qquad \xi'_0 = x_2^0, \qquad \zeta_0 = n_1 t, \qquad \zeta'_0 = \eta_3,$$

et où $\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, \zeta_1$ etc. sont des fonctions périodiques de t.

Cette solution périodique serait représentée géométriquement par une courbe trajectoire fermée qui aurait pour équations:

$$(3)\qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \mu\theta_1, \qquad y_2 = \eta_3 + \mu\theta_2,$$

θ_1 et θ_2 étant des fonctions de y_1 et de μ qui restent finies quand μ s'annule.

D'autre part la courbe double de $C_1 = -\varphi_4$ a pour équations:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \qquad y_2 = \eta_3.$$

Cela montre que ces deux courbes diffèrent infiniment peu l'une de l'autre si l'on regarde μ comme une quantité infiniment petite et on peut faire correspondre les deux courbes point par point de façon que la distance de deux points correspondants soit du même ordre de grandeur que μ.

Comme la solution périodique définie par les deux équations (2) est instable, on pourra faire passer par la courbe définie par les équations (3) deux surfaces trajectoires asymptotiques.

Voyons quelle relation il y a entre ces surfaces asymptotiques et la surface $C_1 = -\varphi_4$ que nous venons de construire.

D'après ce que nous avons vu au § 5 (1ère partie, chapitre III), ces surfaces asymptotiques auront pour équations:

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
x_1 &= \xi_1^0 + \xi_1^1\sqrt{\mu} + \xi_1^2\mu + \xi_1^3\mu\sqrt{\mu} + \dots, \\
x_2 &= \xi_2^0 + \xi_2^1\sqrt{\mu} + \xi_5^2\mu + \xi_2^3\mu\sqrt{\mu} + \dots.
\end{aligned}
$$

Les séries qui entrent dans les seconds membres des équations (4) sont des séries convergentes développées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et les quantités ξ_1^0, ξ_1^1, ξ_2^0 etc. sont des fonctions de y_1 et de y_2 sur lesquelles nous ne savons qu'une chose, c'est qu'elles sont périodiques de période 2π par rapport à y_1.

De plus la surface définie par les équations (4) doit passer par la courbe définie par les équations (3), ce qui veut dire qu'en substituant dans les seconds membres de (4) les valeurs de y_1 et de y_2 tirées des deux dernières équations (2), on doit retomber sur les deux premières équations (2). On doit donc avoir:

$$
\begin{aligned}
\xi_0 + \mu\xi_1 + \dots &= \xi_1^0(\zeta_0 + \mu\zeta_1 + \dots, \zeta_0' + \mu\zeta_1' + \dots) \\
&+ \sqrt{\mu}\xi_1'(\zeta_0 + \mu\zeta_1 + \dots, \zeta_0' + \mu\zeta_1' + \dots) + \dots.
\end{aligned}
$$

Ce qui prouve qu'on doit avoir:

$$
\xi_1^0(\zeta_0, \zeta_0') = x_1^0, \qquad \xi_2^0(\zeta_0, \zeta_0') = x_2^0, \qquad \xi_1^1(\zeta_0, \zeta_0') = 0, \qquad \xi_2^1(\zeta_0, \zeta_0') = 0.
$$

Il est aisé de voir à quoi se réduisent les surfaces asymptotiques quand on suppose $\mu = 0$, on trouve alors simplement

$$
x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0.
$$

On a donc identiquement:

$$
\xi_1^0 = x_1^0, \qquad \xi_2^0 = x_2^0.
$$

Les surfaces asymptotiques devant être des surfaces trajectoires, les fonctions de μ, de y_1 et de y_2 définies par les équations (4) devront satisfaire identiquement aux équations (3) du paragraphe précédent. On verrait donc par le même calcul que dans le paragraphe précédent que

$$\xi_1^1 = 0, \qquad \xi_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)},$$

C_1 étant une constante qu'il s'agit de déterminer. C'est ce que nous ferons à l'aide de l'équation:

$$\xi_2^1(\zeta_0, \zeta_0') = \xi_2^1(nt, \eta_3) = 0.$$

La fonction ξ_2^1 ne dépendant que de y_2, il suffira d'y remplacer y_2 par η_3, ce qui donnera

$$\sqrt{\frac{2}{N}(\varphi_4 + C_1)} = 0$$

ou

$$C_1 = -\varphi_4.$$

Donc la surface $C_1 = -\varphi_4$ a pour équation:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\xi_2^0 + \xi_2^1\sqrt{\mu}}{\xi_1^0 + \xi_1^1\sqrt{\mu}}.$$

Elle ne diffère donc de la surface asymptotique (4) que par des termes de l'ordre de μ.

Cette surface à ligne double $C_1 = -\varphi_4$ peut donc être regardée comme une première approximation de la surface asymptotique cherchée et on peut faire correspondre les deux surfaces point par point de telle façon que la distance de deux points correspondants soit de même ordre de grandeur que μ.

De là on peut tirer diverses conséquences:

1°. *En première approximation les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées;* c'est là un résultat que les approximations suivantes confirmeront.

2°. Toute surface asymptotique étant une surface trajectoire, son intersection par la portion de surface sans contact S qui a pour équation $y_1 = 0$ sera une courbe invariante C (cf. § 4, chapitre II, 1ère partie).

Considérons donc la courbe C''

$$y_1 = 0, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] - \varphi_4)}.$$

Cette courbe différera infiniment peu (aux quantités près de l'ordre de μ) de la courbe invariante de C. Sa conséquente différera aussi infiniment peu de la conséquente de C, c'est à dire de C elle-même. Donc la courbe C'' différera infiniment peu (aux quantités près de l'ordre de μ) de sa propre conséquente. Ce sera donc, pour employer le langage du paragraphe cité, *une courbe péninvariante aux quantités près de l'ordre de μ.*

3°. La courbe C'' est une courbe fermée; la courbe C'[1] qui en diffère infiniment peu sera donc une courbe *quasi fermée* et de telle façon que la distance des deux points de fermeture soit de l'ordre de μ. Ainsi *la surface asymptotique coupe la surface $y_1 = 0$, suivant une courbe quasi fermée.*

Si l'on faisait $\mu = 0$, la solution la plus générale des équations données serait:

$$x_1 = \text{const.}, \qquad x_2 = \text{const.},$$

$$y_1 = -t\frac{dF_0}{dx_1} + \text{const.}, \qquad y_2 = -t\frac{dF_0}{dx_2} + \text{const.}$$

Par conséquent si les valeurs initiales de x_1 et de x_2 étaient $x_1^0 + \delta x_1$, $x_2^0 + \delta x_2$, x_1 et x_2 resteraient constamment égaux à $x_1^0 + \delta x_1$ et $x_2^0 + \delta x_2$; de même $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et $-\frac{dF_0}{dx_2}$ conserveraient des valeurs constantes et l'on aurait:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} = n_1 + L\delta x_1 + M\delta x_2 + \delta^2 n_1,$$

$$-\frac{dF_0}{dx_2} = M\delta x_1 + N\delta x_2 + \delta^2 n_2,$$

[1] Tous ces raisonnements supposent que dans les équations (4) des surfaces asymptotiques, les séries des seconds membres restent convergentes quelque soit y_2 pourvu que μ soit suffisamment petit; c'est ce que des considérations empruntées au »calcul des limites» permettent d'établir aisément. Voir ce que j'ai dit à ce sujet page 96 et aussi ce que j'ai dit du calcul des limites dans l'introduction. Consulter également la *Note E*.

$\delta^2 n_1$ et $\delta^2 n_2$ étant des infiniment petits du 2^d ordre quand δx_1 et δx_2 sont des infiniment petits du 1^{er} ordre.

Soit alors y_2^0 la valeur initiale de y_2 quand on fait $y_1 = 0$; faisons croître le temps jusqu'à ce que y_1 devienne égal à 2π; alors y_2 sera devenu égal à:

$$y_2^0 + \frac{2\pi M}{n_1}\delta x_1 + \frac{2\pi N}{n_1}\delta x_2 + \delta^2 y_2^0,$$

$\delta^2 y_2^0$ étant infiniment petit du 2^d ordre, si on regarde δx_1 et δx_2 comme des infiniment petits du 1^{er} ordre.

Si donc nous supposons $\mu = 0$ et qu'un point P appartenant à la portion de surface sans contact $y_1 = 0$, ait pour coordonnées

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1, \qquad x_2 = x_2^0 + \delta x_2, \qquad y_1 = 0, \qquad y_2 = y_2^0$$

son conséquent aura pour coordonnées

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1, \qquad x_2 = x_2^0 + \delta x_2,$$

$$y_1 = 2\pi, \qquad y_2 = y_2^0 + \frac{2\pi M}{n_1}\delta x_1 + \frac{2\pi N}{n_1}\delta x_2 + \delta^2 y_2^0.$$

Si l'on ne suppose plus $\mu = 0$, le conséquent de ce même point P aura pour coordonnées:

$$x_1 = x_1^0 + \delta x_1 + \mu\omega_1, \qquad x_2 = x_2^0 + \delta x_2 + \mu\omega_2,$$

$$y_1 = 2\pi, \qquad y_2 = y_2^0 + \frac{2\pi M}{n_1}\delta x_1 + \frac{2\pi N}{n_1}\delta x_2 + \delta^2 y_2^0 + \mu\omega_3,$$

ω_1, ω_2, ω_3 étant des fonctions de μ, y_2^0, δx_1 et δx_2 qui restent finies quand μ s'annule.

Imaginons maintenant que le point P appartienne à la surface $C_1 = -\varphi_4$.

Si alors y_2 n'est pas très voisin de η_3, l'expression $[F_1] - \varphi_4$ n'est pas infiniment petite, et par conséquent si μ est très petit:

$$\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_2^0}{x_1^0}$$

est précisément du même ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$; d'où l'on conclut