SUR LE

PROBLÈME DES TROIS CORPS

ET LES

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR

H. POINCARÉ
À PARIS.

MÉMOIRE COURONNÉ
DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II
LE 21 JANVIER 1889.

AVEC DES NOTES
PAR L'AUTEUR.

Nunquam præscriptos transibunt sidera fines.

Table des matières.

4

Pages.

Introduction

Le travail qui va suivre (et qui a pour objet l'étude du problème des trois corps) est un remaniement du mémoire que j'avais présenté au Concours pour le prix institué par Sa Majesté le Roi de Suède. Ce remaniement était devenu nécessaire pour plusieurs raisons. Pressé par le temps, j'avais dû énoncer quelques ~~plusieurs~~ résultats sans démonstration; le lecteur n'aurait pu, à l'aide des indications que je donnais, reconstituer les démonstrations qu'avec beaucoup de peine. J'avais songé d'abord à publier le texte primitif en l'accompagnant de notes explicatives; mais j'avais été amené à multiplier ces notes de telle sorte que la lecture du mémoire serait devenue fastidieuse et pénible.

J'ai donc préféré fondre ces notes ~~dans~~ le corps de l'ouvrage ce qui a l'avantage d'éviter quelques redites et de faire mieux ressortir l'ordre logique des idées.

Je dois beaucoup de reconnaissance à M. Phragmén qui non seulement a revu les épreuves avec beaucoup de soin, mais qui, ayant lu le mémoire avec attention et en ayant pénétré le sens avec une grande finesse, m'a signalé les points où des explications complémentaires lui semblaient nécessaires pour faciliter ~~permettre~~ l'entière intelligence de ma pensée. ~~J'ajouterai que c'est à lui que~~ Je lui dois la forme élégante que je donne au calcul de S_i^m et de T_i^m à la fin du §§ ~~X~~ 12 (~~1ère Partie, Chapitre III~~). C'est même lui qui, en appelant mon attention sur un point délicat, m'a permis de découvrir et de rectifier une importante erreur.

Dans quelques unes des ~~Parmi les~~ additions que j'ai faites au mémoire primitif, je me borne à rappeler certains résultats déjà connus; comme ces résultats sont dispersés dans un grand nombre de recueils et que j'en fais un fréquent usage, j'ai cru rendre service au lecteur en lui épargnant de fastidieuses recherches; d'ailleurs je suis souvent conduit à appliquer ces théorèmes sous une forme différente de celle que leur auteur leur avait d'abord donnée et il était indispensable de les exposer sous cette nouvelle forme. Ces théorèmes acquis, dont quelques uns sont même classiques, sont développés ~~dans le~~, à côté de quelques propositions ~~résultats~~ nouvelles, dans le Chapitre 1er ~~(1ère Partie)~~ (1ère partie).

Je suis bien loin d'avoir résolu complètement le problème que j'ai abordé. ~~Les résultats définitifs auxquels je parviens ne portent que sur des points bien particuliers~~; je me suis borné à démontrer l'existence de certaines solutions particulières remarquables que j'appelle solutions périodiques, solutions asymptotiques, et solutions doublement asymptotiques. ~~Je~~ J'ai étudié plus spécialement ~~pu montrer également que, dans~~ un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que

62

les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles.

Comme on le voit, ces résultats ne nous apprennent que peu de chose sur le cas général du problème; mais ce qui peut leur donner quelque prix, c'est qu'ils sont établis avec rigueur, tandis que le problème des trois corps ne paraissait jusqu'ici abordable que par des méthodes d'approximation successive où l'on faisait bon marché de ~~la~~ cette rigueur absolue qui est exigée dans les autres parties des mathématiques.

Mais j'attirerai surtout l'attention du lecteur sur les résultats négatifs ~~que j'ai obtenus et~~ qui sont développés à la fin du mémoire. J'établis par exemple que le problème des trois corps ne ~~peut posséder~~ comporte, ~~en~~ en dehors des intégrales connues, aucune intégrale analytique et uniforme. Bien d'autres circonstances nous font prévoir que la solution complète ~~du problème~~, si jamais on peut la découvrir, exigera des instruments analytiques absolument différents de ceux que nous possédons et infiniment plus compliqués. Plus on réfléchira ~~au sujet des propositions~~ sur les propositions que je démontre plus loin, ~~plus~~ mieux on comprendra que ce problème présente des difficultés inouïes, ~~que~~ que l'insuccès des efforts antérieurs avait bien fait pressentir, mais dont je crois avoir mieux encore fait ressortir la nature et la grandeur.

J'ai ~~également~~ fait voir également que la plupart des séries employées en Mécanique Céleste et en particulier celles de M. Lindstedt qui sont les plus simples, ne sont pas convergentes. Je serais désolé d'avoir par là jeté quelque discrédit sur les travaux de M. Lindstedt ou sur les recherches plus profondes de M. Gyldén. Rien ne serait plus éloigné de ma pensée. Les méthodes qu'ils proposent conservent toute leur valeur pratique. On sait en effet le parti qu'on peut tirer dans un calcul numérique de l'emploi des séries divergentes et la série fameuse de Stirling en est un exemple frappant. C'est grâce à une circonstance analogue que les développements usités en Mécanique Céleste ont rendu déjà de si grands services et sont appelés à en rendre de plus grands encore.

L'une des séries dont je ferai usage plus loin et dont je démontrerai d'ailleurs la divergence, ~~présente~~ offre une grande analogie avec un développement proposé par M. Bohlin à l'Académie de Stockholm le 9 Mai 1888. Comme son mémoire n'a été imprimé que quelques mois plus tard, je n'en avais pas connaissance à l'époque de la fermeture du concours, c'est à dire le 1er Juin 1888. Je n'ai donc pas cité le nom de M. Bohlin, je m'empresse de ~~réparer~~ lui rendre ici ~~cette~~ la justice qui lui est due. (Cf Supplément aux Comptes Rendus de l'Académie de Stockholm, Tome ~~XIV~~ 14 ~~[illegible]~~ et Astronomische Nachrichten N°)

7

Première partie.

Généralités.

CHAPITRE I.

~~Notations et définitions.~~ Propriétés générales des équations différentielles.

§1. Notations et définitions.

Considérons un système d'équations différentielles:

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

où t représente la variable indépendante que nous appellerons le temps, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les fonctions inconnues, où enfin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous supposons en général que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont analytiques et uniformes pour toutes les valeurs réelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si l'on savait intégrer les équations (1), on pourrait mettre le résultat de l'intégration sous deux formes différentes; on pourrait écrire:

$$(2) \qquad x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \qquad x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n), \ldots$$
$$x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ désignant les constantes d'intégration.

On pourrait écrire encore, en résolvant par rapport à ces constantes:

$$(3) \qquad \begin{aligned} C_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ C_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

Pour éviter toute confusion, nous dirons que les équations (2) représentent la *solution générale* des équations (1) si les constantes C y restent arbitraires et qu'elles représentent une *solution particulière* si on y donne aux C des valeurs numériques. Nous dirons d'autre part que dans les équations (3), $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont n *intégrales particulières* des équations (1). Le sens des mots *solution* et *intégrale* se trouve ainsi entièrement fixé.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière des équations (1) qui s'écrira:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t). \tag{4}$$

On peut se proposer d'étudier les solutions particulières de (1) qui diffèrent peu de la solution (4). Pour cela posons:

$$x_1 = \varphi_1 + \xi_1, \quad x_2 = \varphi_2 + \xi_2, \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n + \xi_n$$

et prenons pour nouvelles fonctions inconnues $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Si la solution que l'on veut étudier diffère peu de la solution (4), les ξ sont très petits et nous en pouvons négliger les carrés. Les équations (1) deviennent alors, en négligeant les puissances supérieures des ξ:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n. \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{5}$$

Dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ doivent être remplacées par $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, de sorte que ces dérivées peuvent être regardées comme des fonctions connues du temps.

Les équations (5) s'appelleront les *équations aux variations* des équations (1). On voit que les équations aux variations sont linéaires.

Les équations (1) sont dites *canoniques* lorsque les variables x sont en nombre pair $n = 2p$, se répartissant en deux séries

$$x_1, x_2, \ldots, x_p,$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_p,$$

et que les équations (1) peuvent s'écrire:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

Elles ont alors la forme des équations de la dynamique et nous dirons, à l'exemple des Anglais, que le système d'équations (6) comporte p *degrés de liberté*.

On sait que ce système (6) admet une intégrale dite des forces vives:

$$F = \text{const.}$$

et que si l'on en connaît $p - 1$ autres, on peut considérer les équations canoniques comme complètement intégrées.

Considérons en particulier le cas de $n = 3$; nous pourrons alors regarder x_1, x_2 et x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. Les équations:

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = X_3$$

définissent alors la vitesse de ce point P en fonction de ses coordonnées. Considérons une solution particulière des équations (1)

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \qquad x_3 = \varphi_3(t).$$

Lorsque nous ferons varier le temps t, le point P décrira une certaine courbe dans l'espace; nous l'appellerons une *trajectoire*. A chaque solution particulière des équations (1) correspond donc une trajectoire et réciproquement.

Si les fonctions X_1, X_2 et X_3 sont uniformes, par chaque point de l'espace passe une trajectoire et une seule. Il n'y a d'exception que si l'une de ces trois fonctions devient infinie ou si elles s'annulent toutes les trois. Les points où ces cas d'exception se présenteraient s'appelleraient *points singuliers*.

Considérons une courbe gauche quelconque. Par chacun des points de cette courbe passe une trajectoire; l'ensemble de ces trajectoires constitue une surface que j'appellerai *surface-trajectoire*.

Comme deux trajectoires ne peuvent se couper sinon en un point singulier, une surface-trajectoire qui ne passe en aucun point singulier ne peut être coupée par aucune trajectoire.

Nous aurons fréquemment dans la suite à nous occuper de la question de la stabilité. Il y aura *stabilité*, si les trois quantités x_1, x_2, x_3 restent

/10

inférieures à certaines limites quand le temps t varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; ou en d'autres termes, si le trajectoire du point P reste tout entière dans une région limitée de l'espace.

Supposons qu'il existe une surface-trajectoire fermée S; cette surface partagera l'espace en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure, et aucune trajectoire ne pourra passer d'une de ces régions dans l'autre. Si donc la position initiale du point P est dans la région intérieure, ce point y restera éternellement; sa trajectoire sera toute entière à l'intérieur de S. Il y aura donc stabilité.

Ainsi la question de stabilité se ramène à la recherche des surfaces trajectoires fermées.

On peut varier ce mode de représentation géométrique; supposons par exemple que l'on pose:

$$x_1 = \psi_1(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_2 = \psi_2(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_3 = \psi_3(z_1, z_2, z_3),$$

les ψ étant des fonctions de z qui sont uniformes pour toutes les valeurs réelles des z. Nous pourrons considérer non plus x_1, x_2, x_3, mais z_1, z_2, z_3 comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Quand on connaîtra la position de ce point, on connaîtra z_1, z_2, z_3 et par conséquent x_1, x_2, x_3. Tout ce que nous avons dit plus haut reste exact.

Il suffit même que les trois fonctions ψ restent uniformes dans un certain domaine, pourvu qu'on ne sorte pas de ce domaine.

Si $n > 3$, ce mode de représentation ne peut plus être employé en général, à moins qu'on ne se résigne à envisager l'espace à plus de trois dimensions. Il est pourtant un cas où la difficulté peut être tournée.

Supposons par exemple que $n = 4$ et qu'on connaisse une des intégrales des équations (1). Soit:

16 (7) $$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = C$$

cette intégrale. Nous regarderons la constante d'intégration C comme une donnée de la question. Nous pourrons alors tirer de l'équation (7) une des quatre quantités x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction des trois autres, ou bien encore trouver trois variables auxiliaires z_1, z_2, z_3 telles qu'en faisant:

$$x_1 = \psi_1(z_1, z_2, z_3), \qquad x_3 = \psi_3(z_1, z_2, z_3),$$
$$x_2 = \psi_2(z_1, z_2, z_3), \qquad x_4 = \psi_4(z_1, z_2, z_3),$$

on satisfasse à l'équation (7) quelles que soient les valeurs de z_1, z_2, z_3. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir ces variables auxiliaires z de façon que les quatre fonctions ψ soient uniformes, sinon pour toutes les valeurs réelles des z, au moins dans un domaine d'où on n'aura pas à sortir.

On pourra alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées dans l'espace seront z_1, z_2 et z_3.

Supposons par exemple que l'on ait des équations canoniques avec deux degrés de liberté:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2},$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

Nous aurons quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2, mais ces variables seront liées par l'équation des forces vives:

$$F = C,$$

de sorte que si nous regardons la constante des forces vives C comme connue, il n'y aura plus que trois variables indépendantes et que la représentation géométrique sera possible.

Nous distinguerons parmi les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les variables *linéaires* et les variables *angulaires*. Il pourra arriver que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient toutes périodiques par rapport à l'une des variables x_i et ne changent pas quand cette variable augmente de 2π. La variable x_i et celles qui jouissent de la même propriété seront alors *angulaires*; les autres seront *linéaires*.

Je dirai que la situation du système n'a pas changé si toutes les variables angulaires ont augmenté d'un multiple de 2π et si toutes les variables linéaires ont repris leurs valeurs primitives.

Nous adopterons alors un mode de représentation tel que le point représentatif P revienne au même point de l'espace quand une ou plu-

12

sieurs des variables angulaires aura augmenté de 2π. Nous en verrons des exemples dans la suite.

Parmi les solutions particulières des équations (1), nous distinguerons les *solutions périodiques*. Soit

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

une solution particulière des équations (1). Supposons qu'il existe une quantité h telle que:

$$\varphi_i(t + h) = \varphi_i(t)$$

quand x_i est une variable linéaire et:

$$\varphi_i(t + h) = \varphi_i(t) + 2k\pi, \qquad (k \text{ étant entier})$$

quand x_i est une variable angulaire. Nous dirons alors que la solution considérée est *périodique* et que h est la période.

Si l'on adopte un mode de représentation géométrique tel que le point représentatif reste le même quand une des variables angulaires augmente de 2π, toute solution périodique sera représentée par une trajectoire fermée.

CHAPITRE II.

Théorie des invariants intégraux.

§ 1. *Propriétés diverses des équations de la dynamique.*

Soit F une fonction d'une double série de variables:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

et du temps t.

Supposons que l'on ait les équations différentielles:

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

/13

§2.

et à la limite (pour $\alpha_2 = \alpha_1$);

$$x_1 = C_1' e^{\alpha_1 t} \lambda_{1.1} + C_2' e^{\alpha_1 t} [t \lambda_{1.1} + \lim \lambda'(t)].$$

On verrait que la limite de $\lambda'(t)$ pour $\alpha_2 = \alpha_1$ est encore une série trigonométrique absolument et uniformément convergente.

Ainsi l'effet de la présence d'une racine double dans l'équation (5) a été d'introduire dans la solution des termes de la forme suivante:

$$e^{\alpha_1 t} t \lambda(t),$$

$\lambda(t)$ étant une série trigonométrique.

On verrait sans peine qu'une racine triple introduirait des termes de la forme:

$$e^{\alpha_1 t} t^2 \lambda(t)$$

et ainsi de suite.

Je n'insiste pas sur tous ces points de détail. Ces résultats sont bien connus par les travaux de MM. FLOQUET, CALLANDREAU, BRUNS, STIELTJES et si j'ai donné ici la démonstration in extenso pour le cas général, c'est que son extrême simplicité me permettait de la faire en quelques mots.

~~Note E.~~

---

§2. ~~Sur le~~ Calcul des limites.

L'une des plus belles découvertes de CAUCHY (Comptes rendus, tome 14, page 1020), quoiqu'elle ait été peut-être peu remarquée de son temps, est celle qu'il a appelée le calcul des limites et à laquelle nous conserverons ce nom, quelque mal justifié qu'il puisse être.

Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z).$$

14

Si f_1 et f_2 peuvent être développés suivant les puissances croissantes de x, y et z, ces équations admettront une solution de la forme suivante:

$$y = \varphi_1(x), \qquad z = \varphi_2(x),$$

φ_1 et φ_2 étant des séries développées suivant les puissances croissantes de x et s'annulant avec x.

Pour le démontrer, Cauchy remplace les deux fonctions f_1 et f_2 par une expression de la forme:

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{(1 - \alpha x)(1 - \beta y)(1 - \gamma z)},$$

en choisissant M, α, β, γ de façon que chaque terme de f' ait un plus grand coëfficient (en valeur absolue) que le terme correspondant de f_1 et de f_2. En remplaçant ainsi f_1 et f_2 par f', on augmente les coëfficients de φ_1 et de φ_2 et comme ces deux séries sont convergentes après ce changement, elles devaient l'être également avant ce changement.

Tel est le principe fondamental du calcul des limites dont Cauchy a fait d'ailleurs beaucoup d'autres applications et que plusieurs géomètres ont notablement perfectionné depuis.

Le plus grand de ces perfectionnements est dû à M. Weierstrass qui a remplacé la fonction $f'(x, y, z)$ de Cauchy par une autre plus simple qui peut jouer le même rôle.

Ecrivons les équations (1) sous la forme:

$$\frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z),$$
$$(1') \qquad \frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z),$$
$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z) = 1.$$

Remplaçons-y ensuite f, f_1 et f_2 par la fonction de M. Weierstrass

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{1 - \alpha(x + y + z)};$$

elles deviendront:

$$(2') \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{1 - \alpha(x + y + z)}.$$

Les équations (1′) sont satisfaites formellement par des séries:

$$x = \varphi(t) = t, \qquad y = \varphi_1(t), \qquad z = \varphi_2(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t.

De même les équations (2′) seront satisfaites par des séries

$$x = \varphi'(t), \qquad y = \varphi'_1(t), \qquad z = \varphi'_2(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t. (On voit facilement d'ailleurs que $\varphi'(t) = \varphi'_1(t) = \varphi'_2(t)$.)

Si M et α sont convenablement choisis, les coëfficients des séries φ' sont plus grands que ceux des séries φ; or les séries φ' convergent; donc les séries φ convergent également.

C. Q. F. D.

Je n'insiste pas sur ces démonstrations qui sont devenues tout à fait classiques et qui se trouvent développées dans tous les traités un peu complets d'Analyse, par exemple dans le Cours d'Analyse de M. Jordan (tome 3, page 87).

Mais on peut aller plus loin.

Imaginons que les fonctions f_1 et f_2 dépendent, non seulement de x, y et z, mais d'un certain paramètre arbitraire μ et qu'elles puissent se développer suivant les puissances croissantes de x, y, z et μ. Ecrivons alors les équations (1) sous la forme: Théorème I

$$(1'') \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, z, \mu) = 1, \\ \frac{dy}{dt} &= f_1(x, y, z, \mu), \\ \frac{dz}{dt} &= f_2(x, y, z, \mu). \end{aligned}$$

On peut trouver trois séries

$$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0) = t + x_0, \qquad y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

qui satisfassent formellement aux équations (1″), qui soient développées

16

suivant les puissances croissantes de t, de μ et de trois constantes d'intégration x_0, y_0, z_0 et qui enfin se réduisent respectivement à x_0, y_0 et z_0 pour $t = 0$.

Je dis que ces séries convergent pourvu que t, μ, x_0, y_0 et z_0 soient suffisamment petits.

En effet remplaçons f, f_1 et f_2 par la fonction:

$$f'(x, y, z, \mu) = \frac{M}{(1 - \beta\mu)[1 - \alpha(x + y + z)]}.$$

Cette fonction f' peut être développée suivant les puissances de x, y, z et μ. On peut prendre M, α et β assez grands pour que chaque terme de f' soit plus grand que le terme correspondant de f, de f_1 et de f_2.

Nous obtiendrons ainsi les équations

$$(2'') \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{(1 - \beta\mu)[1 - \alpha(x + y + z)]}.$$

On peut trouver trois séries

$$x = \varphi'(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad y = \varphi'_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z = \varphi'_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

développées suivant les puissances de t, μ, x_0, y_0, z_0, satisfaisant aux équations (2'') et se réduisant respectivement à x_0, y_0, z_0 pour $t = 0$.

En raisonnant comme le faisait Cauchy, on démontrerait que chaque terme des séries φ' est plus grand que le terme correspondant des séries φ. Or les séries φ' convergent, si t, μ, x_0, y_0 et z_0 sont assez petits. Donc les séries φ convergent également.

C. Q. F. D.

On peut tirer de là diverses conséquences.

Théorème II.

Nous venons de voir que x, y et z peuvent être développés suivant les puissances de t, μ, x_0, y_0 et z_0 pourvu que ces cinq variables, y compris t, soient suffisamment petites.

Je dis que x, y et z pourront encore être développées suivant les puissances des *quatre* variables μ, x_0, y_0 et z_0, quelque grand que soit t, pourvu que les quatre variables μ, x_0, y_0 et z_0 soient assez petites. Il y a toutefois un cas d'exception sur lequel je reviendrai.

En effet nous trouvons d'abord trois séries

$$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \qquad y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

qui définissent x, y et z pour les valeurs suffisamment petites de μ, x_0, y_0, z_0 et quand

$$|t| < \rho,$$

ρ étant le rayon de convergence de ces séries. Si donc t_1 est un point intérieur au cercle de convergence et si x_1, y_1 et z_1 sont les valeurs de x, y et z pour $t = t_1$, on voit que x_1, y_1 et z_1 sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0 et z_0, c'est à dire développables suivant les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Soient ensuite x_1^0, y_1^0 et z_1^0 les valeurs de x_1, y_1 et z_1 pour

$$\mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Cela posé, on aura dans le voisinage du point $t = t_1$

$$\begin{aligned} x &= \varphi'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0), \\ y &= \varphi_1'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0), \qquad (3) \\ z &= \varphi_2'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0). \end{aligned}$$

Les séries φ', φ_1' et φ_2', tout à fait analogues aux séries φ, φ_1 et φ_2, sont définies comme il suit.

Elles satisfont aux équations différentielles; elles sont développées suivant les puissances de $t - t_1$, μ, $x_1 - x_1^0$, $y_1 - y_1^0$ et $z_1 - z_1^0$; elles se réduisent à x_1, y_1 et z_1 pour $t = t_1$.

Elles convergeront si μ, $x_1 - x_1^0$, $y_1 - y_1^0$, $z_1 - z_1^0$ sont assez petits et si

$$|t - t_1| < \rho_1,$$

ρ_1 étant le rayon du nouveau cercle de convergence C_1.

Si t est un point intérieur à ce nouveau cercle de convergence C_1, on voit que x, y et z seront fonctions holomorphes de μ, $x_1 - x_1^0$, $y_1 - y_1^0$

18

et $z_1 - z_1^0$. Mais $x_1 - x_1^0$, $y_1 - y_1^0$, $z_1 - z_1^0$ sont déjà fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0, z_0. Donc, pour tout point t intérieur au cercle C_1, les trois quantités x, y et z sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0, z_0 développables selon les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Supposons maintenant que le point t soit extérieur au cercle C_1, le théorème sera encore vrai; il est clair en effet qu'il suffit pour le démontrer pour une valeur quelconque de t, de répéter le raisonnement précédent un nombre suffisant de fois.

Cette convergence sera d'ailleurs uniforme pour toute valeur de t inférieure à t_0, quelque grand que soit t_0.

On ne serait arrêté que dans un cas.

Le théorème de Cauchy cesse d'être vrai si les fonctions f_1 et f_2 ne sont plus holomorphes en x, y, z; par exemple si elles deviennent infinies, ou cessent d'être uniformes.

Si on ne peut pas développer les fonctions f, f_1 et f_2 suivant les puissances croissantes de μ, de $x - x_1^0, y - y_1^0, z - z_1^0$, il n'existera pas en général trois séries φ', φ_1' et φ_2' de la forme (3) satisfaisant aux équations différentielles.

On dit alors que le point

$$x = x_1^0, \qquad y = y_1^0, \qquad z = z_1^0$$

est un point singulier.

Si donc, en faisant varier t, on voyait le point mobile (x, y, z) passer par un point singulier, notre théorème serait en défaut. Si t variant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t_0$, le point mobile (x, y, z) ne passe par aucun point singulier, les trois fonctions x, y, z seront développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 pour toute valeur de t inférieure à t_0. Mais si pour $t = t_0$, le point (x, y, z) se confond avec un point singulier, le théorème cessera d'être vrai pour les valeurs de t supérieures à t_0.

Notre théorème comporte donc un cas d'exception. Mais ce cas ne se présentera pas dans le problème des trois corps et nous n'avons pas à nous en inquiéter. Soient en effet:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$$

19

les coordonnées des trois corps, r_{23}, r_{13}, r_{12} leurs distances mutuelles, m_1, m_2 et m_3 leurs masses. Les équations du problème seront de la forme suivante:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m_2(x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_3 - x_1)}{r_{13}^3}.$$

Le second membre de cette équation ne pourrait cesser d'être holomorphe en $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ que si l'une des trois distances r_{23}, r_{13}, r_{12} venait à s'annuler, c'est à dire si deux corps venaient à se choquer. Or nous n'appliquerons jamais notre théorème que quand on sera certain qu'un pareil choc ne peut se produire.

~~Ce théorème joue un grand rôle dans le présent mémoire.~~

Dans le § 5 (1ère partie, chapitre III) nous démontrons que certaines solutions particulières du problème, que nous appelons solutions asymptotiques, sont de la forme suivante.

Les quantités inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peuvent, pour des valeurs de t négatives et très grandes être développées suivant les puissances d'un certain paramètre $\sqrt{\mu}$ et d'une certaine exponentielle $e^{\alpha t}$, les coefficients étant des fonctions périodiques de t.

Nous en concluons que si t_1 est une quantité négative suffisamment grande en valeur absolue, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peuvent être développées suivant les puissances de $t - t_1$ et de $\sqrt{\mu}$.

Si nous appliquons maintenant le théorème que nous venons de démontrer, nous verrons que, dans une solution asymptotique, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, *pour toutes les valeurs de t.*

Ce même théorème peut servir également pour l'étude de ce que nous avons nommé le conséquent d'un point donné.

Soit:

$$z = \varphi(x, y)$$

l'équation d'une surface S que nous supposerons passer par l'origine O. Par l'origine O passe une trajectoire; imaginons que quand $\mu = 0$ cette trajectoire vienne au temps $t = \tau$ recouper la surface S en un point P dont les coordonnées seront:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

D'après la terminologie que nous avons adopté, le point P sera *quand on suppose* $\mu = 0$ le conséquent du point O.

Supposons de plus que dans le voisinage du point O, $\varphi(x, y)$ soit développable suivant les puissances de x et y, et dans le voisinage du point P suivant les puissances de $x - a$ et $y - b$.

Soit maintenant x_0, y_0, z_0 un point A très voisin de O et appartenant à la surface S. Si l'on fait passer par ce point A une trajectoire, si on suppose que μ cesse d'être nul, mais reste très petit, on verra que cette trajectoire viendra, à une époque t très peu différente de τ couper la surface S en un point B très voisin de P.

Ce point B dont j'appellerai les coordonnées x_1, y_1, z_1 sera d'après notre terminologie le conséquent du point A.

Ce que je me propose de démontrer, c'est que x_1, y_1, z_1 peuvent se développer suivant les puissances croissantes de x_0, y_0, z_0 et μ.

H III Chapitre 1er §2

En effet, d'après le théorème ~~que nous venons d'établir~~, si x, y, z sont les coordonnées au temps t du point mobile qui décrit la trajectoire issue du point A, si de plus x_0, y_0, z_0, μ et $t - \tau$ sont suffisamment petits, on aura:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x &= \psi_1(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ y &= \psi_2(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \\ z &= \psi_3(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

ψ_1, ψ_2 et ψ_3 étant des séries ordonnées suivant les puissances de $t - \tau$, μ, x_0, y_0, z_0.

Ces séries se réduiront respectivement à a, b, c pour

$$t - \tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Comme $\varphi(x, y)$ est développable suivant les puissances de $x - a$ et $y - b$, si $x - a$ et $y - b$ sont assez petits, nous aurons également:

$$\varphi(x, y) = \psi_4(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0),$$

ψ_4 étant une série de même forme que ψ_1, ψ_2 et ψ_3.

Écrivons que le point x, y, z se trouve sur la surface S, nous aurons:

$$(5)\qquad \psi_3 = \psi_4.$$

§2. ~~Note 1.~~

Le même résultat peut encore être établi d'une ~~façon~~ autre manière. Reprenons les équations :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, \mu),$$
$$\frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z, \mu),$$
$$\frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z, \mu).$$

Les fonctions f, f_1, f_2 pourront en général être développées suivant les puissances croissantes de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, $\mu = \mu_0$, pour les valeurs de x, y, z et μ suffisamment voisines de x_0, y_0, z_0 et μ_0. S'il existe un système de valeurs de x_0, y_0, z_0, μ_0 pour lequel cela n'ait pas lieu, je dirai que ce système de valeurs est un des points singuliers de notre équation différentielle.

Cela posé, ces équations admettront une solution telle que ~~que~~ x, y et z s'annulent avec t ; et cette solution dépendra manifestement de μ. Soit :

$$x = \omega_1(t, \mu), \quad y = \omega_2(t, \mu), \quad z = \omega_3(t, \mu)$$

cette solution. Il résulte de la définition même de cette solution que l'on a, quel que soit μ :

$$\omega_1(0, \mu) = \omega_2(0, \mu) = \omega_3(0, \mu) = 0.$$

Dans la plupart des applications, on pourra effectuer l'intégration pour $\mu = 0$, de telle sorte que les fonctions $\omega_1(t, 0)$, $\omega_2(t, 0)$, $\omega_3(t, 0)$ seront connues. Je suppose que, pour aucune des valeurs de t comprises entre 0 et t_1, le système de valeurs

$$\omega_1(t, 0), \quad \omega_2(t, 0), \quad \omega_3(t, 0), \quad 0$$

ne soit un point singulier de nos équations différentielles.

Pour employer un langage incorrect, mais commode, je dirai que ~~les~~ la solution particulière

$$x = \omega_1(t, 0), \quad y = \omega_2(t, 0), \quad z = \omega_3(t, 0)$$

ne passe par aucun point singulier.

Si cela n'avait pas lieu, nous nous trouverions dans le cas d'exception dont j'ai parlé plus haut.

Si au contraire cela a lieu, ce que je supposerai, je dis que ~~les~~ expressions $\omega_1(t_1, \mu)$, $\omega_2(t_1, \mu)$, $\omega_3(t_1, \mu)$ sont des fonctions de μ développables suivant les puissances croissantes de cette variable.

Posons en effet

$$x = \xi + \omega_1(t, 0), \quad y = \eta + \omega_2(t, 0), \quad z = \zeta + \omega_3(t, 0)$$

les équations différentielles deviendront:

$$\cancel{\frac{d\xi}{dt}} \quad \frac{d\xi}{dt} = \varphi(\xi, \eta, \zeta, t, \mu),$$

$$(4) \qquad \frac{d\eta}{dt} = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, t, \mu),$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, t, \mu).$$

Il résulte de l'hypothèse que nous avons faite que pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et t_1, les fonctions φ, φ_1 et φ_2 peuvent être développées suivant les puissances de ξ, η, ζ et μ, les coefficients du développement étant des fonctions du temps.

~~On pourra alors trouver deux nombres~~ J'observe de plus que pour $\mu = 0$, les équations différentielles doivent être satisfaites pour

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

ce qui veut dire que φ, φ_1 et φ_2 s'annulent quand μ, ξ, η, ζ s'annulent à la fois.

On pourra alors trouver deux nombres positifs M et α tels que, pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et t_1, chaque coefficient du développement de φ, φ_1 ou φ_2 suivant les puissances croissantes de ξ, η, ζ et μ soit plus petit en valeur absolue que le coefficient correspondant du développement de:

$$\frac{M (\xi + \eta + \zeta + \mu)}{1 - \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)}$$

on a fortiori que le coefficient correspondant du développement de:

$$\psi(\xi, \eta, \zeta, \mu) = \frac{M(\xi + \eta + \zeta + \mu)\left[1 + \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)\right]}{1 - \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)}.$$

Comparons donc les équations (4) aux suivantes:

$$(5) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = \psi(\xi, \eta, \zeta, \mu).$$

La solution des ~~intégrales~~ équations (4) ~~pour s'annuler pour~~, qui est telle que ξ, η et ζ s'annulent à la fois pour $t = 0$, s'écrit

$$\xi = \omega_1(t, \mu) - \omega_1(t, 0), \quad \eta = \omega_2(t, \mu) - \omega_2(t, 0), \quad \zeta = \omega_3(t, \mu) - \omega_3(t, 0).$$

D'un autre côté les équations (5) admettent une solution:

$$\xi = \eta = \zeta = \omega'(t, \mu)$$

telle que ξ, η, ζ s'annulent avec t.
En raisonnant comme l'a fait Cauchy, on verrait que si $\omega'(t, \mu)$ est développable suivant les puissances croissantes de μ, il doit en être de même de $\omega_1(t,\mu) - \omega_1(t,0)$, $\omega_2(t,\mu) - \omega_2(t,0)$, $\omega_3(t,\mu) - \omega_3(t,0)$, et que chaque coefficient des développement de ces trois dernières fonctions est plus petit en valeur absolue que le coefficient correspondant de $\omega'(t,\mu)$, au moins pour toutes les valeurs de t telles que

$$0 < t < t_1.$$

~~Si cela est~~ Or les équations (5) ~~alors~~ sont faciles à intégrer et on vérifie aisément que $\omega'(t, \mu)$ peut se développer suivant les puissances de μ.
Donc ξ, η et ζ sont également développables suivant les puissances de μ pourvu que

$$0 < t < t_1.$$

C. Q. F. D.

~~Cela posé supposons que l'on appelle~~ : Théorème III. Cela posé, soit :

$$x = \omega_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad y = \omega_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z = \omega_3(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

celle des solutions de nos équations différentielles, qui est telle que ~~qui est définie~~:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

pour $t = 0$.
Considérons les fonctions :

$$\omega_1(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad \omega_2(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$\omega_3(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0).$$

Je dis qu'elles sont développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 et τ pourvu que ces quantités soient suffisamment petites.
Posons en effet

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0,$$
$$t = t' \frac{t_1 + \tau}{t_1}.$$

Nos équations deviendront :

$$\frac{dx'}{dt'} = \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0, \mu),$$
$$\frac{dy'}{dt'} = \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f_1(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0, \mu),$$
$$\frac{dz'}{dt'} = \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f_2(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0), \mu).$$

Ces équations ~~donnent~~ ~~dront~~ contiennent cinq paramètres arbitraires à savoir

$$\mu, x_0, y_0, z_0, \tau.$$

~~Si donc je~~ Considérons donc la solution de ces équations qui est telle que x', y', z' s'annulent avec t'; soit:

$$x' = \omega_1'(t', \mu, x_0, y_0, z_0, \tau),$$
$$y' = \omega_2'(t', \mu, x_0, y_0, z_0, \tau),$$
$$z' = \omega_3'(t', \mu, x_0, y_0, z_0, \tau).$$

Il résulte de ce que nous venons de voir que si l'on fait $t' = t_1$ les expressions:

$$\omega_1'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau),$$
$$\omega_2'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau),$$
$$\omega_3'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau)$$

sont développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 et τ. Mais il est manifeste que l'on a:

$$(6)\quad \begin{aligned} \omega_1'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau) &= \omega_1(t_1+\tau, \mu, x_0, y_0, z_0),\\ \omega_2'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau) &= \omega_2(t_1+\tau, \mu, x_0, y_0, z_0),\\ \omega_3'(t_1, \mu, x_0, y_0, z_0, \tau) &= \omega_3(t_1+\tau, \mu, x_0, y_0, z_0).\end{aligned}$$

Donc les seconds membres des équations (6) sont également développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 et τ.

C. Q. F. D.

Théorème IV. Cauchy a tiré du calcul des limites un autre théorème d'une extrême importance.

24

§2.

~~usage dans le lemme qui précède le théorème III (§ 4, 1ère partie, chapitre II).~~

Nous avons encore fait usage du même théorème, pour démontrer l'existence des solutions périodiques dans le § 1 (1ère partie, chapitre III). A la fin de ce paragraphe, par exemple, nous considérons le cas où les équations différentielles ne contiennent pas explicitement le temps t.

Pour $\mu = 0$, nous avons supposé qu'il existe une solution périodique de période T:

$$x_1 = \varphi_1(t), \qquad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t).$$

Nous avons appelé ensuite (en supposant que μ reste très petit, mais cesse d'être nul) $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur initiale de x_i pour $t = 0$ et $\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i$ la valeur de x_i pour $t = T + \tau$.

D'après le théorème que nous venons de démontrer, ψ_i est une fonction développable suivant les puissances croissantes de μ, de τ et des β_i, si ces quantités sont assez petites et il est évident d'ailleurs que cette fonction s'annule pour

$$\mu = \tau = \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0.$$

C'est sur ce résultat que nous nous sommes appuyés dans le paragraphe que je viens de citer.

Mais dans ce même paragraphe, nous avons encore appliqué un autre ~~théorème de Cauchy.~~

Voici quel est ce théorème:

Si on a $n + p$ quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p$ entre lesquelles ont lieu n relations:

$$(7) \quad \begin{aligned} &f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \\ &f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n, x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0; \end{aligned}$$

si les f sont développables suivant les puissances des x et des y et s'annulent avec ces $n + p$ variables;

si enfin le déterminant fonctionnel des f par rapport aux y n'est pas nul quand les x et les y s'annulent à la fois;

25

25

on pourra tirer des équations (7) les n inconnues y sous la forme de séries développées suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Considérons en effet x_1 comme la seule variable indépendante, $x_2, x_3, \ldots, x_p$ comme des paramètres arbitraires, nous pourrons remplacer les équations (7) par les n équations différentielles:

$$\frac{df_i}{dy_1}\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{df_i}{dy_2}\frac{dy_2}{dx_1} + \ldots + \frac{df_i}{dy_n}\frac{dy_n}{dx_1} + \frac{df_i}{dx_1} = 0. \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)} \tag{8}$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas dont nous venons de nous occuper.

En particulier si $f(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une fonction développable suivant les puissances de $y, x_1, x_2, \ldots, x_n$; si quand les x et y s'annulant à la fois on a:

$$f = 0, \qquad \frac{df}{dy} \gtrless 0;$$

si enfin y est défini par l'égalité

$$f = 0,$$

y sera développable suivant les puissances des x.

~~C'est ainsi que dans le paragraphe cité (§ 1, chapitre III, 1^re^ partie)~~ nous avons établi que l'on peut résoudre les n équations

$$\phi_1 = \phi_2 = \ldots = \phi_n = 0 \tag{9}$$

par rapport à n quelconques des $n+1$ inconnues:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \tau.$$

L'existence des solutions périodiques une fois démontrée, il reste à faire voir que ces solutions peuvent se développer suivant les puissances de μ et s'écrire:

$$x_i = \theta_{i.0}(t) + \mu\theta_{i.1}(t) + \mu^2\theta_{i.2}(t) + \ldots, \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

$\theta_{i.0}(t)$, $\theta_{i.1}(t)$, etc., étant des fonctions périodiques de t développables selon les sinus et cosinus des multiples de:

$$\frac{2\pi t}{T+\tau} = \lambda t.$$

§2

Note 2.

Il nous resterait à examiner ce qui se passe quand le déterminant fonctionnel des f par rapport aux y est nul. Cette question a fait l'objet de recherches nombreuses sur lesquelles je ne puis insister ici, mais au premier rang desquelles il convient de citer les travaux de M. Puiseux sur les racines des équations algébriques. J'ai eu moi-même l'occasion de m'occuper de recherches analogues dans la première partie de ma thèse inaugurale (Paris, Gauthier-Villars, 1879). Je me bornerai donc à énoncer les théorèmes suivants, en me bornant à renvoyer pour les démonstrations, soit aux traités classiques, soit à ma thèse.

Théorème V. Soit y une fonction de x définie par l'équation

$$(9) \quad f(y, x) = 0$$

où f est développable suivant les puissances de x et de y.
Je suppose que pour $x = y = 0$, f s'annule ainsi que:

$$\frac{df}{dy}, \frac{d^2f}{dy^2}, \ldots, \cancel{\frac{d^mf}{}} \frac{d^{m-1}f}{dy^{m-1}},$$

mais que $\frac{d^mf}{dy^m}$ ne s'annule pas.

~~Je dis que~~ ~~qu~~ Il existera m séries de la forme suivante:

$$(10) \quad y = a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 x^{\frac{3}{n}} + \ldots$$

(où n est entier positif et où $a_1, a_2, \ldots$ sont des coefficients constants) qui satisferont à l'équation ~~$f=0$~~ (9).

Corollaire I. Si la série (10) satisfait à l'équation (9) il en est de même de la série:

$$y = a_1 \alpha x^{\frac{1}{n}} + a_2 \alpha^2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 \alpha^3 x^{\frac{3}{n}} + \ldots$$

où α est une racine n^e de l'unité.

Corollaire II. ~~Si la sé~~ Le nombre des séries de la forme (10) développées suivant les puissances de $x^{\frac{1}{n}}$, (sans pouvoir être développées suivant les puissances de $x^{\frac{1}{p}}$, $p < n$) est divisible par n.

Corollaire III. Si $k_1 n_1$ est le nombre des séries (10) développables suivant les puissances de $x^{\frac{1}{n_1}}$, si $k_2 n_2$ est le nombre des séries (10) développables suivant les puissances de $x^{\frac{1}{n_2}}$, ——, si $k_p n_p$ est le nombre des séries (10) développable suivant les puissances de $x^{\frac{1}{n_p}}$ on aura:

$$k_1 n_1 + k_2 n_2 + \ldots + k_p n_p = m,$$

d'où l'on conclut que si m est impair, l'un au moins des nombres $n_1, n_2, \ldots n_p$ est aussi impair.

6 27

§2.

Théorème VI. Si l'on a ~~p fonct~~ les équations

$$(11)\quad \begin{cases} f_1(y_1, y_2, \text{——}, y_p, x) = 0, \\ f_2(y_1, y_2, \text{——}, y_p, x) = 0, \\ \text{————————} \\ f_p(y_1, y_2, \text{——}, y_p, x) = 0, \end{cases}$$

dont les premiers membres sont développables suivant les puissances des y et de x et s'annulent avec ces variables,

~~Si ces équations ne cessent pas d'être distinctes pour~~ quand on fait ~~$x = 0$,~~ on pourra toujours éliminer entre ces équations

$$y_2, y_3, \text{——}, y_p$$

et arriver à une équation unique:

$$f(y_1, x) = 0$$

de même forme que l'équation (9) du théorème précédent.

~~Si les équations (11) ne cessent pas d'être distinctes pour~~ quand on y fait ~~$x = 0$, ce théorème est une conséquence immédiate du Lemme IV démontré dans la 1ère partie de ma Thèse Inaugurale~~ (page 14)

Si au contraire ces équations (11) cessaient d'être distinctes quand on y fait $x = 0$, on pourrait toujours employer l'artifice suivant.

Posons:

$$x = \cancel{z + \lambda_p y_p}.\ z + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \quad + \lambda_p y_p.$$

On peut choisir les λ de façon que les équations ne cessent pas d'être distinctes pour $z = 0$. On pourra alors en éliminant $y_2, y_3, -, y_n$ entre ces équations arriver à une équation unique

$$(12)\quad \varphi(y_1, z) = 0$$

dont le premier membre est développable suivant les puissances de y_1 et de z et s'annule avec ces variables. ~~Je dis que la dérivée~~ On peut toujours supposer que les dérivées

$$\frac{d\varphi}{dy_1}, \frac{d^2\varphi}{dy_1^2}, \quad, \frac{d^m\varphi}{dy_1^m}, \text{——}$$

ne s'annulent pas toutes à la fois; sans quoi φ contiendrait en facteur une puissance de z et on pourrait toujours faire disparaître ce facteur.

~~On tire alors de l'équation (12) m~~

Soit donc $\frac{d^m\varphi}{dy_1^m}$ la première de ces dérivées qui ne s'annule pas.

On tire alors de l'équation (12), (en vertu du théorème précédent) m valeurs différentes de y_1, soient:

$$\cancel{y_1 = \psi_1(z),\ y_1 = \psi_2(z),\ \quad,\ y_n = \psi_n(z)}$$

§2.

~~ces m valeurs.~~

Les fonctions $\phi_1(z), \phi_2(z), \ldots, \phi_m(z)$ sont comme on vient de le voir développables suivant les puissances fractionnaires de z.

~~On aura alors~~ Soit ensuite $F_{k.i}$ le résultat de la substitution de $\phi_i(z)$ à la place de y_1 dans ~~$f_k($~~

$$f_k(y_1, y_2, \ldots, y_p, x)$$

Posons ensuite:

$$\Phi_k = F_{k.1} \times F_{k.2} \times \ldots \times F_{k.m}$$

Il est manifeste que Φ_k est développable suivant les puissances de z, de $y_2, \ldots y_p$ et de x, et par conséquent aussi suivant les puissances de x, de $y_2, y_3, \ldots, y_p$.

Nous avons donc p équations

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \ldots = \Phi_p = 0$$

~~qui se réduisent à p-1 dont les premiers membres peuvent~~

Il n'y aurait d'exception que si les équations (11) cessaient d'être distinctes.

Corollaire des Théorèmes V et VI. — Le théorème IV s'applique toutes les fois que le déterminant fonctionnel des f n'est pas nul, c'est à dire toutes les fois que quand les x s'annulent, les équations

$$(7) \quad f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$$

admettent

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$$

comme une solution simple.

Il résulte des Théorèmes V et VI et de leurs corollaires énoncés plus haut que le théorème IV est encore vrai si cette solution est multiple, pourvu que l'ordre de multiplicité soit impair.

29

~~K_i étant développable suivant les puissances de μ, on peut écrire~~

$$K_i(t_1\,,\mu) = \theta_{i.0} + \theta_{i.1}\mu + \theta_{i.2}\mu^2 + \dots,$$

~~$\theta_{i.0}\,,\theta_{i.1}\,,\theta_{i.2}$ etc. ne dépendant que de t_1. L'identité (10) montre alors que $\theta_{i.k}$ ne change pas quand on change t_1 en $t_1 + T$. Donc $\theta_{i.k}$ est une fonction périodique et peut se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de~~

$$\frac{2\pi t_1}{T} = \frac{2\pi t}{T+\tau} = \lambda t.$$

~~C. Q. F. D.~~

§3. Applications du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles.

Cauchy avait déjà appliqué le procédé du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles. Madame Kowalevski a considérablement simplifié la démonstration de Cauchy et a donné au théorème sa forme définitive.

Voici en quoi consiste le théorème de Madame Kowalevski (Journal de Crelle, tome 80).

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles définissant n inconnues $z_1\,,z_2\,,\dots,z_n$ en fonctions de p variables indépendantes.

Supposons que ce système s'écrive:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx_1} &= f_1\Big(x_1\,,x_2\,,\dots,x_p\,;\frac{dz_i}{dx_2}\,,\frac{dz_i}{dx_3}\,,\dots,\frac{dz_i}{dx_p}\Big),\\
\frac{dz_2}{dx_1} &= f_2\Big(x_1\,,x_2\,,\dots,x_p\,;\frac{dz_i}{dx_2}\,,\frac{dz_i}{dx_3}\,,\dots,\frac{dz_i}{dx_p}\Big),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{dz_n}{dx_1} &= f_n\Big(x_1\,,x_2\,,\dots,x_p\,;\frac{dz_i}{dx_2}\,,\frac{dz_i}{dx_3}\,,\dots,\frac{dz_i}{dx_p}\Big),
\end{aligned} \qquad (1)$$

$f_1\,,f_2\,,\dots,f_n$ étant développés suivant les puissances de

$$x_1\,,x_2\,,\dots,x_p \quad \text{et des} \quad \frac{dz_i}{dx_k} - \alpha_{ik}$$

(i prend les valeurs $1\,,2\,,\dots,n$; k les valeurs $2\,,3\,,\dots,p$; enfin les α_{ik} sont des constantes quelconques).

Soit maintenant

$$\psi_1(x_2\,,x_3\,,\dots,x_p)\,,\psi_2(x_2\,,x_3\,,\dots,x_p)\,,\quad\dots,\quad \psi_n(x_2\,,x_3\,,\dots,x_p)$$

30

n fonctions données *quelconques*, développées suivant les puissances croissantes de $x_2, x_3, \dots, x_p$ et telles que:

$$\frac{d\psi_i}{dx_k} = a_{ik}$$

pour

$$x_2 = x_3 = \dots = x_p = 0.$$

Il existera n fonctions

$$z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_p), \quad z_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_p), \quad \dots, \quad z_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

développables suivant les puissances de $x_1, x_2, \dots, x_p$, qui satisferont aux équations (11) *et qui se réduiront respectivement à $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ pour $x_1 = 0$.*

J'ai moi-même cherché à étendre les résultats obtenus par Madame Kowalevski (*Thèse inaugurale*, Paris, Gauthier-Villars, 1879) et j'ai étudié en détail les cas que la savante mathématicienne avait laissés de côté.

Je me suis attaché en particulier à l'équation:

12)

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z, \tag{12}$$

où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont développés suivant les puissances de $x_1, x_2, \dots, x_n$; je suppose de plus que dans le développement de $X_1, X_2, \dots, X_n$, il n'y ait pas de terme tout connu et que les termes du 1er degré se réduisent respectivement à $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n$, de telle sorte que

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i,$$

Y_i désignant une suite de termes du 2d degré au moins par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$.

J'ai démontré qu'à certaines conditions cette équation admet une intégrale holomorphe développable suivant les puissances de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Pour que cette intégrale existe, il suffit:

1° que le polygone convexe qui contient les n points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ne contienne pas l'origine,

2° que l'on n'ait aucune relation de la forme

$$m_2\lambda_2 + \dots + m_n\lambda_n = \lambda_1$$

où les m sont des entiers positifs dont la somme est plus grande que 1.[1]

Je vais chercher à généraliser le résultat obtenu dans ma thèse.

Au lieu de l'équation (2) envisageons l'équation suivante:

$$(3) \qquad \frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z.$$

Nous avons encore

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i,$$

Y_i désignant une fonction développée suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et ne comprenant que des termes du 2^d^ degré au moins par rapport à ces n variables. Mais Y_i ne dépend pas seulement des x, il dépend aussi de t, de sorte que les coëfficients du développement de Y_i suivant les puissances des x sont des fonctions de t. Nous supposerons que ce sont des fonctions périodiques de t de période 2π développées suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Je me propose de chercher dans quel cas l'équation (3) admettra une intégrale holomorphe développée suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et telle que les coëfficients du développement soient des fonctions périodiques de t.

Voyons d'abord quelle va être la forme de Y_i. Nous allons développer Y_i suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; considérons le terme en

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Le coëfficient de ce terme étant une fonction périodique de t pourra

---

[1] Dans ma thèse, je n'énonce pas cette restriction et je ne suppose pas que la somme des m soit plus grande que 1. Il semblerait donc que le théorème est en défaut quand on a par exemple $\lambda_2 = \lambda_1$. Il n'en est rien. Si l'on avait

$$m_2 \lambda_2 + \ldots + m_n \lambda_n = \lambda_1 \quad (m_2 + m_3 + \ldots + m_n > 1)$$

certains coëfficients du développement prendraient la forme $\frac{A}{0}$ et deviendraient infinis. C'est pour cette raison que nous avons dû supposer qu'une pareille relation n'a pas lieu. Si l'on avait au contraire $\lambda_2 = \lambda_1$ certains coëfficients prendraient la forme $\frac{0}{0}$.

32

se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de t, ou ce qui revient au même suivant les puissances positives et négatives de $e^{t\sqrt{-1}}$.

Nous pourrons donc écrire

$$Y_i = \sum C_{i,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n} e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Les C sont des coëfficients constants; β est un entier positif ou négatif; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des entiers positifs tels que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \geqq 2.$$

J'écrirai aussi quelquefois en supprimant les indices:

$$Y_i = \sum C e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Posons maintenant:

$$Y_i' = \sum |C| e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

et envisageons l'équation suivante:

$$(4) \qquad (\lambda_1' x_1 - Y_1') \frac{dz}{dx_1} + (\lambda_2' x_2 - Y_2') \frac{dz}{dx_2} + \ldots + (\lambda_n' x_n - Y_n') \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1' z.$$

Dans cette équation $\frac{dz}{dt}$ n'entre plus; nous pouvons donc regarder t comme un paramètre arbitraire et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme les seules variables indépendantes. Si donc les quantités $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_n'$ satisfont aux conditions que nous avons énoncées plus haut, l'équation (4) (qui est de même forme que l'équation (2)) admettra une intégrale holomorphe.

Nous supposerons

$$\lambda_1' = \lambda_2' = \ldots = \lambda_n'.$$

Nous supposerons de plus λ_1' réel est positif.

Cela posé soit

$$(5) \qquad z = \sum A_{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n} e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

une série satisfaisant formellement à l'équation (3). Comment pourra-t-on calculer les coëfficients A par récurrence.

En écrivant l'équation (3) sous la forme

$$\frac{dz}{dt} + \lambda_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \ldots + \lambda_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda_1 z = Y_1 \frac{dz}{dx_1} + Y_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + Y_n \frac{dz}{dx_n}$$

et en identifiant les deux membres on trouve:

$$A_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}[\beta\sqrt{-1} + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n - \lambda_1] = P[C, A],$$

$P[C, A]$ étant un polynôme entier à coëfficients positifs par rapport aux C et aux coëfficients A déjà calculés.

Soit maintenant

$$z = \sum A'_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} e^{\sqrt{-1}\beta t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{[illegible]6}$$

une série satisfaisant à l'équation ([illegible]4). Pour calculer les coëfficients A' nous écrirons l'équation ([illegible]4) sous la forme:

$$\lambda'_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \lambda'_2 x_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + \lambda'_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda'_1 z = Y'_1 \frac{dz}{dx_1} + Y'_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + Y'_n \frac{dz}{dx_n}.$$

En identifiant les deux membres, nous trouverons:

$$A'_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}[\lambda'_1\alpha_1 + \lambda'_2\alpha_2 + \ldots + \lambda'_n\alpha_n - \lambda'_1] = P[|C|, A'].$$

$P[|C|, A']$ ne diffère de $P[C, A]$ que parce que les C sont remplacés par leurs modules et les A par les A'.

Les λ' étant réels positifs ainsi que les coëfficients du polynôme P, les A' seront aussi réels et positifs.

Pour que l'on ait ensuite:

$$|A_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}| < A'_{\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n},$$

il suffit que l'on ait toujours:

$$\lambda'_1\alpha_1 + \lambda'_2\alpha_2 + \ldots + \lambda'_n\alpha_n - \lambda'_1 < |\beta\sqrt{-1} + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n - \lambda_1|$$

ou

$$\lambda'_1 < \left| \frac{\beta\sqrt{-1} + \lambda_1(\alpha_1 - 1) + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n}{(\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} \right|. \tag{[illegible]7}$$

Si l'on a choisi λ'_1 de façon à satisfaire à l'inégalité ([illegible]7), on aura donc

$$|A| < A'.$$

Or la série ([illegible]6) converge, donc il en sera de même de la série ([illegible]5). Ainsi donc pour que la série ([illegible]5) converge, il suffit qu'on puisse trouver une quantité positive λ_1' satisfaisant à l'inégalité (17) pour toutes les valeurs entières et positives des α, et pour toutes les valeurs entières positives et négatives de β.

Commencons par remarquer que le second membre de l'inégalité (17) est toujours plus grand que:

$$\left|\frac{\beta\sqrt{-1} + \lambda_1(\alpha_1 - 1) + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n}{|\beta| + (\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}\right|. \tag{18}$$

Il suffira donc que λ_1' soit plus petit que l'expression (18). Or cette expression (18) est le module d'une certaine quantité imaginaire représentée par un certain point G. Or il est aisé de voir que ce point G n'est autre chose que le centre de gravité des $n + 2$ masses suivantes:

1° n masses égales respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et situées respectivement aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;

2° une masse égale à $|\beta|$ et située soit au point $+\sqrt{-1}$ soit au point $-\sqrt{-1}$;

3° une masse égale à -1 située au point λ_1.

Toutes ces masses sont positives à l'exception de la dernière.

Il faut chercher la condition pour que la distance OG soit toujours supérieure à une certaine limite λ_1'.

Composons d'abord les $n + 1$ premières masses; nous obtiendrons une masse:

$$M = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + |\beta|$$

située en un certain point G' et comme ces $n + 1$ premières masses sont positives, le point G' sera située à l'intérieur de l'un ou de l'autre des deux polygones convexes qui enveloppent, le premier les $n + 1$ points

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{et} \quad +\sqrt{-1},$$

et le second les $n + 1$ points

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \quad \text{et} \quad -\sqrt{-1}.$$

Si aucun de ces polygones convexes ne contient l'origine, on pourra assigner à la distance OG' une limite inférieure μ et écrire:

$$OG' > \mu.$$

Il reste à composer la masse M située en G' et la masse -1 située

35

en λ_1. On obtiendra ainsi une masse $M - 1$ située en G. On aura évidemment:

$$OG > OG' - GG',$$

$$GG' = \frac{G'\lambda_1}{M-1} < \frac{OG'}{M-1} + \frac{O\lambda_1}{M-1},$$

d'où

$$OG > OG'\frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1} > \mu\frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1}.$$

Si donc:

$$M > \frac{3\mu + 2O\lambda_1}{\mu}$$

33 l'inégalité

$$OG > \frac{\mu}{2} \tag{19}$$

sera satisfaite.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de combinaisons des nombres entiers:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$$

pour lesquelles l'inégalité (19) pourrait ne pas être satisfaite.

Si pour aucune de ces combinaisons OG n'est nul, nous serons certains de pouvoir assigner à OG une limite inférieure λ_1.

Nous sommes donc conduits à la règle suivante:

Pour que l'équation (13) admette une intégrale développable suivant les puissances des x et périodique par rapport à t, il suffit:

1° *qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, le second aux points $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine,*

2° *qu'il n'y ait entre les quantités λ aucune relation de la forme*

$$\beta\sqrt{-1} + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \ldots + \alpha_n\lambda_n = \lambda_1,$$

les α étant entiers positifs et β entier positif ou négatif.

C'est là une généralisation du théorème démontré dans ma thèse. Or de ce théorème découlaient un certain nombre de conséquences. Voyons si on pourra en tirer de semblables du théorème généralisé.

Nous allons pour cela suivre absolument la même marche que dans la thèse citée.

Considérons l'équation:

$$\frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = 0, \tag{~~20~~ 10}$$

obtenue en supprimant le second membre de l'équation (~~2~~3).

Considérons en outre l'équation:

$$\frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z \tag{~~2~~3}$$

et l'équation:

$$\frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_2 z. \tag{~~21~~ 11}$$

Si les λ satisfont aux conditions que nous venons d'énoncer, l'équation (~~2~~3) admettra une intégrale

$$z = T_1$$

où T_1 est ordonné suivant les puissances des x et périodique par rapport à t.

De même l'équation (~~21~~ 11) admettra une intégrale

$$z = T_2$$

où T_2 est de même forme que T_1.

On en conclut que l'équation (~~20~~ 10) admet comme intégrale particulière:

$$T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}}.$$

Comme on peut dans le second membre de (~~2~~3) remplacer successivement $\lambda_1 z$, par $\lambda_2 z, \lambda_3 z, \ldots, \lambda_n z$ et qu'on obtient ainsi $n - 1$ équations

37

analogues à l'équation (11 ~~21~~), on peut conclure que l'équation (10 ~~20~~) admet $n - 1$ intégrales particulières

$$T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}},\ T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_3^{-\frac{1}{\lambda_3}},\ \ldots,\ T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_n^{-\frac{1}{\lambda_n}}$$

où $T_2, T_3, \ldots, T_n$ sont de même forme que T_1.

Pour avoir l'intégrale générale de (10 ~~20~~), il faudrait posséder encore une n^e intégrale particulière. Pour cela considérons l'équation:

$$\frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = z. \qquad (12\ \cancel{22})$$

Cette équation admettra comme intégrale particulière $z = e^t$.

Nous en conclurons que l'équation (10 ~~20~~) admet comme intégrales particulières

$$T_1 e^{-\lambda_1 t},\ T_2 e^{-\lambda_2 t}, \ldots,\ T_n e^{-\lambda_n t},$$

de sorte que l'intégrale générale de cette équation (10 ~~20~~) sera:

$$z = \text{fonction arbitraire de } (T_1 e^{-\lambda_1 t},\ T_2 e^{-\lambda_2 t}, \ldots,\ T_n e^{-\lambda_n t}).$$

En d'autres termes les équations différentielles:

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} \qquad (10'\ \cancel{20'})$$

admettront comme intégrale générale

$$T_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}, \qquad T_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad T_n = K_n e^{\lambda_n t},$$

$K_1, K_2, \ldots, K_n$ étant n constantes d'intégration.

Ce théorème peut être regardé comme la généralisation de celui que j'ai démontré à la page 70 de ma thèse.

Supposons maintenant que nous cherchions à déterminer les p premières variables x à savoir

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

en fonctions des $n - p$ autres à savoir

$$x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$$

38

et de t, à l'aide des l'équations suivantes:

13 ~~(23)~~

$$\frac{dx_1}{dt} + X_{p+1}\frac{dx_1}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\frac{dx_1}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_1}{dx_n} = X_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} + X_{p+1}\frac{dx_2}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\frac{dx_2}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_2}{dx_n} = X_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dx_p}{dt} + X_{p+1}\frac{dx_p}{dx_{p+1}} + X_{p+2}\frac{dx_p}{dx_{p+2}} + \ldots + X_n\frac{dx_p}{dx_n} = X_p.$$

Il est aisé de voir que l'intégrale générale des équations (~~23~~ 13) s'écrira:

14 ~~(24)~~

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_p = 0,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ représentant p fonctions arbitraires de

$$T_1 e^{-\lambda_1 t},\ T_2 e^{-\lambda_2 t},\ \ldots,\ T_n e^{-\lambda_n t}.$$

Prenons en particulier:

$$\varphi_1 = T_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad \varphi_2 = T_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad \varphi_p = T_p e^{-\lambda_p t}.$$

Les équations (~~24~~ 14) s'écriront:

14' ~~(24')~~

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_p = 0.$$

Des équations (~~24'~~ 14') on pourra tirer $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en fonctions de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et t et on verra que ce sont des fonctions holomorphes par rapport à $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et périodiques par rapport à t.

Donc les équations (~~23~~ 13) admettent une solution développable suivant les puissances croissantes de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Ce théorème est démontré quand les λ satisfont aux conditions énoncées plus haut; voyons comment on pourra l'étendre aux cas où ces conditions ne sont pas remplies. Je suivrai pour cela la même marche que dans la 4me partie de mes recherches sur les *courbes définies par les équations différentielles* (Journal de Liouville, 4me série, T. 2, pages 156—157).

Proposons-nous de calculer les coefficients de l'intégrale holomorphe

39

des équations (~~23~~ 13) (à supposer que cette intégrale existe) et à cet effet écrivons ces équations (~~23~~ 13) sous la forme suivante:

$$(\cancel{23'})\ 13' \quad \frac{dx_i}{dt} + \lambda_{p+1}x_{p+1}\frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda_{p+2}x_{p+2}\frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + \lambda_n x_n \frac{dx_i}{dx_n} - \lambda_i x_i$$

$$= Y_{p+1}\frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y_{p+2}\frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + Y_n\frac{dx_i}{dx_n} - Y_i. \qquad (i=1,2,\ldots,p)$$

Soit:

$$Y_i = \sum C_{i,\beta,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

une quelconque des fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, ainsi que nous l'avons supposé plus haut, et proposons-nous de calculer les p fonctions

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

sous la forme

$$(\cancel{25})\ 15 \qquad x_i = \sum A_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Pour calculer les coëfficients A par récurrence, substituons les séries (~~25~~ 15) dans les équations (~~23'~~ 13') et identifions les deux membres. Nous aurons pour calculer $A_{i,\beta,\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n}$ l'équation suivante:

$$A_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n}(\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i)$$

$$= P[C, (-C'), A],$$

$P[C, (-C'), A]$ étant un polynôme entier à coëfficients positifs par rapport aux coëfficients C de

$$Y_{p+1}, Y_{p+2}, \ldots, Y_n,$$

aux coëfficients C' de Y_i changés de signe et aux coëfficients A déjà calculés.

Pour qu'aucun des coëfficients A ne devienne infini nous devons donc d'abord supposer qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme:

$$(\cancel{26})\ 16 \qquad \beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i = 0$$

où les α sont entiers positifs et β entier positif ou négatif.

Cela posé soit λ' une quantité positive que nous déterminerons plus complètement dans la suite.

40

Soit ensuite:

$$Y'_i = \Sigma \,|\, C_{i.\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \,|\, e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

pour

$$i = p + 1\,, p + 2\,, \ldots, n$$

et

$$Y'_i = -\Sigma \,|\, C_{i.\beta.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \,|\, e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

pour $i = 1\,, 2\,, \ldots, p$.

Formons les équations

(13'') ~~(23'')}

$$\lambda' x_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda' x_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + \lambda' x_n \frac{dx_i}{dx_n} - \lambda' x_i$$

$$= Y'_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + Y'_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \ldots + Y'_n \frac{dx_i}{dx_n} - Y'_i. \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,p)}$$

Cherchons à satisfaire aux équations 13'' ~~(23'')~~ à l'aide de séries de la forme suivante

15' ~~(25')~~

$$x_i = \Sigma B_{i.\beta.\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Les coëfficients B nous seront donnés par les équations suivantes:

$$B_{i.\beta.\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\ldots\alpha_n}[\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \ldots + \alpha_n - 1)] = P[|C|\,, |C'|\,, B]$$

où $P[|C|\,, |C'|\,, B]$ diffère de $P[C\,, (-C')\,, A]$ en ce que les coëfficients C et $-C'$ y sont remplacés par leurs modules, et les coëfficients A par les B correspondants.

On en conclut que tous les B sont positifs et que chaque B est plus grand que le module du A correspondant.

Il suffit pour cela d'une seule condition, c'est que:

$$\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \ldots + \alpha_n - 1) < |\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i|.$$

Si cette condition est remplie chacun des termes de la série (15 ~~25~~) sera plus petit que le terme correspondant de la série (15' ~~25'~~) et comme cette dernière converge, la série (15 ~~25~~) convergera également.

Il suffit pour cela que l'on puisse trouver une quantité positive λ' assez petite pour que l'on ait toujours:

$$\lambda' < \left| \frac{\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \ldots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i}{\alpha_{p+1} + \ldots + \alpha_n - 1} \right|$$

c'est à dire, d'après ce que nous avons vu plus haut, qu'aucun des deux *polygones convexes* circonscrits, le premier aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, le second aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine.

Si donc aucun de ces deux polygones convexes ne contient l'origine, s'il n'y a entre les λ aucune relation de la forme (~~26~~), les équations (~~23~~ 13) admettront une intégrale particulière de la forme suivante:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n, t),\\
x_2 &= \varphi_2(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n, t),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_p &= \varphi_p(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n, t),
\end{aligned}$$

les φ étant développables suivant les puissances de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ et les sinus et cosinus des multiples de t.

Cela posé envisageons les équations:

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \qquad (~~20''~~ \; 10'')$$

Ces équations sont de même forme que les équations (20'); la seule différence, c'est que les λ n'ont pas des valeurs qui satisfont aux conditions suffisantes énoncées plus haut pour que l'équation (13) ait une intégrale holomorphe.

Nous allons nous proposer de trouver non pas la solution générale des équations (~~20''~~ 10''), mais une solution contenant $n - p$ constantes arbitraires.

Parmi les équations (~~20''~~ 10''), je considère en particulier les suivantes:

$$\frac{dx_{p+1}}{dt} = X_{p+1}, \quad \frac{dx_{p+2}}{dt} = X_{p+2}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n. \qquad (~~27~~ \; 17)$$

42

J'écris en outre les équations:

18 ~~(28)~~
$$x_i = \varphi_i(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t), \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,p)}$$

les φ_i étant les intégrales holomorphes des équations (23) definies plus haut.

Il est évident que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n fonctions de t qui satisfont aux équations (~~27~~ 17) et (~~28~~ 18), elles satisferont également aux équations (~~20''~~ 10'').

Dans les équations (~~27~~ 17) substituons à la place de $x_1, x_2, \dots, x_p$ leurs valeurs (~~28~~ 18), ces équations deviendront:

$$\frac{dx_{p+1}}{dt} = \lambda_{p+1}x_{p+1} + Z_{p+1}, \qquad \frac{dx_{p+2}}{dt} = \lambda_{p+2}x_{p+2} + Z_{p+2}, \quad \dots$$
$$\dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + Z_n,$$

$Z_{p+1}, Z_{p+2}, \dots, Z_n$ étant des séries développées suivant les puissances de $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$, dont tous les termes sont du 2ᵈ degré au moins et dont les coëfficients sont des fonctions périodiques de t.

Ces équations (~~29~~ 19) sont de la même forme que les équations (~~20'~~ 10'); leur intégrale générale sera donc de la forme suivante:

$$T'_{p+1} = K_{p+1}e^{\lambda_{p+1}t}, \qquad T'_{p+2} = K_{p+2}e^{\lambda_{p+2}t}, \quad \dots, \quad T'_n = K_n e^{\lambda_n t},$$

où $K_{p+1}, \dots, K_n$ sont des constantes d'intégration, où $T'_{p+1}, \dots, T'_n$ sont des séries développées suivant les puissances des x et les sinus et cosinus des multiples de t.

Les équations

20 ~~(30)~~
$$T_i = 0, \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,p)}$$
$$T_q = K_q e^{\lambda_q t}, \qquad {\scriptstyle (q=p+1,p+2,\dots,n)}$$

nous donnent donc une intégrale des équations (~~20''~~ 10'') dépendant des $n-p$ constantes arbitraires $K_{p+1}, K_{p+2}, \dots, K_n$.

Pour obtenir cette intégrale sous forme explicite, il faut résoudre ces équations (~~30~~ 20) par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$; on trouve ainsi:

$$x_1 = \phi_1(t, K_{p+1}, \dots, K_n),$$
$$x_2 = \phi_2(t, K_{p+1}, \dots, K_n),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_n = \phi_n(t, K_{p+1}, \dots, K_n),$$

43

les ϕ étant des séries développées suivant les puissances de

$$K_{p+1}e^{\lambda_{p+1}t},\ K_{p+2}e^{\lambda_{p+2}t},\ \dots,\ K_n e^{\lambda_n t}$$

et suivant les sinus et cosinus des multiples de t.

Ces séries sont convergentes, pourvu qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, et le second aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine et qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme ~~(26)~~ 16.

C'est donc là une nouvelle démonstration du théorème fondamental du § 5 (1ère partie, chapitre III).

Cette démonstration fait ressortir l'analogie de ce théorème avec ceux que j'ai énoncés dans ma thèse et en particulier avec celui-ci:

Dans le voisinage d'un point singulier, les solutions d'une équation différentielle sont développables suivant les puissances de $t, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \dots, t^{\lambda_n}$.

J'avais d'abord démontré ce théorème (que j'ai ensuite rattaché aux idées générales qui ont inspiré ma thèse) par une voie assez différente dans le 45e Cahier du Journal de l'Ecole ~~P~~ p olytechnique et M. Picard y avait été conduit indépendamment par d'autres considérations (Comptes ~~R~~ r endus 1878).

~~Note F.~~

~~*Sur les surfaces asymptotiques.*~~

~~J'ai donné dans les § 2, 3 et 4 (2me partie, chapitre I) la manière de trouver l'équation des surfaces asymptotiques et de démontrer que ces surfaces sont fermées.~~

~~On peut apporter quelques simplifications dans les calculs par lesquels on arrive à l'équation des surfaces asymptotiques. D'autre part, pour dé-~~

44

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum\sum \left(2\frac{dT}{dy_i}\frac{dy_i}{da} + y_i\frac{d^2T}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{da} - \frac{dx_i}{da}\frac{dU}{dx_i} - 2x_i\frac{d^2U}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{da}\right) da + 3(C_1 - C_0).$$

Mais en vertu du théorème des fonctions homogènes on a:

$$\sum_i y_i \frac{d^2T}{dy_i dy_k} = \frac{dT}{dy_k}, \qquad \sum_i x_i \frac{d^2U}{dx_i dx_k} = -2\frac{dU}{dx_k},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(3\frac{dT}{dy_i}\frac{dy_i}{da} + 3\frac{dU}{dx_i}\frac{dx_i}{da}\right) da + 3(C_1 - C_0)$$

ou

$$\frac{dJ}{dt} = 3\int (dT + dU) + 3(C_1 - C_0).$$

Or d'après la définition de C_1 et C_0 on a

$$C_0 - C_1 = \int dF = \int (dT + dU).$$

Il vient donc

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

C. Q. F. D.

~~Note D.~~

§4. Intégration des ~~sur~~ ~~Sur les~~ équations linéaires à coefficients périodiques.

On sait qu'une fonction de x périodique et de période 2π peut se développer en une série de la forme suivante

$$(1) \quad f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx + \ldots + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx + \ldots$$

J'ai montré dans le Bulletin astronomique (novembre 1886) que

45

.۳۰

si la fonction $f(x)$ est finie et continue ainsi que ses $p-2$ premières dérivées et si sa $p-1^e$ dérivée est finie, mais peut devenir discontinue en un nombre limité de points, on peut trouver un nombre positif K tel que l'on ait, quelque grand que soit n,

$$|n^p A_n| < K, \qquad |n^p B_n| < K.$$

Si $f(x)$ est une fonction analytique, elle sera finie et continue ainsi que toutes ses dérivées. On pourra donc trouver un nombre K tel que:

$$|n^2 A_n| < K, \qquad |n^2 B_n| < K.$$

Il résulte de là que la série

$$\begin{aligned} |A_0| + |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| + \ldots \\ + |B_1| + |B_2| + \ldots + |B_n| + \ldots \end{aligned}$$

converge et par conséquent que la série (1) est absolument et uniformément convergente.

Cela posé, considérons un système d'équations différentielles linéaires:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \varphi_{1.1}x_1 + \varphi_{1.2}x_2 + \ldots + \varphi_{1.n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \varphi_{2.1}x_1 + \varphi_{2.2}x_2 + \ldots + \varphi_{2.n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \varphi_{n.1}x_1 + \varphi_{n.2}x_2 + \ldots + \varphi_{n.n}x_n. \end{aligned}$$

Les n^2 coefficients $\varphi_{i.k}$ sont des fonctions de t périodiques et de période 2π.

Les équations (2) ne changent donc pas quand on change t en $t + 2\pi$. Cela posé soient:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \phi_{1.1}(t), & x_2 &= \phi_{1.2}(t)\,, & \ldots\,, \quad x_n &= \phi_{1.n}(t), \\ x_1 &= \phi_{2.1}(t), & x_2 &= \phi_{2.2}(t)\,, & \ldots\,, \quad x_n &= \phi_{2.n}(t), \\ &\ldots & &\ldots & &\ldots \\ x_1 &= \phi_{n.1}(t), & x_2 &= \phi_{n.2}(t)\,, & \ldots\,, \quad x_n &= \phi_{n.n}(t) \end{aligned}$$

n solutions, linéairement indépendantes, des équations (2).

Les équations ne changent pas quand on change t en $t + 2\pi$ et les n solutions deviendront:

$$x_1 = \phi_{1.1}(t + 2\pi), \quad \ldots, \quad x_n = \phi_{1.n}(t + 2\pi),$$

$$x_1 = \phi_{2.1}(t + 2\pi), \quad \ldots, \quad x_n = \phi_{2.n}(t + 2\pi),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1 = \phi_{n.1}(t + 2\pi), \quad \ldots, \quad x_n = \phi_{n.n}(t + 2\pi).$$

Elles devront donc être des combinaisons linéaires des n solutions (3) de sorte qu'on aura:

$$\begin{aligned}
&\phi_{1.1}(t + 2\pi) = A_{1.1}\phi_{1.1}(t) + A_{1.2}\phi_{2.1}(t) + \ldots + A_{1.n}\phi_{n.1}(t), \\
&\phi_{2.1}(t + 2\pi) = A_{2.1}\phi_{1.1}(t) + A_{2.2}\phi_{2.1}(t) + \ldots + A_{2.n}\phi_{n.1}(t), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\phi_{n.1}(t + 2\pi) = A_{n.1}\phi_{1.1}(t) + A_{n.2}\phi_{2.1}(t) + \ldots + A_{n.n}\phi_{n.1}(t),
\end{aligned} \tag{4}$$

les A étant des coëfficients constants.

On aura d'ailleurs de même (avec les mêmes coëfficients)

$$\phi_{1.2}(t + 2\pi) = A_{1.1}\phi_{1.2}(t) + A_{1.2}\phi_{2.2}(t) + \ldots + A_{1.n}\phi_{n.2}(t)$$

etc.

Cela posé formons l'équation en S:

$$\begin{vmatrix}
A_{1.1} - S & A_{1.2} & \ldots & A_{1.n} \\
A_{2.1} & A_{2.2} - S & \ldots & A_{2.n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
A_{n.1} & A_{n.2} & \ldots & A_{n.n} - S
\end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Soit S_1 l'une des racines de cette équation. D'après la théorie des substitutions linéaires, il existera toujours n coëfficients constants

$$B_1, B_2, \ldots, B_n$$

tels que si l'on pose:

$$\theta_{1.1}(t) = B_1\phi_{1.1}(t) + B_2\phi_{2.1}(t) + \ldots + B_n\phi_{n.1}(t)$$

47

et de même:

$$\theta_{1.i}(t) = B_1\psi_{1.i}(t) + B_2\psi_{2.i}(t) + \ldots + B_n\psi_{n.i}(t)$$

on ait:

$$\theta_{1.1}(t + 2\pi) = S_1\theta_{1.1}(t)$$

et de même:

$$\theta_{1.i}(t + 2\pi) = S_1\theta_{1.i}(t).$$

Posons:

$$S_1 = e^{2\alpha_1\pi},$$

il viendra:

$$e^{-\alpha_1(t+2\pi)}\theta_{1.1}(t + 2\pi) = S_1 e^{-2\alpha_1\pi} e^{-\alpha_1 t}\theta_{1.1}(t) = e^{-\alpha_1 t}\theta_{1.1}(t).$$

Cette équation exprime que:

$$e^{-\alpha_1 t}\theta_{1.1}(t)$$

est une fonction périodique que nous pourrons développer en une série trigonométrique:

$$\lambda_{1.1}(t).$$

Si les fonctions périodiques $\varphi_{i.k}(t)$ sont analytiques, il en sera de même des solutions des équations différentielles (2) et de $\lambda_{1.1}(t)$. La série $\lambda_{1.1}(t)$ sera donc absolument et uniformément convergente.

De même

$$e^{-\alpha_1 t}\theta_{1.i}(t)$$

sera une fonction périodique qu'on pourra représenter par une série trigonométrique:

$$\lambda_{1.i}(t).$$

Nous avons donc une solution particulière des équations (2) qui s'écrit:

$$(6) \qquad x_1 = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.1}(t), \qquad x_2 = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.2}(t)\ , \quad \ldots\ , \quad x_n = e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.n}(t).$$

A chaque racine de l'équation (5) correspond une solution de la forme (6).

Si l'équation (5) a toutes ses racines distinctes, nous aurons n solutions de cette forme linéairement indépendantes et la solution générale s'écrira:

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
x_1 &= C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.1}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2.1}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n.1}(t),\\
x_2 &= C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.2}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2.2}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n.2}(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_n &= C_1 e^{\alpha_1 t}\lambda_{1.n}(t) + C_2 e^{\alpha_2 t}\lambda_{2.n}(t) + \dots + C_n e^{\alpha_n t}\lambda_{n.n}(t).
\end{aligned}
$$

Les C sont des constantes d'intégration, les α sont des constantes et les λ sont des séries trigonométriques absolument et uniformément convergentes.

Voyons maintenant ce qui arrive quand l'équation (5) a une racine double, par exemple quand $\alpha_1 = \alpha_2$. Reprenons la formule (7), faisons-y

$$C_3 = C_4 = \dots = C_n = 0$$

et faisons-y tendre α_2 vers α_1. Il vient:

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}[C_1\lambda_{1.1}(t) + C_2 e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\lambda_{2.1}(t)]$$

ou en posant

$$C_1 = C_1' - C_2,$$

$$C_2 = \frac{C_2'}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

il viendra:

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\left[C_1'\lambda_{1.1}(t) + C_2'\frac{e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\lambda_{2.1}(t) - \lambda_{1.1}(t)}{\alpha_2 - \alpha_1}\right].$$

Il est clair que la différence

$$\lambda_{2.1}(t) - \lambda_{1.1}(t)$$

s'annulera pour $\alpha_2 = \alpha_1$. Nous pourrons donc poser:

$$\lambda_{2.1}(t) = \lambda_{1.1}(t) + (\alpha_2 - \alpha_1)\lambda'(t).$$

Il vient ainsi:

$$x_1 = e^{\alpha_1 t}\left[C_1'\lambda_{1.1} + C_2'\lambda_{1.1}\frac{e^{(\alpha_2-\alpha_1)t} - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} + C_2'\lambda'(t)e^{(\alpha_2-\alpha_1)t}\right]$$

49

et à la limite (pour $\alpha_2 = \alpha_1$);

$$x_1 = C_1' e^{\alpha_1 t} \lambda_{1.1} + C_2' e^{\alpha_1 t}[t\lambda_{1.1} + \lim \lambda'(t)].$$

On verrait que la limite de $\lambda'(t)$ pour $\alpha_2 = \alpha_1$ est encore une série trigonométrique absolument et uniformément convergente.

Ainsi l'effet de la présence d'une racine double dans l'équation (5) a été d'introduire dans la solution des termes de la forme suivante:

$$e^{\alpha_1 t} t \lambda(t),$$

$\lambda(t)$ étant une série trigonométrique.

On verrait sans peine qu'une racine triple introduirait des termes de la forme:

$$e^{\alpha_1 t} t^2 \lambda(t)$$

et ainsi de suite.

Je n'insiste pas sur tous ces points de détail. Ces résultats sont bien connus par les travaux de MM. Floquet, Callandreau, Bruns, Stieltjes et si j'ai donné ici la démonstration in extenso pour le cas général, c'est que son extrême simplicité me permettait de la faire en quelques mots.

CHAPITRE II.

Théorie des invariants intégraux.

§ ~~1~~ 5. *Propriétés diverses des équations de la dynamique.*

Soit F une fonction d'une double série de variables:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

et du temps t.

Supposons que l'on ait les équations différentielles:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

Si f_1 et f_2 peuvent être développés suivant les puissances croissantes de x, y et z, ces équations admettront une solution de la forme suivante:

$$y = \varphi_1(x), \qquad z = \varphi_2(x),$$

φ_1 et φ_2 étant des séries développées suivant les puissances croissantes de x et s'annulant avec x.

Pour le démontrer, Cauchy remplace les deux fonctions f_1 et f_2 par une expression de la forme:

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{(1 - \alpha x)(1 - \beta y)(1 - \gamma z)},$$

en choisissant M, α, β, γ de façon que chaque terme de f' ait un plus grand coëfficient (en valeur absolue) que le terme correspondant de f_1 et de f_2. En remplaçant ainsi f_1 et f_2 par f', on augmente les coëfficients de φ_1 et de φ_2 et comme ces deux séries sont convergentes après ce changement, elles devaient l'être également avant ce changement.

Tel est le principe fondamental du calcul des limites dont Cauchy a fait d'ailleurs beaucoup d'autres applications et que plusieurs géomètres ont notablement perfectionné depuis.

Le plus grand de ces perfectionnements est dû à M. Weierstrass qui a remplacé la fonction $f'(x, y, z)$ de Cauchy par une autre plus simple qui peut jouer le même rôle.

Ecrivons les équations (1) sous la forme:

$$(1') \qquad \frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z), \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y, z) = 1.$$

Remplaçons-y ensuite f, f_1 et f_2 par la fonction de M. Weierstrass

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{1 - \alpha(x + y + z)};$$

elles deviendront:

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{1 - \alpha(x + y + z)}.$$

Considérons deux solutions infiniment voisines de ces équations:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots y_n,$$

$$x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, \ldots, x_n + \xi_n, y_1 + \eta_1, y_2 + \eta_2, \ldots, y_n + \eta_n,$$

les ξ et les η étant assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés.

Les ξ et les η satisferont alors aux équations différentielles linéaires

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k, \end{aligned}$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Soit ξ'_i, η'_i une autre solution de ces équations linéaires de sorte que:

$$(2') \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi'_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi'_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta'_k, \\ \frac{d\eta'_i}{dt} &= -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi'_k - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta'_k. \end{aligned}$$

Multiplions les équations (2) et (2') respectivement par $\eta'_i, -\xi'_i, -\eta_i, \xi_i$ et faisons la somme de toutes ces équations, il viendra:

$$\sum_i \left(\eta'_i \frac{d\xi_i}{dt} - \xi'_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi'_i}{dt} + \xi_i \frac{d\eta'_i}{dt}\right) =$$

$$\sum_i \sum_k \left(\xi_k \eta'_i \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_k \eta'_i \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \xi_k \xi'_i \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \eta_k \xi'_i \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\right)$$

$$-\sum_i \sum_k \left(\eta_i \xi'_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k} + \eta_i \eta'_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k} + \xi_i \xi'_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k} + \xi_i \eta'_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\right)$$

ou

$$\sum \frac{d}{dt}[\eta'_i \xi_i - \xi'_i \eta_i] = 0$$

ou enfin

$$(3) \qquad \eta'_1 \xi_1 - \xi'_1 \eta_1 + \eta'_2 \xi_2 - \xi'_2 \eta_2 + \ldots + \eta'_n \xi_n - \xi'_n \eta_n = \text{constante.}$$

Voilà une relation qui lie entre elles deux solutions quelconques des équations linéaires (2).

57

Il est aisé de trouver d'autres relations analogues.

Considérons quatre solutions des équations (2)

$$\xi_i\,,\ \xi'_i\,,\ \xi''_i\,,\ \xi'''_i\,,$$
$$\eta_i\,,\ \eta'_i\,,\ \eta''_i\,,\ \eta'''_i\,.$$

Considérons ensuite la somme des déterminants:

$$\sum_i\sum_k \begin{vmatrix} \xi_i & \xi'_i & \xi''_i & \xi'''_i \\ \eta_i & \eta'_i & \eta''_i & \eta'''_i \\ \xi_k & \xi'_k & \xi''_k & \xi'''_k \\ \eta_k & \eta'_k & \eta''_k & \eta'''_k \end{vmatrix},$$

où les indices i et k varient depuis 1 jusqu'à n. On vérifierait sans peine que cette somme est encore une constante.

Plus généralement si l'on forme à l'aide de $2p$ solutions des équations (2) la somme de déterminants:

$$\sum_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \left| \xi_{\alpha_1}\eta_{\alpha_1}\xi_{\alpha_2}\eta_{\alpha_2}\ldots\xi_{\alpha_p}\eta_{\alpha_p} \right|,$$
$$(\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \ldots\,,\ \alpha_p = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ n)$$

cette somme sera une constante.

En particulier, le déterminant formé par les valeurs des $2n$ quantités ξ et η dans $2n$ solutions des équations (2) sera une constante.

Ces considérations permettent de trouver une solution des équations (2) quand on en connaît une intégrale et réciproquement.

Supposons en effet que

$$\xi_i = \alpha_i, \qquad \eta_i = \beta_i$$

soit une solution particulière des équations (2) et désignons par ξ_i et η_i une solution quelconque de ces mêmes équations. On devra avoir:

$$\Sigma\xi_i\beta_i - \eta_i\alpha_i = \text{const.}$$

ce qui sera une intégrale des équations (2).

Réciproquement soit

$$\Sigma A_i\xi_i + \Sigma B_i\eta_i = \text{const.}$$

52

une intégrale des équations (2), on devra avoir:

$$\sum_i \frac{dA_i}{dt}\xi_i + \sum_i \frac{dB_i}{dt}\eta_i + \sum_i A_i\Big[\sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k\Big]$$
$$-\sum_i B_i\Big[\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k\Big] = 0,$$

d'où en identifiant

$$\frac{dA_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F}{dy_k dx_i}A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_k dx_i}B_k,$$
$$\frac{dB_i}{dt} = -\sum_k \frac{d^2F}{dy_k dy_i}A_k + \sum_k \frac{d^2F}{dx_k dy_i}B_k,$$

ce qui montre que:

$$\xi_i = B_i, \qquad \eta_i = -A_i$$

est une solution particulière des équations (2).

Si maintenant:

$$\Phi(x_i, y_i, t) = \text{const.}$$

est une intégrale des équations (1),

$$\sum \frac{d\Phi}{dx_i}\xi_i + \sum \frac{d\Phi}{dy_i}\eta_i = \text{const.}$$

pag. 49

sera une intégrale des équations (2), et par conséquent:

$$\xi_i = \frac{d\Phi}{dy_i}, \qquad \eta_i = -\frac{d\Phi}{dx_i}$$

sera une solution particulière de ces équations.

Si $\Phi = \text{const.}$, $\Phi_1 = \text{const.}$ sont deux intégrales des équations (1), on aura

$$\sum \left(\frac{d\Phi}{dx_i}\frac{d\Phi_1}{dy_i} - \frac{d\Phi}{dy_i}\frac{d\Phi_1}{dx_i}\right) = \text{const.}$$

C'est le théorème de Poisson.

Considérons le cas particulier où les x désignent les coordonnées rectangulaires de n points dans l'espace; nous les désignerons par la notation à double indice:

$$x_{1i}, x_{2i}, x_{3i},$$

53

le premier indice se rapportant aux trois axes rectangulaires de coordonnées et le second indice aux n points matériels. Soit m_i la masse du i^e point matériel. On aura alors:

$$m_i \frac{d^2 x_{ki}}{dt^2} = \frac{dV}{dx_{ki}},$$

V étant la fonction des forces.

On aura alors pour l'équation des forces vives:

$$F = \sum \frac{m_i}{2} \left(\frac{dx_{ki}}{dt} \right)^2 - V = \text{const.}$$

Posons ensuite:

$$y_{ki} = m_i \frac{dx_{ki}}{dt},$$

d'où

$$\overset{4}{(\cancel{1})} \qquad F = \sum \frac{y_{ki}^2}{2m_i} - V = \text{const.}$$

et

$$(1') \qquad \frac{dx_{ki}}{dt} = \frac{dF}{dy_{ki}}, \qquad \frac{dy_{ki}}{dt} = -\frac{dF}{dx_{ki}}.$$

Soit:

$$\overset{5}{(\cancel{2})} \qquad x_{ki} = \varphi_{ki}(t), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t)$$

une solution de ces équations $(1')$, une autre solution sera:

$$x_{ki} = \varphi_{ki}(t + h), \qquad y_{ki} = m_i \varphi'_{ki}(t + h),$$

h étant une constante quelconque.

En regardant h comme infiniment petit, on obtiendra une solution des équations $(2')$ qui correspondent à $(1')$ comme les équations (2) correspondent à (1):

$$\xi_{ki} = h\varphi'_{ki}(t) = h\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = hm_i \varphi''_{ki}(t) = h\frac{dV}{dx_{ki}},$$

h désignant un facteur constant très petit que l'on peut supprimer quand on ne considère que les équations linéaires $(2')$.

54

Connaissant une solution:

$$\xi = \frac{y}{m}, \qquad \eta = \frac{dV}{dx}$$

de ces équations, on peut déduire une intégrale:

$$\sum \frac{y\eta}{m} - \sum \frac{dV}{dx}\xi = \text{const.}$$

Mais cette même intégrale s'obtient très aisément en différentiant l'équation des forces vives (4).

Si les points matériels sont soustraits à toute action extérieure, on peut déduire de la solution (5) une autre solution:

$$\begin{aligned} x_{1i} &= \varphi_{1i}(t) + h + kt, & y_{1i} &= m_i\varphi'_{1i}(t) + m_i k, \\ x_{2i} &= \varphi_{2i}(t), & y_{2i} &= m_i\varphi'_{2i}(t), \\ x_{3i} &= \varphi_{3i}(t), & y_{3i} &= m_i\varphi'_{3i}(t), \end{aligned}$$

h et k étant des constantes quelconques. En regardant ces constantes comme infiniment petites, on obtient deux solutions des équations (2')

$$\xi_{1i} = 1, \qquad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{1i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0,$$

$$\xi_{1i} = t, \qquad \xi_{2i} = \xi_{3i} = \eta_{2i} = \eta_{3i} = 0, \qquad \eta_{1i} = m_i.$$

On obtient ainsi deux intégrales de (2')

$$\Sigma_i \eta_{1i} = \text{const.},$$

$$\Sigma \eta_{1i} t - \Sigma m_i \xi_{1i} = \text{const.}$$

On peut obtenir ces intégrales en différentiant les équations du mouvement du centre de gravité:

$$\Sigma m_i x_{1i} = t\Sigma y_{1i} + \text{const.},$$

$$\Sigma y_{1i} = \text{const.}$$

55

Si l'on fait tourner la solution (~~4~~ 5) d'un angle ω autour de l'axe des z, on obtient une autre solution:

$$x_{1i} = \varphi_{1i}\cos\omega - \varphi_{2i}\sin\omega, \qquad \frac{y_{1i}}{m_i} = \varphi'_{1i}\cos\omega - \varphi'_{2i}\sin\omega,$$

$$x_{2i} = \varphi_{1i}\sin\omega + \varphi_{2i}\cos\omega, \qquad \frac{y_{2i}}{m_i} = \varphi'_{1i}\sin\omega + \varphi'_{2i}\cos\omega,$$

$$x_{3i} = \varphi_{3i}, \qquad \frac{y_{3i}}{m_i} = \varphi'_{3i}.$$

En regardant ω comme infiniment petit, on trouve comme solution de $(2')$

$$\xi_{1i} = -x_{2i}, \qquad \eta_{1i} = -y_{2i},$$
$$\xi_{2i} = x_{1i}, \qquad \eta_{2i} = y_{1i},$$
$$\xi_{3i} = 0, \qquad \eta_{3i} = 0,$$

d'où l'intégrale de $(2')$

$$\sum_i (x_{1i}\eta_{2i} - y_{1i}\xi_{2i} - x_{2i}\eta_{1i} + y_{2i}\xi_{1i}) = \text{const.}$$

que l'on pouvait obtenir aussi en différentiant l'intégrale des aires de $(1')$

$$\sum (x_{1i}y_{2i} - x_{2i}y_{1i}) = \text{const.}$$

Supposons maintenant que la fonction V soit homogène et de degré -1 par rapport aux x ce qui est le cas de la nature.

Les équations $(1')$ ne changeront pas quand on multipliera t par λ^3, les x par λ^2 et les y par λ^{-1}, λ étant une constante quelconque. De la solution (4) on déduira donc la solution suivante:

$$x_{ki} = \lambda^2\varphi_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right), \qquad y_{ki} = \lambda^{-1}m_i\varphi'_{ki}\left(\frac{t}{\lambda^3}\right).$$

Si l'on regarde λ comme très voisin de l'unité, on obtiendra comme solution des équations $(2')$

$$\xi_{ki} = 2\varphi_{ki} - 3t\varphi'_{ki}, \qquad \eta_{ki} = -m_i\varphi'_{ki} - 3m_i t\varphi''_{ki},$$

ou

(~~5~~ 6) $$\xi_{ki} = 2x_{ki} - 3t\frac{y_{ki}}{m_i}, \qquad \eta_{ki} = -y_{ki} - 3t\frac{dV}{dx_{ki}},$$

d'où l'intégrale suivante des équations (2'), laquelle, à la différence de celles que nous avons envisagées jusqu'ici, ne peut être obtenue en différentiant une intégrale connue des équations (1'):

$$\Sigma(2x_{ki}\eta_{ki} + y_{ki}\xi_{ki}) = 3t\left[\sum\left(\frac{y_{ki}\eta_{ki}}{m_i} - \frac{dV}{dx_{ki}}\xi_{ki}\right)\right] + \text{const.}$$

§ ~~7~~ 6. *Définition des invariants intégraux.*

Considérons un système d'équations différentielles:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i,$$

X_i étant une fonction donnée de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on a:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.},$$

cette relation s'appelle une intégrale des équations données. Le premier membre de cette relation peut s'appeler un invariant puisqu'il n'est pas altéré quand on augmente les x_i d'accroissements infiniment petits dx_i compatibles avec les équations différentielles.

Soit maintenant

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$$

une autre solution des mêmes équations différentielles, de telle façon que l'on ait:

$$\frac{dx'_i}{dt} = X'_i,$$

X'_i étant une fonction formée avec $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ comme X_i l'était avec $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il pourra se faire qu'on ait entre les $2n$ quantités x et x', une relation:

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = \text{const.}$$

Le premier membre F_1 pourra encore s'appeler un invariant de nos équations différentielles, mais au lieu de dépendre d'une seule solution de ces équations, il dépendra de deux solutions.

~~Voir Note C.~~

On peut supposer que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ représentent les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions et que les équations différentielles données définissent la loi du mouvement de ce point. Si l'on considère deux solutions de ces équations, on aura deux points mobiles différents, se mouvant d'après une même loi définie par nos équations différentielles. L'invariant F_1 sera alors une fonction des coordonnées de ces deux points, qui dans le mouvement de ces deux points conservera sa valeur initiale.

On pourrait évidemment de même, au lieu de deux points mobiles, en envisager trois ou même un plus grand nombre.

Supposons maintenant que l'on considère une infinité de points mobiles et que les positions initiales de ces points forment un certain arc de courbe C dans l'espace à n dimensions.

Quand on se donne la position initiale d'un point mobile et les équations différentielles qui définissent la loi de son mouvement, la position du point à un instant quelconque se trouve entièrement déterminé.

Si donc nous savons que nos points mobiles, en nombre infini, forment à l'origine des temps un arc C, nous connaîtrons leurs positions à un instant t quelconque et nous verrons que les points mobiles à l'instant t forment dans l'espace à n dimensions un nouvel arc de courbe C'. Nous sommes donc en présence d'un arc de courbe qui se déplace en se déformant, parce que ses différents points se meuvent conformément à la loi définie par les équations différentielles données.

Supposons maintenant que dans ce déplacement et cette déformation l'intégrale suivante:

$$\int (Y_1 dx_1 + Y_2 dx_2 + \ldots + Y_n dx_n) = \int \Sigma Y_i dx_i$$

(où les Y sont des fonctions données des x et qui est étendue à tout l'arc de courbe) ne change pas de valeur. Cette intégrale sera encore pour nos équations différentielles un invariant, dépendant non plus d'un, de deux ou de trois, mais d'une infinité de points mobiles. Pour indiquer quelle en est la forme, je l'appellerai un invariant intégral.

De même on pourrait imaginer qu'une intégrale de la forme:

$$\int \sqrt{\Sigma Y_{ik} dx_i dx_k},$$

58

étendue à tout l'arc de courbe, demeure invariable; ce serait encore un invariant intégral.

On peut imaginer également des invariants intégraux qui soient definis par des intégrales doubles ou multiples.

Imaginons qu'on considère un fluide en mouvement permanent et de telle sorte que les trois composantes X, Y, Z de la vitesse d'une molécule quelconque soient des fonctions données des trois coordonnées x, y, z de cette molécule. Alors on pourra dire que la loi du mouvement d'une quelconque des molécules du fluide est définie par les équations différentielles:

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dy}{dt} = Y, \qquad \frac{dz}{dt} = Z.$$

On sait que l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

exprime que le fluide est incompressible. Supposons donc que les fonctions X, Y, Z satisfassent à cette équation et considérons un ensemble de molécules occupant à l'origine des temps un certain volume. Les molécules se déplaceront, mais, en vertu de l'incompressibilité du fluide, le volume qu'elles occuperont demeurera invariable. En d'autres termes le volume, c'est à dire l'intégrale triple:

$$\iiint dx\,dy\,dz$$

sera un invariant intégral. Plus généralement si l'on envisage les équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

et que l'on ait la relation:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{dX_i}{dx_i} = 0,$$

l'intégrale d'ordre n

$$\int dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

que je continuerai à appeler le volume, sera un invariant intégral.

C'est ce qui arrivera en particulier pour les équations générales de la dynamique; car si l'on considère ces équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i},$$

il est aisé de voir que

$$\sum \frac{d\left(\frac{dF}{dy_i}\right)}{dx_i} + \sum \frac{d\left(-\frac{dF}{dx_i}\right)}{dy_i} = 0.$$

Mais en ce qui concerne ces équations générales de la dynamique, il y a outre le volume, un autre invariant intégral qui nous sera encore plus utile. Nous avons vu en effet que:

$$\sum (\xi_i \eta_i' - \xi_i' \eta_i) = \text{const.}$$

Cela traduit dans notre nouveau langage signifie que l'intégrale double

$$\iint \sum_i dx_i dy_i$$

est un invariant intégral ainsi que je le démontrerai plus loin.

Pour exprimer ce résultat d'une autre manière, prenons le cas du problème des n corps.

Nous représenterons la situation du système des n corps par la position de $3n$ points dans un plan. Le premier point aura pour abscisse l'x du premier corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des x de la quantité de mouvement de ce corps; le second point aura pour abscisse l'y de ce même corps et pour ordonnée la projection sur l'axe des y de sa quantité de mouvement et ainsi de suite.

Imaginons une double infinité de situations initiales du système. A chacune d'elles correspond une position de nos $3n$ points et si l'on considère l'ensemble de ces situations, on verra que ces $3n$ points remplissent $3n$ aires planes.

Si maintenant le système se déplace conformément à la loi de l'attraction, les $3n$ points qui représentent sa situation vont aussi se déplacer; les $3n$ aires planes que je viens de définir vont donc se déformer, mais *leur somme demeurera constante.*

Le théorème sur la conservation du volume n'est qu'une conséquence de celui qui précède.

60

Il ~~y~~ a dans le cas du problème des n corps, un autre invariant intégral sur lequel je veux attirer l'attention.

Considérons une simple infinité de positions initiales du système formant un arc de courbe dans l'espace à $6n$ dimensions. Soient C_0 et C_1 les valeurs de la constante des forces vives aux deux extrémités de cet arc. ~~L'expression~~ Je démontrerai plus loin que l'expression

$$\int \Sigma(2x_i dy_i + y_i dx_i) + 3(C_1 - C_0)t$$

(où l'intégrale est étendue à l'arc de courbe tout entier et où le temps n'entre plus si $C_1 = C_0$) est encore un invariant intégral; on peut d'ailleurs en déduire aisément les autres invariants intégraux dont il a été question plus haut.

Nous dirons qu'un invariant intégral est du 1er ordre, du 2d ordre, ... ou du n^e ordre selon qu'il sera une intégrale simple, double, ... ou d'ordre n.

Parmi les invariants intégraux nous distinguerons les *invariants positifs* que nous définirons comme il suit.

L'invariant intégral d'ordre n

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

sera un invariant positif dans un certain domaine, si M est une fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui reste positive, finie et uniforme dans ce domaine.

57 Il me reste à démontrer les divers résultats que je viens d'énoncer; cette démonstration peut se faire par un calcul très simple.

~~§ 3. Transformation des invariants intégraux.~~

~~Reprenons nos équations différentielles~~

$$(1) \qquad \cancel{\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n}$$

~~et supposons que l'on ait~~

$$(2) \qquad \cancel{\frac{d(MX_1)}{dx_1} + \frac{d(MX_2)}{dx_2} + \dots + \frac{d(MX_n)}{dx_n} = 0,}$$

de telle sorte que l'intégrale d'ordre n

$$J = \int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

soit un invariant intégral.

Changeons de variables en posant:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x_1 &= \phi_1(z_1, z_2, \dots, z_n), \\ x_2 &= \phi_2(z_1, z_2, \dots, z_n); \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \phi_n(z_1, z_2, \dots, z_n), \end{aligned}$$

et appelons Δ le déterminant fonctionnel des n fonctions ϕ par rapport aux n variables z.

Nous aurons après le changement de variables:

$$J = \int M \Delta dz_1 dz_2 \dots dz_n .$$

Si l'invariant J était positif avant le changement de variables, il restera positif après ce changement, pourvu que Δ soit toujours positif, fini et uniforme.

Comme en permutant deux des variables z, on change le signe de Δ, il nous suffira de supposer que Δ est toujours de même signe ou qu'il ne s'annule jamais. Il devra de plus être toujours fini et uniforme. Cela arrivera si le changement de variables (3) est doublement univoque, c'est à dire si dans le domaine considéré les x sont fonctions uniformes des z et les z fonctions uniformes des x.

Ainsi après un changement de variables doublement univoque, les invariants positifs restent positifs.

Voici un cas particulier intéressant:

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C.$$

Prenons pour variables nouvelles $z_n = C$ d'une part et d'autre part $n - 1$ autres variables $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ de telle sorte que ce changement de variables soit doublement univoque dans le domaine considéré.

67

On peut raisonner de la même manière sur a et e et par conséquent, on peut dire:

Le grand axe (et il en est de même de l'excentricité) *varie entre deux limites et la différence entre la limite supérieure et la limite inférieure est du même ordre de grandeur que* $\sqrt{\mu}$.

Note C.

Sur les invariants intégraux.

Soit:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n \tag{1}$$

un système d'équations différentielles où $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des fonctions de $x_1, x_2, \dots, x_n$ telles que:

$$\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \dots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0. \tag{2}$$

Soit une solution de ce système d'équations dépendant de n constantes arbitraires:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

Cette solution s'écrira

$$x_1 = \varphi_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$
$$x_2 = \varphi_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = \varphi_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Il s'agit de démontrer que l'intégrale

$$J = \int dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int \Delta d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n$$

62

où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{d\alpha_1} & \frac{dx_2}{d\alpha_1} & \dots & \frac{dx_n}{d\alpha_1} \\ \frac{dx_1}{d\alpha_2} & \frac{dx_2}{d\alpha_2} & \dots & \frac{dx_n}{d\alpha_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_1}{d\alpha_n} & \frac{dx_2}{d\alpha_n} & \dots & \frac{dx_n}{d\alpha_n} \end{vmatrix}$$

est une constante.

On a en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \frac{d\Delta}{dt} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n$$

et

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n,$$

Δ_k étant le déterminant Δ dans la k^e colonne duquel on a remplacé:

$$\frac{dx_k}{d\alpha_1}, \frac{dx_k}{d\alpha_2}, \dots, \frac{dx_k}{d\alpha_n}$$

par

$$\frac{d^2x_k}{d\alpha_1 dt}, \frac{d^2x_k}{d\alpha_2 dt}, \dots, \frac{d^2x_k}{d\alpha_n dt}.$$

Mais on a

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k,$$

d'où:

$$\frac{d^2x_k}{d\alpha_i dt} = \frac{dX_k}{dx_1}\frac{dx_1}{d\alpha_i} + \frac{dX_k}{dx_2}\frac{dx_2}{d\alpha_i} + \dots + \frac{dX_k}{dx_n}\frac{dx_n}{d\alpha_i}.$$

On déduit de là:

$$\Delta_k = \Delta \frac{dX_k}{dx_k},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int (\Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n$$

$$= \int \left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \dots + \frac{dX_n}{dx_n} \right) \Delta d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n = 0.$$

C. Q. F. D.

63

Supposons maintenant qu'au lieu de la relation (2) nous ayons:

$$\frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMX_n}{dx_n} = 0, \tag{2'}$$

M étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Je dis que

$$J = \int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int M \Delta d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n$$

est une constante.

On a en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \left(\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} \right) d\alpha_1 d\alpha_2 \ldots d\alpha_n.$$

Il faut montrer que:

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = 0.$$

On a en effet (en vertu des équations (1))

$$\frac{dM}{dt} = X_1 \frac{dM}{dx_1} + X_2 \frac{dM}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dM}{dx_n}$$

et (d'après ce que nous venons de voir):

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \left(\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dX_n}{dx_n} \right).$$

Il vient donc:

$$\Delta \frac{dM}{dt} + M \frac{d\Delta}{dt} = \Delta \left(\frac{dMX_1}{dx_1} + \frac{dMX_2}{dx_2} + \ldots + \frac{dMX_n}{dx_n} \right) = 0.$$

C. Q. F. D.

Passons maintenant aux équations de la dynamique.

Soient les équations

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1'}$$

64

Soit une solution contenant deux constantes arbitraires α et β et s'écrivant:

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha, \beta),$$
$$y_i = \psi_i(t, \alpha, \beta).$$

Je dis que:

$$J = \int (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2 + \ldots + dx_n dy_n) = \int \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{dx_i}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha}\right) d\alpha d\beta$$

est une constante.

Il vient en effet:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2y_i}{dt\,d\beta}\frac{dx_i}{d\alpha} - \frac{d^2x_i}{dt\,d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right) d\alpha d\beta.$$

Il vient ensuite:

$$\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha} = \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2x_i}{dt\,d\beta} = \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\beta} + \sum_k \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\beta},$$

$$\frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha} = -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2y_i}{dt\,d\beta} = -\sum_k \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\beta} - \sum_k \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\frac{dy_k}{d\beta}.$$

On conclut de là que:

$$\sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right)$$

$$= \sum\sum \left(\frac{d^2F}{dy_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2F}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} + \frac{d^2F}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta} + \frac{d^2F}{dx_i dy_k}\frac{dx_i}{d\beta}\frac{dy_k}{d\alpha}\right).$$

Le second membre ne change pas quand on permute α et β, on a donc:

$$\sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\alpha}\frac{dy_i}{d\beta} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\alpha}\frac{dx_i}{d\beta}\right) = \sum \left(\frac{d^2x_i}{dt\,d\beta}\frac{dy_i}{d\alpha} - \frac{d^2y_i}{dt\,d\beta}\frac{dx_i}{d\alpha}\right).$$

Cette égalité exprime que la quantité sous le signe $\int$ dans l'expression de $\frac{dJ}{dt}$ est nulle et par conséquent que

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

C. Q. F. D.

Il me reste à envisager le dernier des invariants intégraux qui se présente dans le cas du problème des n corps.

Reprenons les équations de la dynamique, mais en posant:

$$F = T + U,$$

T ne dependant que des y et U des x seulement. De plus T est homogène de degré 2 et U homogène de degré -1.

Prenons une solution

$$x_i = \varphi_i(t, \alpha), \qquad y_i = \psi_i(t, \alpha)$$

ne dépendant que d'une seule constante arbitraire α.

Considérons l'intégrale simple:

$$J = \int \sum \left(2x_i \frac{dy_i}{d\alpha} + y_i \frac{dx_i}{d\alpha}\right) d\alpha + 3(C_1 - C_0)t,$$

C_1 et C_0 étant les valeurs constantes de la fonction F aux extrémités de l'arc le long duquel on intègre.

Il vient:

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(2\frac{dx_i}{dt}\frac{dy_i}{d\alpha} + \frac{dy_i}{dt}\frac{dx_i}{d\alpha} + 2x_i \frac{d^2 y_i}{dt\,d\alpha} + y_i \frac{d^2 x_i}{dt\,d\alpha}\right) d\alpha + 3(C_1 - C_0).$$

Il vient:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i} = \frac{dT}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dU}{dx_i},$$

$$\frac{d^2 x_i}{dt\,d\alpha} = \sum_k \frac{d^2 T}{dy_i\,dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha}, \qquad \frac{d^2 y_i}{dt\,d\alpha} = -\sum_k \frac{d^2 U}{dx_i\,dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha},$$

66

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \sum \left(2\frac{dT}{dy_i}\frac{dy_i}{d\alpha} + y_i \frac{d^2T}{dy_i dy_k}\frac{dy_k}{d\alpha} - \frac{dx_i}{d\alpha}\frac{dU}{dx_i} - 2x_i \frac{d^2U}{dx_i dx_k}\frac{dx_k}{d\alpha} \right) d\alpha + 3(C_1 - C_0).$$

Mais en vertu du théorème des fonctions homogènes on a:

$$\sum_i y_i \frac{d^2T}{dy_i dy_k} = \frac{dT}{dy_k}, \qquad \sum_i x_i \frac{d^2U}{dx_i dx_k} = -2\frac{dU}{dx_k},$$

d'où

$$\frac{dJ}{dt} = \int \sum \left(3\frac{dT}{dy_i}\frac{dy_i}{d\alpha} + 3\frac{dU}{dx_i}\frac{dx_i}{d\alpha} \right) d\alpha + 3(C_1 - C_0)$$

ou

$$\frac{dJ}{dt} = 3\int (dT + dU) + 3(C_1 - C_0).$$

Or d'après la définition de C_1 et C_0 on a

$$C_0 - C_1 = \int dF = \int (dT + dU).$$

Il vient donc

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

C. Q. F. D.

Note D.

Sur les équations linéaires à coëfficients périodiques.

On sait qu'une fonction de x périodique et de période 2π peut se développer en une série de la forme suivante

$$\begin{aligned} f(x) = A_0 &+ A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_n \cos nx + \ldots \\ &+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx + \ldots \end{aligned}$$

J'ai montré dans le Bulletin astronomique (novembre 1886) que

87.

67

Il y a dans le cas du problème des n corps, un autre invariant intégral sur lequel je veux attirer l'attention.

Considérons une simple infinité de positions initiales du système formant un arc de courbe dans l'espace à $6n$ dimensions. Soient C_0 et C_1 les valeurs de la constante des forces vives aux deux extrémités de cet arc. L'expression

$$\int \Sigma(2x_i dy_i + y_i dx_i) + 3(C_1 - C_0)t$$

(où l'intégrale est étendue à l'arc de courbe tout entier et où le temps n'entre plus si $C_1 = C_0$) est encore un invariant intégral; on peut d'ailleurs en déduire aisément les autres invariants intégraux dont il a été question plus haut.

Nous dirons qu'un invariant intégral est du 1^er^ ordre, du 2^d^ ordre, ... ou du n^e ordre selon qu'il sera une intégrale simple, double, ... ou d'ordre n.

Parmi les invariants intégraux nous distinguerons les *invariants positifs* que nous définirons comme il suit.

L'invariant intégral d'ordre n

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

sera un invariant positif dans un certain domaine, si M est une fonction de $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui reste positive, finie et uniforme dans ce domaine.

§ 3. 7 *Transformation des invariants intégraux.*

Reprenons nos équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n$$

et supposons que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{d(MX_1)}{dx_1} + \frac{d(MX_2)}{dx_2} + \dots + \frac{d(MX_n)}{dx_n} = 0,$$

68

de telle sorte que l'intégrale d'ordre n

$$J = \int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

soit un invariant intégral.

Changeons de variables en posant:

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(z_1, z_2, \dots, z_n), \\ x_2 &= \psi_2(z_1, z_2, \dots, z_n), \\ &\dots \\ x_n &= \psi_n(z_1, z_2, \dots, z_n), \end{aligned} \tag{3}$$

et appelons Δ le déterminant fonctionnel des n fonctions ψ par rapport aux n variables z.

Nous aurons après le changement de variables:

$$J = \int M \Delta dz_1 dz_2 \dots dz_n.$$

Si l'invariant J était positif avant le changement de variables, il restera positif après ce changement, pourvu que Δ soit toujours positif, fini et uniforme.

Comme en permutant deux des variables z, on change le signe de Δ, il nous suffira de supposer que Δ est toujours de même signe ou qu'il ne s'annule jamais. Il devra de plus être toujours fini et uniforme. Cela arrivera si le changement de variables (3) est doublement univoque, c'est à dire si dans le domaine considéré les x sont fonctions uniformes des z et les z fonctions uniformes des x.

Ainsi après un changement de variables doublement univoque, les invariants positifs restent positifs.

Voici un cas particulier intéressant:

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C.$$

Prenons pour variables nouvelles $z_n = C$ d'une part et d'autre part $n - 1$ autres variables $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$. Il arrivera souvent qu'on pourra choisir $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ de telle sorte que ce changement de variables soit doublement univoque dans le domaine considéré.

69

Après le changement de variables, les équations (1) deviendront:

$$(4)\quad \frac{dz_1}{dt}=Z_1,\qquad \frac{dz_2}{dt}=Z_2,\quad \ldots,\quad \frac{dz_{n-1}}{dt}=Z_{n-1},\qquad \frac{dz_n}{dt}=Z_n=0,$$

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$ étant des fonctions connues de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Si l'on regarde la constante $C = z_n$ comme une donnée de la question, les équations sont réduites à l'ordre $n-1$ et s'écrivent:

$$(4')\qquad \frac{dz_1}{dt}=Z_1,\quad \ldots,\quad \frac{dz_{n-1}}{dt}=Z_{n-1},$$

les fonctions Z ne dépendant plus que de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ puisque z_n y a été remplacé par sa valeur numérique.

Si les équations (1) admettent un invariant positif

$$\int M dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

les équations (4) admettront également un invariant positif:

$$J=\int \mu dz_1 dz_2 \ldots dz_{n-1} dz_n.$$

Je dis maintenant que les équations (4') qui sont d'ordre $n-1$ admettent également un invariant intégral positif qui devra être d'ordre $n-1$.

En effet, dire que J est un invariant intégral c'est dire que

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1}+\frac{d(\mu Z_2)}{dz_2}+\ldots+\frac{d(\mu Z_n)}{dz_n}=0$$

ou puisque Z_n est nul,

$$\frac{d(\mu Z_1)}{dz_1}+\frac{d(\mu Z_2)}{dz_2}+\ldots+\frac{d(\mu Z_{n-1})}{dz_{n-1}}=0,$$

ce qui prouve que l'intégrale d'ordre $n-1$

$$\int \mu dz_1 dz_2 \ldots dz_{n-1}$$

est un invariant pour les équations (4').

Jusqu'ici nous avons fait porter les changements de variables sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais nous avons conservé le temps

70

t qui est notre variable indépendante. Nous allons supposer maintenant que l'on pose:

$$t = \varphi(t_1)$$

8

et que nous prenions t_1 comme nouvelle variable indépendante.

Les équations (1) deviennent alors:

$$\frac{dx_i}{dt_1} = X_i' = X_i \frac{d\varphi}{dt_1} = X_i \frac{dt}{dt_1}. \qquad (5) \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Si les équations (1) ont un invariant intégral d'ordre n

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

65 on devra avoir

$$\sum \frac{d}{dx_i}(MX_i) = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\sum \frac{d}{dx_i}\left(M \frac{dt_1}{dt} X_i'\right) = 0.$$

Cela montre que

$$\int M \frac{dt_1}{dt} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

est un invariant intégral pour les équations (5).

Pour que cette transformation puisse être utile, il faut que t et t_1 soient liés de telle sorte que $\frac{dt_1}{dt}$ puisse être regardé comme une fonction connue, finie, continue et uniforme de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Supposons par exemple que nous prenions pour nouvelle variable indépendante:

$$x_n = t_1.$$

Il vient alors

$$\frac{dt_1}{dt} = X_n$$

et les équations (5) s'écrivent

$$\frac{dx_1}{dt_1} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dt_1} = \frac{X_2}{X_n}, \quad \dots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dt_1} = \frac{X_{n-1}}{X_n}, \quad \frac{dx_n}{dt_1} = 1,$$

et elles admettent comme invariant intégral:

$$\int M X_n dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

De même si nous prenons pour nouvelle variable indépendante:

$$t_1 = \theta(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

θ étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \dots, x_n$, le nouvel invariant intégral s'écrira:

$$\int M\left(\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \dots + \frac{d\theta}{dx_n} X_n\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Il est à remarquer que la forme et la signification d'un invariant intégral est beaucoup plus profondément modifiée quand on change la variable indépendante appelée temps que quand le changement de variables porte seulement sur les fonctions inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$, car alors les lois du mouvement du point représentatif P se trouvent complètement transformées.

Supposons $n = 3$ et regardons x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. L'équation:

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = 0$$

représentera une surface. Considérons une portion quelconque de cette surface et appelons S cette portion de surface.

Je supposerai qu'en tous les points de S on a

$$\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\theta}{dx_3} X_3 \lesseqgtr 0.$$

Il en résulte que la portion de surface S n'est tangente à aucune trajectoire. Je dirai alors que S est une surface sans contact.

Soit P_0 un point de S; par ce point passe une trajectoire. Si cette trajectoire prolongée vient recouper S en un point P_1, je dirai que P_1 est le *conséquent* de P_0. A son tour P_1 peut avoir un conséquent P_2 que j'appellerai le *second conséquent* de P_0 et ainsi de suite.

Si on considère une courbe C tracée sur S, les n^{es} conséquents des divers points de cette courbe formeront une autre courbe C' que j'appel-

72

lerai la n^e *conséquente* de C. On définirait de la même façon l'aire qui est n^e conséquente d'une aire donnée faisant partie de S.

~~Je ne m'occuperai que du cas où θ n'est pas une fonction uniforme de x_1, x_2 et x_3,~~ mais une fonction susceptible d'une infinité de valeurs dont la différence est un multiple de 2π. Je prendrai par exemple:

dy

$$\cancel{\theta = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x_1}{x_2}.}$$

Cela posé, soit une portion de surface sans contact S ayant pour équation $\theta = 0$; soit C une courbe fermée tracée sur cette surface et limitant une aire A; soient C' et A' les premières conséquentes, C^n et A^n les n^{es} conséquentes de C et de A.

Par chacun des points de C passe une trajectoire que je prolonge depuis sa rencontre avec C jusqu'à sa rencontre avec C'. L'ensemble de ces trajectoires formera une surface trajectoire T.

Je considère le volume V limité par la surface trajectoire T et par les deux aires A et A'. Supposons qu'il y ait un invariant positif

$$J = \int M dx_1 dx_2 dx_3.$$

J'étends cet invariant au volume V et j'écris que $\frac{dJ}{dt}$ est nul.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S. Menons la normale à cet élément, prenons sur cette normale une longueur infiniment petite dn. Soit $\theta + \frac{d\theta}{dn} dn$ la valeur de θ à l'extrémité de cette longueur. Si l'on a mené la normale dans le sens des θ croissants, on aura

$$\frac{d\theta}{dn} > 0.$$

Posons:

$$\frac{\frac{d\theta}{dx_1} X_1 + \frac{d\theta}{dx_2} X_2 + \frac{d\theta}{dx_3} X_3}{\frac{d\theta}{dn}} = H,$$

on aura alors

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{A'} MH d\omega - \int_{A} MH d\omega,$$

la première intégrale étant étendue à l'aire A' et la seconde à l'aire A.

73

L'intégrale

$$\int MHd\omega$$

conserve la même valeur qu'on l'étende à l'aire A, ou à A', ou par conséquent à A''. C'est donc un invariant intégral d'une nature particulière qui conserve la même valeur pour une aire quelconque ou pour l'une de ses conséquentes.

Cet invariant est d'ailleurs positif, car par hypothèse, M, H et par conséquent MH sont positifs.

§ ~~1~~ 8. *Usage des invariants intégraux.*

Ce qui fait l'intérêt des invariants intégraux, ce sont les théorèmes suivants dont nous ferons un fréquent usage.

Nous avons défini plus haut la stabilité en disant que le point mobile P doit rester à distance finie; on l'entend quelquefois dans un autre sens. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale.

~~Je dis que s'il y a un invariant positif, la stabilité dans le premier~~ sens du mot entraîne la stabilité dans le second sens du mot, non pas pour toutes les trajectoires, mais pour une infinité d'entre elles. Je pourrais même ajouter que les trajectoires qui jouissent de cette propriété sont plus générales que celles qui n'en jouissent pas, précisément autant que les nombres incommensurables sont plus généraux que les nombres commensurables.

Supposons $n = 3$ et imaginons que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point P dans l'espace.

Théorème I. Supposons que le point P reste à distance finie, et que le volume $\int dx_1 dx_2 dx_3$ soit un invariant intégral; ~~si~~ l'on considère une région r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

En effet le point P restant à distance finie, ne sortira jamais d'une région limitée R. ~~J'appelle V le volume de cette région R.~~

Imaginons maintenant une région très petite r_0, j'appelle v le volume de cette région. Par chacun des points de r_0 passe une trajectoire que l'on peut regarder comme parcourue par un point mobile suivant la loi définie par nos équations différentielles. Considérons donc une infinité de points mobiles remplissant au temps o la région r_0 et se mouvant ensuite conformément à cette loi. Au temps τ ils rempliront une certaine région r_1, au temps 2τ une région r_2, etc. au temps $n\tau$ une région r_n. ∧

∧ Je puis supposer que τ est assez grand et r_0 assez petit pour que r_0 et r_1 n'aient aucun point commun.

Le volume étant un invariant intégral, ces diverses régions $r_0, r_1, \ldots, r_n$ auront même volume v. Si ces régions n'avaient aucun point commun, le volume total serait plus grand que nv; mais d'autre part toutes ces régions sont intérieures à R, le volume total est donc plus petit que V. Si donc on a:

$$n > \frac{V}{v},$$

il faut que deux au moins de nos régions aient une partie commune. Soient r_p et r_q ces deux régions $(q > p)$. Si r_p et r_q ont une partie commune, il est clair que r_0 et r_{q-p} devront avoir une partie commune.

Plus généralement, si on ne pouvait trouver k régions ayant une partie commune, aucun point de l'espace ne pourrait appartenir à plus de $k - 1$ des régions $r_0, r_1, \ldots r_n$. Le volume total occupé par ces régions serait donc plus grand que $\frac{nv}{k-1}$. Si donc on a

$$n > (k-1)\frac{V}{v},$$

il faut que l'on puisse trouver k régions ayant une partie commune. Soient:

$$r_{p_1}, r_{p_2}, \ldots, r_{p_k}$$

ces régions. Alors

$$r_0, r_{p_2-p_1}, r_{p_3-p_1}, \ldots, r_{p_k-p_1}$$

auront aussi une partie commune.

Mais reprenons la question à un autre point de vue. ~~Pour employer la même nomenclature que dans le paragraphe précédent nous dirons~~ que la région r_n est la n^e conséquente de r_0 et que r_0 est la n^e antécédente de r_n.

H Par analogie avec la nomenclature des §§ préc

H ~~une nomenclature analogue, mais non identique à celle du~~

H conviendrons de dire

58. ~~Note 3.~~

C'est dans ce dernier sens que Poisson entendait la stabilité. Lorsqu'il a démontré que, si l'on tient compte des secondes puissances des masses, les grands axes des orbites demeurent invariables, il s'est seulement attaché à établir que les développements de ces grands axes ~~de ces~~ en séries ne contiennent que des termes périodiques de la forme $\sin \alpha t$ ou $\cos \alpha t$, ou des termes mixtes de la forme $t \sin \alpha t$ ou $t \cos \alpha t$, sans contenir aucun terme séculaire de la forme t ou t^2. Cela ~~signifie, non~~ ne signifie pas que les grands axes ne peuvent jamais dépasser une certaine valeur, ~~car~~ un terme mixte $t \cos \alpha t$ peut croître au delà de toute limite; cela veut dire seulement que les grands axes repasseront une infinité de fois par leur valeur primitive.

La stabilité, au sens de Poisson, peut-elle appartenir à toutes les ~~trajectoires~~ solutions? Poisson ne le croyait pas, car sa démonstration suppose expressément que les moyens mouvements ne sont pas commensurables; ~~E~~ Elle ~~cesse donc de s'appliquer quand les~~ ne s'applique donc pas quelles que soient les conditions initiales du mouvement.

L'existence des solutions asymptotiques, que nous établirons plus loin, montre suffisamment qu'il y a ~~une des trajectoires qui ne repassent cas où le point~~ que si la position initiale du point P est convenablement choisie, le point P ne repassera pas une infinité de fois aussi près que l'on voudra de cette position initiale.

Mais je me propose d'établir que, dans un des cas particuliers du problème des trois corps, on peut choisir la position initiale du point P (et cela d'une infinité de manières) de telle façon que ce point P repasse une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale.

En d'autres termes, il y aura une infinité de solutions particulières du problème qui ne jouiront pas de la stabilité au second sens du mot, c'est à dire au sens de Poisson; mais il y en aura une infinité qui en jouiront. J'ajouterai que les premières peuvent être regardées comme exceptionnelles et je chercherai plus loin à faire comprendre le sens précis que j'attache à ce mot.

Se pag. 76

9 75

+

Note 4

Corollaire. Il résulte de ce qui précède qu'il existe une infinité de trajectoires qui traversent une infinité de fois la région r_0; mais il peut en exister d'autres qui ne traversent cette région qu'un nombre fini de fois. Je me propose maintenant d'expliquer pourquoi ces dernières trajectoires peuvent être regardées comme exceptionnelles.

Cette expression ~~n~~'ayant par elle-même aucun sens précis, je suis obligé d'abord d'en compléter la définition.

Nous conviendrons de dire que la probabilité pour que la ~~point~~ position initiale du point mobile P appartienne à une certaine région r_0 est à la probabilité pour que cette position initiale appartienne à une autre région r'_0 dans le même rapport que le volume de r_0 au volume de r'_0.

Les probabilités étant ainsi définies, je me propose d'établir que la probabilité pour qu'une trajectoire issue d'un point de r_0 ne traverse pas cette région plus de k fois est nulle, quelque grand que soit k et quelque petite que soit la région r_0. C'est là ce que j'entends quand je dis que les trajectoires qui ne traversent r_0 qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles.

~~Soit Je considère les n régions~~ r_0 et ses n conséquentes $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Je suppose que la position initiale du point P appartienne à ~~k~~ r_0 et je me propose de calculer la probabilité pour que la trajectoire issue de ce point ne traverse pas $k+1$ fois la région r_0 depuis l'époque 0 jusqu'à l'époque $n\tau$.

Nous avons vu que si le volume v de r_0 est tel que:

$$n \geq \frac{(k-1)V}{v} \quad n > \frac{kV}{v}$$

on pourra trouver $k+1$ régions que j'appellerai

$$r_0, r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \ldots, r_{\alpha_k}$$

et qui auront une partie commune. Soit s_{α_k} cette partie commune, soit s_0 son antécédente d'ordre α_k; et désignons par s_p la p^e conséquente de s_0.

Je dis que si la position initiale du point P appartient à s_0, la trajectoire issue de de ce point traversera $k+1$ fois au moins la région r_0 entre l'époque 0 et l'époque $n\tau$.

En effet le point mobile qui décrit cette trajectoire se trouvera à l'époque 0 dans la région s_0, à l'époque $p\tau$ dans la région s_p, à l'époque $n\tau$ dans la région ~~$n\tau$~~ s_n. Il traversera donc successivement ~~dans les~~, entre les époques 0 et $n\tau$ les régions suivantes:

(Corts. se suit 82)

76

~~L'intégrale~~

$$\int MHd\omega$$

conserve la même valeur qu'on l'étende à l'aire A, ou à A', ou par conséquent à A''. C'est donc un invariant intégral d'une nature particulière qui conserve la même valeur pour une aire quelconque ou pour l'une de ses conséquentes.

Cet invariant est d'ailleurs positif, car par hypothèse, M, H et par conséquent MH sont positifs.

§ 4. *Usage des invariants intégraux.*

Ce qui fait l'intérêt des invariants intégraux, ce sont les théorèmes suivants dont nous ferons un fréquent usage.

Nous avons défini plus haut la stabilité en disant que le point mobile P doit rester à distance finie; on l'entend quelquefois dans un autre sens. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale.

Je dis que s'il y a un invariant positif, la stabilité dans le premier sens du mot entraîne la stabilité dans le second sens du mot, non pas pour toutes les trajectoires, mais pour une infinité d'entre elles. Je pourrais même ajouter que les trajectoires qui jouissent de cette propriété sont plus générales que celles qui n'en jouissent pas, précisément autant que les nombres incommensurables sont plus généraux que les nombres commensurables.

Supposons $n = 3$ et imaginons que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point P dans l'espace.

Théorème I. Supposons que le point P reste à distance finie, et que le volume $\int dx_1 dx_2 dx_3$ soit un invariant intégral; si l'on considère une région r_0 quelconque, quelque petite que soit cette région, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

En effet le point P restant à distance finie, ne sortira jamais d'une région limitée R. J'appelle V le volume de cette région R.

77

Imaginons maintenant une région très petite r_0, j'appelle v le volume de cette région. Par chacun des points de r_0 passe une trajectoire que l'on peut regarder comme parcourue par un point mobile suivant la loi définie par nos équations différentielles. Considérons donc une infinité de points mobiles remplissant au temps o la région r_0 et se mouvant ensuite conformément à cette loi. Au temps τ ils rempliront une certaine région r_1, au temps 2τ une région r_2, etc. au temps $n\tau$ une région r_n. 1

1 Je puis supposer que τ est assez grand et r_0 assez petit pour que r_0 et r_1 n'aient aucun point commun.

Le volume étant un invariant intégral, ces diverses régions $r_0, r_1, \ldots, r_n$ auront même volume v. Si ces régions n'avaient aucun point commun, le volume total serait plus grand que nv; mais d'autre part toutes ces régions sont intérieures à R, le volume total est donc plus petit que V. Si donc on a:

$$n > \frac{V}{v},$$

il faut que deux au moins de nos régions aient une partie commune. Soient r_p et r_q ces deux régions $(q > p)$. Si r_p et r_q ont une partie commune, il est clair que r_0 et r_{q-p} devront avoir une partie commune.

Plus généralement, si on ne pouvait trouver k régions ayant une partie commune, aucun point de l'espace ne pourrait appartenir à plus de $k - 1$ des régions $r_0, r_1, \ldots r_n$. Le volume total occupé par ces régions serait donc plus grand que $\frac{nv}{k-1}$. Si donc on a

$$n > (k-1)\frac{V}{v},$$

il faut que l'on puisse trouver k régions ayant une partie commune. Soient:

$$r_{p_1}, r_{p_2}, \ldots, r_{p_k}$$

ces régions. Alors

$$r_0, r_{p_2-p_1}, r_{p_3-p_1}, \ldots, r_{p_k-p_1}$$

auront aussi une partie commune.

Mais reprenons la question à un autre point de vue. ~~Pour employer~~ Par analogie avec la ~~même~~ nomenclature ~~que dans le~~ du paragraphe précédent nous ~~dirons~~ conviendrons de dire que la région r_n est la n^e conséquente de r_0 et que r_0 est la n^e antécédente de r_n.

78

Supposons alors que r_p soit la première des conséquentes successives de r_0 qui ait une partie commune avec r_0. Soit r'_0 cette partie commune; soit s'_0 la p^e antécédente de r'_0 qui fera aussi partie de r_0 puisque sa p^e conséquente fait partie de r_p.

Soit ensuite r'_{p_1} la première des conséquentes de r'_0 qui ait une partie commune avec r'_0; soit r''_0 cette partie commune; sa p_1^e antécédente fera partie de r'_0 et par conséquent de r_0, et sa $p + p_1^e$ antécédente que j'appellerai s''_0 fera partie de s'_0 et par conséquent de r_0.

Ainsi s''_0 fera partie de r_0 ainsi que ses p^e et $p + p_1^{es}$ conséquentes.

Et ainsi de suite.

Avec r''_0 nous formerons r'''_0 comme nous avons formé r''_0 avec r'_0 et r'_0 avec r_0; nous formerons ensuite $r_0^{IV}, \ldots, r_0^n, \ldots$.

Je supposerai que la première des conséquentes successives de r_0^n qui ait une partie commune avec r_0^n soit celle d'ordre p_n.

J'appellerai s_0^n l'antécédente d'ordre $p + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$ de r_0^n.

Alors s_0^n fera partie de r_0 ainsi que ses n conséquentes d'ordre:

$$p, p + p_1, p + p_1 + p_2, \ldots, p + p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}.$$

De plus s_0^n fera partie de s_0^{n-1}, s_0^{n-1} de s_0^{n-2}, ...

Il y aura alors des points qui appartiendront à la fois aux régions $r_0, s'_0, s''_0, \ldots, s_0^n, s_0^{n+1}, \ldots$ ad. inf. L'ensemble de ces points formera une région σ qui pourra d'ailleurs se réduire à un ou à plusieurs points.

Alors la région σ fera partie de r_0 ainsi que ses conséquentes d'ordre $p, p + p_1, \ldots, p + p_1 + \ldots + p_n, p + p_1 + \ldots + p_n + p_{n+1}, \ldots$ ad. inf.

En d'autres termes, toute trajectoire issue d'un des points de σ traversera une infinité de fois la région r_0.

C. Q. F. D. Här insjutes note 4 sid 75

Extension du théorème I. Nous avons supposé:

1° que $n = 3$,

73 §8. 2° que le volume est un invariant intégral,

3° que le point P est assujetti à rester à distance finie.

Le théorème est encore vrai si le volume n'est pas un invariant intégral, pourvu qu'il existe un invariant positif quelconque:

$$\int M dx_1 dx_2 dx_3.$$

79

Il est encore vrai si $n > 3$, s'il existe un invariant positif:

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

et si $x_1, x_2, \dots, x_n$, coordonnées du point P dans l'espace à n dimensions, sont assujetties à rester finies.

Mais il y a plus.

Supposons que $x_1, x_2, \dots, x_n$ ne soient plus assujetties à rester finies, mais que l'invariant intégral positif

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

étendu à l'espace à n dimensions tout entier ait une valeur finie. Le théorème sera encore vrai.

Voici un cas qui se présentera plus fréquemment.

Supposons que l'on connaisse une intégrale des équations (1)

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}$$

Si $F = \text{const.}$ est l'équation générale d'un système de surfaces fermées dans l'espace à n dimensions, si en d'autres termes F est une fonction uniforme qui devient infinie quand une quelconque des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ cesse d'être finie, il est clair que $x_1, x_2, \dots, x_n$ resteront toujours finies, puisque F conserve une valeur constante finie; on se trouve donc dans les conditions de l'énoncé du théorème.

Mais supposons que les surfaces $F = \text{const.}$ ne soient pas fermées; il pourra se faire néanmoins que l'invariant intégral positif

$$\int M dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

étendu à tous les systèmes de valeurs des x tels que:

$$C_1 < F < C_2$$

ait une valeur finie; le théorème sera encore vrai.

C'est ce qui arrive en particulier dans le cas suivant.

M. Hill dans sa théorie de la lune a négligé dans une première

80

approximation la parallaxe du soleil, l'excentricité du soleil et l'inclinaison des orbites; il est ainsi arrivé aux équations suivantes:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = 2n'y' - x\left(\frac{\mu}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} - 3n'^2\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = -2n'x' - \frac{\mu y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

qui admettent l'intégrale:

$$F = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - \frac{\mu}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{3}{2}n'^2x^2 = \text{const.}$$

et l'invariant intégral

$$\int dx\,dy\,dx'\,dy'.$$

Si l'on regarde x, y, x' et y' comme les coordonnées d'un point dans l'espace à 4 dimensions, l'équation $F = \text{const.}$ représente un système de surfaces qui ne sont pas fermées. Mais l'invariant intégral étendu à tous les points compris entre deux de ces surfaces est fini, comme nous allons le montrer.

Le théorème I est donc encore vrai; c'est à dire qu'il existe des trajectoires qui traversent une infinité de fois toute région de l'espace à 4 dimensions, quelque petite que soit cette région.

Här inskjutes note 5 sid 83

Théorème II. Si $n = 3$ et que x_1, x_2, x_3 représentent les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et s'il y a un invariant positif, il ne peut pas y avoir de surface *fermée* sans contact.

Soit en effet

$$J = \int M dx_1 dx_2 dx_3$$

un invariant intégral positif. Supposons qu'il existe une surface S fermée et sans contact, ayant pour équation

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Soit V le volume limité par cette surface; nous étendrons l'invariant J à ce volume tout entier.

La surface S étant sans contact, l'expression:

$$\frac{dF}{dx_1}X_1 + \frac{dF}{dx_2}X_2 + \frac{dF}{dx_3}X_3$$

(Jfr. sid 88)

81

ne pourra s'annuler et par conséquent changer de signe; nous la supposerons positive pour fixer les idées.

Soit $d\omega$ un élément de la surface S; menons la normale à cet élément du côté des F croissants; prenons sur cette normale un segment infiniment petit dn. Soit $\frac{dF}{dn}dn$ la valeur de F à l'extrémité de ce segment. On aura:

$$\frac{dF}{dn} > 0.$$

J étant un invariant, on devrait avoir

$$\frac{dJ}{dt} = 0.$$

Mais nous trouvons

$$\frac{dJ}{dt} = \int M \frac{\frac{dF}{dx_1}X_1 + \frac{dF}{dx_2}X_2 + \frac{dF}{dx_3}X_3}{\frac{dF}{dn}} d\omega.$$

81 §8

L'intégrale du second membre, étendue à toute la surface S, est positive puisque la fonction sous le signe $\int$ est toujours positive.

Nous arrivons donc à deux résultats contradictoires et nous devons conclure qu'il ne peut exister de surface fermée sans contact.

Extension du théorème II. Il est facile d'étendre ce théorème au cas de $n > 3$; il suffit pour cela, puisque la représentation géométrique n'est plus possible, de le traduire dans le langage analytique et de dire:

S'il y a un invariant intégral positif, il ne peut pas exister une fonction uniforme $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui soit positive, qui devient infinie toutes les fois que l'un des x cesse d'être fini et qui soit telle que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx_1}X_1 + \frac{dF}{dx_2}X_2 + \ldots + \frac{dF}{dx_n}X_n$$

soit toujours de même signe quand F est nul.

Pour faire comprendre l'importance de ce théorème, je me bornerai à faire observer que c'est une généralisation de celui dont ~~M. Poincaré s'est~~ je me suis servi pour démontrer la légitimité de la belle méthode de M. Lindstedt.

Je préfère toutefois, au point de vue des applications ultérieures,

(Forts. sid 88)

§8. (forts. fr. sid 75)

$$s_0,\ s_{\alpha_k-\alpha_{k-1}},\ s_{\alpha_k-\alpha_{k-2}},\ \ldots,\ \cancel{s_{\alpha_1}},\ \cancel{s_{\alpha_1}}\ s_{\alpha_k-\alpha_1},\ s_{\alpha_k-\alpha_1},\ s_{\alpha_k}$$

Or je dis que toutes ces régions font partie de r_0. En effet s_{α_k} fait partie de r_0 par définition; s_0 fait partie de r_0 parce que sa α_k^e conséquente s_{α_k} fait partie de r_{α_k}, et en général $s_{\alpha_k-\alpha_i}$ fera partie de r_0 parce que sa α_i^e conséquente s_{α_k} fait partie de r_{α_i}.

Donc le point mobile traversera $k+1$ fois au moins la région r_0

C. Q. F. D.

Soit maintenant σ_0 la ~~région~~ portion de r_0 qui n'appartient ni à s_0, ni à aucune région analogue, de telle façon que les trajectoires issues des divers points de σ_0 ne traversent pas la région r_0 au moins $k+1$ fois entre les époques 0 et $n\tau$.

Soit w le volume de σ_0.

La probabilité cherchée, c'est à dire la probabilité pour ~~que une~~ que notre trajectoire ne traverse pas $k+1$ fois r_0 entre ces deux époques sera alors $\frac{w}{v}$

Or par hypothèse aucune trajectoire issue de σ_0 ne traverse ~~entre ces deux~~ $k+1$ fois r_0 ni a fortiori σ_0 entre ces deux époques. On a donc:

$$w < \frac{kV}{n}$$

et notre probabilité sera plus petite que

$$\frac{kV}{nv}$$

Quelque grand que soit k, quelque petit que soit v, on pourra toujours prendre n assez grand pour que cette expression soit aussi petite que nous le voudrons.

~~Nous pouvons donc dire que la probabilité~~ Donc il y a une probabilité nulle pour que notre trajectoire, que nous savons issue d'un point de r_0, ne traverse pas cette région plus de k fois depuis l'époque 0 jusqu'à l'époque $+\infty$

C. Q. F. D.

(forts. sid 78)

83 11 ~~11~~

Note 5

Soit donc à calculer l'intégrale quadruple

$$J = \int dx\, dy\, dx'\, dy'$$

cette intégrale étant étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$C_1 < F < C_2.$$

Changeons de variables et transformons notre intégrale quadruple, en posant:

$$\cancel{x' = \sqrt{r}} \quad x' = \cos\varphi\sqrt{2r}, \qquad y' = \sin\varphi\sqrt{2r}$$

$$x = \rho\cos\omega\,, \qquad y = \rho\sin\omega.$$

cette intégrale devient:

$$J = \int \rho\, d\rho\, dr\, d\omega\, d\varphi$$

et il vient d'autre part:

$$F = r - \frac{\mu}{\rho} - \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2\omega$$

Nous devons intégrer d'abord par rapport à φ entre les limites 0 et 2π, ce qui donne:

$$J = 2\pi\int \rho\, d\rho\, dr\, d\omega$$

et l'intégration doit être étendue à tous les ~~points~~ systèmes de valeurs de ρ, r et ω qui satisfont aux inégalités:

$$r > 0, \qquad r > C_1 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2\omega$$

$$(1) \qquad r < C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2\omega$$

De ces inégalités on peut déduire la suivante:

$$C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2\omega > 0.$$

Regardons ρ et ω comme les coordonnées polaires d'un point et construisons la courbe

$$C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2\omega = 0.$$

Nous verrons que si C_2 est plus petit que $\cancel{-\frac{9^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2}} n'^{\frac{2}{3}} \mu^{\frac{2}{3}}}$ $-\frac{1}{2}(9n'\mu)^{\frac{2}{3}}$ cette courbe se compose d'une ~~boucle~~ ovale fermée située tout entière à l'intérieur du cercle

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}}$$

et de deux branches infinies situées tout entières à l'extérieur de ce cercle.

Le lecteur fera facilement cette construction; s'il y éprouvait quelque difficulté, je le renverrais au mémoire original de M. Hill dans le Tome I de l'American Journal of Mathematics.

M. Hill conclut de là que si le point ~~mobile~~ ρ, ω est à l'origine des temps à l'intérieur de cette ovale fermée, il y restera toujours; que par conséquent ρ restera toujours plus petit que $\sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}}$. Ainsi si l'on négligeait la parallaxe du Soleil, son excentricité et les inclinaisons, il serait permis d'~~affir~~ assigner une limite supérieure au rayon vecteur de la Lune. En ce qui concerne la Lune en effet, la constante C_2 est plus petite que $-\frac{1}{2}(9n'\mu)^{\frac{2}{3}}$.

8412

58.

C'est ce remarquable résultat de M. Hill que je me propose de compléter en montrant que, dans ces conditions, la Lune jouirait également de la stabilité au sens de Poisson; je veux dire par là que, si les conditions initiales du mouvement ne sont pas exceptionnelles, la Lune repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position primitive. C'est pour cela, comme je l'ai expliqué plus haut, que je me propose de démontrer que l'intégrale J est finie.

Comme ρ est plus petit que $\sqrt[3]{\frac{\mu}{3n'^2}}$ et par conséquent limité, l'intégrale:

$$J = 2\pi \int \rho \, d\rho \, dz \, d\omega$$

ne peut devenir infinie que si z croît indéfiniment, et z ne peut devenir infini, en vertu des inégalités (1) que si ρ s'annule.

~~Si donc je~~ Posons donc:

$$J = J' + J''$$

J' représentant l'intégrale étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

(2) $\quad z > 0 \quad , \quad \rho > \rho_0 \quad C_1 < F < C_2$

et J'' représentant l'intégrale étendue à tous les systèmes de valeurs tels que:

(3) $\quad z > 0, \quad \rho < \rho_0, \quad C_1 < F < C_2.$

~~Comme~~ Quand les inégalités (2) sont satisfaites ρ ne peut s'annuler; donc z ne peut devenir infini. Donc la première intégrale J' est finie.

Examinons maintenant J''. Je puis supposer que ρ_0 a été pris assez petit pour que

$$C_1 + \frac{\mu}{\rho_0} > 0.$$

Les inégalités $F > C_1$, ~~entraîne alors~~ $\rho < \rho_0$, entraînent alors $z > 0$. Nous devons donc intégrer par rapport à z entre les limites:

$$C_1 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2\omega \quad \text{et} \quad C_2 + \frac{\mu}{\rho} + \frac{3}{2} n'^2 \rho^2 \cos^2\omega$$

Il vient alors:

$$J'' = 2\pi (C_2 - C_1) \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\rho_0} \rho \, d\rho = 2\pi^2 \rho_0^2 (C_2 - C_1)$$

J'' et par conséquent J est donc fini.

C. Q. F. D

M. Bohlin a généralisé de la manière suivante le résultat de M. Hill. Considérons le cas particulier suivant du problème des trois corps. Soient A un corps de masse $1-\mu$, B un corps de masse μ et C un corps de masse infiniment petite. Imaginons que les deux corps A et B (dont le mouvement doit être Keplérien, puisqu'il n'est pas troublé par la masse de C,) décrivent autour de leur centre de gravité commun supposé fixe deux circonférences concentriques, et que C se meuve dans ~~je prendrai pour un~~ le plan de ces deux circonférences. Je prendrai pour unité de longueur la distance constante AB, de telle façon que les rayons de ces deux circonférences soient $1-\mu$ et μ. ~~J'appellerai~~ Je supposerai que l'unité de temps ait été choisie de telle sorte que la vitesse angulaire des deux points A et B sur leurs circonférences soit égale à 1 (ou ce qui revient au même que la constante de Gauss soit égale à 1.)

Choisissons alors deux axes mobiles ayant leur origine au centre de gravité des deux masses A et B; le premier de ces axes sera la droite AB, et le second sera perpendiculaire au premier.

Les coordonnées de A par rapport à ces deux axes sont $-\mu$ et 0; celles de B sont $1-\mu$ et 0; quant à celles de C je les appelle x et y; j'ai alors pour les équations du mouvement:

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = 2y' + \frac{dV}{dx} + x$$
$$\frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dy'}{dt} = -2x' + \frac{dV}{dy} + y$$

~~On a d'ailleurs~~ en posant

$$V = \frac{1-\mu}{AC} + \frac{\mu}{BC}$$

On a d'ailleurs:

$$\overline{AC}^2 = (x+\mu)^2 + y^2, \quad \overline{BC}^2 = (x+\mu-1)^2 + y^2$$

Ces équations admettent une intégrale:

$$F = \frac{x'^2+y'^2}{2} - V - \frac{x^2+y^2}{2} = \cancel{\text{const}}\ K$$

et un invariant intégral:

$$J = \int dx\, dy\, dx'\, dy'.$$

M. Bohlin dans le Tome 10 des Acta mathematica, a généralisé le résultat de M. Hill, en montrant que si la constante K a une valeur convenable (ce que nous supposerons) et si les valeurs initiales de x et de y ~~restent égales~~ sont assez petits, ces quantités x et y resteront limitées.

Je me propose maintenant de montrer que l'intégrale J étendue à tous les systèmes de valeurs tels que

$$K_1 < F < K_2$$

est finie, d'où nous pourrons conclure, comme nous l'avons fait plus haut que

la stabilité, au sens de Poisson subsiste encore dans ce cas.
~~Nous~~ Si les constantes K_1 et K_2 sont convenablement choisies, le théorème de M. Bohlin montre que x et y seront limités. Quant à x' et y' ils ne pourront devenir infinis que si V devient infini, c'est à dire si AC s'annule, ou si BC s'annule.
Posons alors:
$$J = J' + J'' + J''',$$
l'intégrale J' étant étendue à tous les ~~points~~ systèmes de valeurs tels que:
$$K_1 < F < K_2, \quad \overline{AC}^2 > \rho_0^2, \quad \overline{BC}^2 > \rho_0^2; \qquad (\rho_0 < \tfrac{1}{2})$$
l'intégrale J'' à tous les systèmes de valeurs tels que:
$$K_1 < F < K_2, \quad \overline{AC}^2 < \rho_0^2 \qquad (\text{d'où } \overline{BC}^2 > \rho_0^2),$$
et l'intégrale J''' à tous les systèmes de valeurs tels que:
$$K_1 < F < K_2, \quad \overline{BC}^2 < \rho_0^2. \qquad (\text{d'où } \overline{AC}^2 > \rho_0^2).$$
Comme pour aucun des systèmes de valeurs auxquels l'intégrale J' est étendue, AC ou BC ne s'annule, cette intégrale J' est finie.
Examinons maintenant l'intégrale J''. Je puis supposer que ρ_0 ait été choisi assez petit pour que
$$\frac{1-\mu}{\rho_0} + K_1 > 0 \qquad \frac{\mu}{\rho_0} + K_1 > 0$$
Dans ce cas $\frac{x'^2+y'^2}{2}$ peut varier entre les limites
$$L_1 = K_1 + \frac{1-\mu}{AC} + \frac{\mu}{BC} + \frac{x^2+y^2}{2} \quad \text{et} \quad K_2 + \frac{1-\mu}{AC} + \frac{\mu}{BC} + \frac{x^2+y^2}{2} = L_2$$
car la plus petite de ces deux limites est positive.
Posons alors; comme plus haut
$$x' = \sqrt{2z}\cos\varphi, \quad y' = \sqrt{2z}\sin\varphi, \quad \text{d'où } z = \frac{x'^2+y'^2}{2}$$
l'intégrale deviendra
$$J'' = \int dx\, dy\, dz\, d\varphi$$
et on devra intégrer par rapport à φ entre les limites 0 et 2π et par rapport à z entre les limites L_1 et L_2; il viendra donc:
$$J'' = 2\pi(K_2 - K_1)\int dx\, dy$$
l'intégrale double $\int dx\, dy$ devra être étendue à tous les systèmes de valeurs tels que $\overline{AC}^2 < \rho_0^2$; elle est donc égale à $\pi\rho_0^2$; de sorte qu'il vient
$$J'' = 2\pi^2\rho_0^2(K_2 - K_1)$$
J'' est donc fini, et il en est de même de J''' et de J.

C. Q. F. D.

Nous devons donc conclure que (si les conditions initiales du mouvement ne sont pas exceptionnelles au sens donné à ce mot dans le Corollaire du Théorème I) le ~~point~~ troisième corps C repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa position initiale.

Dans le cas général du problème des trois corps, on ne peut plus affirmer qu'il en sera encore de même.

(forts. sid 80)

Note 6.

Considérons alors une fonction quelconque de μ; je suppose que cette fonction tende vers 0 quand μ tend vers 0, de telle façon que le rapport de cette fonction à μ^n tende vers une limite finie, je dirai que cette fonction de μ est une quantité très petite du n^e ordre.

Il importe de remarquer qu'il n'est pas nécessaire que cette fonction de μ soit susceptible d'être développée suivant les puissances de μ.

Cela posé, ~~imaginons~~ soient A_0 et B_0 deux points d'une surface sans contact S, et soient A_1 et B_1 leurs conséquents; ~~je me propose de démontrer les lemmes suivants:~~ si la position de A_0 et B_0 dépend de μ suivant une loi quelconque il en sera de même de la position de A_1 et B_1

Lemme I. Si on envisage une portion de surface sans contact S, ~~et que l'on appelle~~ si a_0, b_0, c_0 passant par le point a_0, b_0, c_0; si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées d'un point de S et si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées ~~d'un point~~ de son conséquent, on pourra développer x_1, y_1, z_1 suivant les puissances de $x_0 - a_0$, $y_0 - b_0$, $z_0 - c_0$ et μ pourvu que ces quantités soient suffisamment petites.

Je puis toujours prendre pour origine le point a_0, b_0, c_0 de telle façon que

$$a_0 = b_0 = c_0 = 0$$

si alors

$$z = \varphi(x, y)$$

est l'équation de la surface S, cette surface passera par l'origine O et on aura:

$$z = \varphi(0,0) = 0.$$

Je supposerai de plus qu'en tous les points de la portion de surface S envisagée la fonction $\varphi(x, y)$ est holomorphe. (forts. de Nº 93)

~~Lemme II. Si la distance de deux points $A_0 B_0$ de la surface S est une quantité très petite~~

Note 7.

~~Lemme II Si la distance de deux points A_0 et B_0 de S est une quantité très petite du n^e ordre, il en sera de même de la distance de leurs conséquents A_1 et B_1~~

Les quantités F_1, F_2, etc. sont finies; si donc $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$ et $x_3 - y_3$ sont des quantités très petites d'ordre n, il en sera de même de $x'_1 - y'_1$, $x'_2 - y'_2$, $x'_3 - y'_3$

C. Q. F. D.

Théorème III. Soit $A_1 A M B_1 B$ une courbe invariante, de telle façon que A_1 et B_1 soient les conséquents de A et B.

A ~~Je suppose que les arcs AA_1 et BB_1 soient une courbe~~

Je suppose que les arcs AA_1 et BB_1 soient ~~infiniment~~ très petits ~~d'ordre~~ (et leur tout) (c'est à dire tendent vers 0 avec μ)

mais que leur courbure soit finie.

~~Je suppose qu'il existe un invariant intégral~~

Je suppose que cette courbe invariante et la position des points A et B dépendent de μ suivant une loi quelconque. Je suppose qu'il existe un invariant intégral positif.

Si la distance AB est très petite du n^e ordre et que la distance AA_1 ne soit pas très petite du n^e ordre l'arc AA_1 coupe l'arc BB_1.

(Faire insérer ici les figures)

~~(Reproduire ici les figures 1 et 2 de la page 41 du texte imprimé.)~~

Je puis toujours joindre les points A et B par un arc de courbe AB situé tout entier sur la portion de surface sans contact S et dont la longueur totale soit du même ordre de grandeur que la distance AB, c'est à dire une quantité très petite du n^e ordre. Soit A_1B_1 un arc de courbe qui soit le conséquent de AB, il sera aussi très petit du n^e ordre d'après le lemme II. Voici maintenant les divers ~~cas qui peuvent se présenter~~ hypothèses que l'on peut concevoir:

1ère ~~cas~~ hypothèse Les deux arcs AA_1 et BB_1 se coupent. Je me propose d'établir que c'est cette hypothèse qui est réalisée.

2e hypothèse, le ~~polygone~~ quadrilatère curviligne AA_1B_1B est ~~convexe~~ tel que les quatre arcs qui lui servent de côtés n'ont d'autre point commun que les quatre sommets A, A_1, B et B_1. C'est le cas de la figure 1.

3e hypothèse Les deux arcs AB et A_1B_1 se coupent. C'est le cas de la figure 2.

4e hypothèse. L'un des arcs AB ou A_1B_1 coupe l'un des arcs AA_1 ou BB_1; mais les arcs AA_1 et BB_1 ne se coupent pas, non plus que les deux arcs AB et A_1B_1.

S'il y a un invariant positif il existera ~~une certaine~~ d'après le § précédent, une certaine intégrale

$$\int MH\,d\omega$$

dont tous les éléments seront positifs et qui devra avoir la même valeur pour l'aire ABB_1MA et pour sa conséquente AA_1B_1MA.

Cette intégrale étendue à l'aire

$$ABA_1B_1 = AA_1B_1MA - ABB_1MA$$

doit donc être nulle et comme tous les éléments de l'intégrale sont positifs, la disposition ne peut être celle de la figure 1 où l'aire ABA_1B_1 est convexe.

La seconde hypothèse doit donc être rejetée.

La disposition ne peut non plus être celle de la figure 2.

En effet dans le triangle ADA_1, les ~~côtés~~ distances AD et A_1D sont très petites du n^e ordre car elles sont ~~et l'on a~~ plus petites que les arcs AD et A_1D, lesquels sont plus petits que les arcs AB et A_1B_1 qui sont du n^e ordre

$$\therefore\quad AA_1 < AD + A_1D.$$

La distance AA_1 devrait donc être une quantité très petite du n^e ordre, ce qui est contraire à l'énoncé du théorème.

La 3e hypothèse doit donc être rejetée.

Fig. 1.

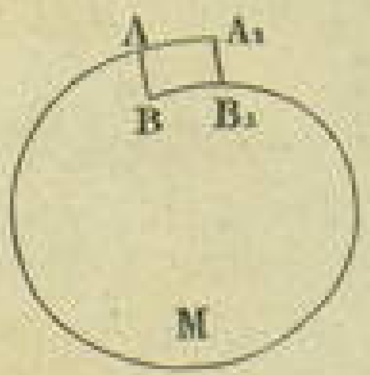
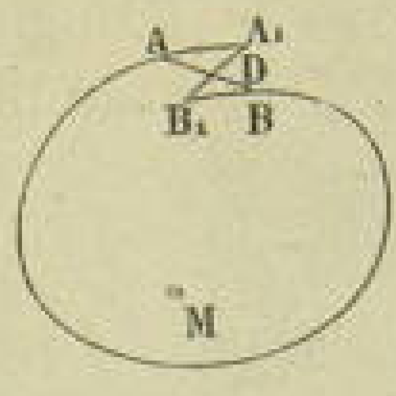


Fig. 2.



donc que les arcs AD et A_1D_1 se coupent
sposition soit celle de la figure 2.
osé, dans le triangle ADA_1, les côtés AD et
ordre. On a de plus:

$$AA_1 < AD + A_1D.$$

ent la distance AA_1 est une quantité très petit
st de même pour la même raison de la distan

Je dis que la 4e hypothèse ne peut non plus être acceptée. Supposons en effet par exemple que l'arc AB coupe l'arc AA_1 en un point A'. Soit ANA' la portion de l'arc AB qui ~~ff~~ va de A en A'; soit APA' la portion de l'arc AA_1 qui va de A en A'.

Je dis qu'on pourra remplacer l'arc ANA'B par l'arc APA'B; et que le nouvel arc APA'B sera comme l'arc primitif ANA'B une quantité très petite du n^e ordre.

En effet l'arc ANA' est plus petit que AB il est donc du n^e ordre; la distance AA' est donc elle-même du n^e ordre; l'arc APA' est plus petit que AA_1, qui ~~est très pet~~ tend vers est très petit, c'est à dire qui tend vers 0 avec μ; l'arc APA' est donc ~~in~~ très petit et sa courbure est finie; on peut donc assigner une limite au rapport de l'arc APA' à sa corde AA'; ce rapport est fini et AA' est du n^e ordre; donc APA' est du n^e ordre, c.q.f.d.

~~Le nouv~~ D'ailleurs le nouvel arc APA'B ne coupe plus l'arc AA_1, il a seulement avec lui une partie commune APA'.

On retombe donc sur la 2e hypothèse qui a déjà été rejetée.

La 1ère hypothèse est donc seule acceptable et le théorème est démontré.

Remarque.— Nous avons supposé dans l'énoncé du théorème que les arcs AA_1 et BB_1 ~~étaient~~ sont très petits et que leur courbure est finie. En réalité nous ne nous sommes servis de cette hypothèse que pour montrer que si la corde AA' est très petite du n^e ordre, il en est de même de l'arc APA'.

Le théorème sera donc encore vrai quand même l'arc AA_1 ne serait pas très petit et sa courbure finie, pourvu qu'on puisse assigner une limite supérieure au rapport d'un arc quelconque (faisant partie de AA_1 ou de BB_1) à sa corde. (foto. fol 97)

~~Mais il y a plus. Je me sers de ce fait que les arcs AB, ANA'B, APA'B sont très petits du n^e ordre; mais je m'en sers seulement pour établir que la distance AD est elle-même très petite du n^e ordre.~~

~~Le théorème sera donc encore vrai quand même les arcs AA_1 et BB_1 ne seront pas très petits et leur courbure finie, pourvu que si l'arc AA_1 (de même que BB_1) soit tel que A' A'' sont deux points quelconques de l'arc AA_1, dont la distance est très petite du n^e ordre; et C', C'' deux points situés sur ce même arc AA_1 entre A' et A'', la distance C'C'' soit aussi très petite du n^e ordre.~~

88.

93

les coordonnées des trois corps, r_{23}, r_{13}, r_{12} leurs distances mutuelles, m_1, m_2 et m_3 leurs masses. Les équations du problème seront de la forme suivante:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{m_2(x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_3 - x_1)}{r_{13}^3}.$$

Le second membre de cette équation ne pourrait cesser d'être holomorphe en $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ que si l'une des trois distances r_{23}, r_{13}, r_{12} venait à s'annuler, c'est à dire si deux corps venaient à se choquer. Or nous n'appliquerons jamais notre théorème que quand on sera certain qu'un pareil choc ne peut se produire.

Ce théorème joue un grand rôle dans le présent mémoire.

Dans le § 5 (1ère partie, chapitre III) nous démontrons que certaines solutions particulières du problème, que nous appelons solutions asymptotiques, sont de la forme suivante.

Les quantités inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peuvent pour des valeurs de t négatives et très grandes être développées suivant les puissances d'un certain paramètre $\sqrt{\mu}$ et d'une certaine exponentielle $e^{\alpha t}$, les coëfficients étant des fonctions périodiques de t.

Nous en concluons que si t_1 est une quantité négative suffisamment grande en valeur absolue, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peuvent être développées suivant les puissances de $t - t_1$ et de $\sqrt{\mu}$.

Si nous appliquons maintenant le théorème que nous venons de démontrer, nous verrons que, dans une solution asymptotique, les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, *pour toutes les valeurs de t*.

Ce même théorème peut servir également pour l'étude de ce que nous avons nommé le conséquent d'un point donné.

Soit:

$$z = \varphi(x, y)$$

~~l'équation d'une surface S que nous supposerons passer par l'origine~~ O.

O Par l'origine O passe une trajectoire; imaginons que quand $\mu = 0$ cette trajectoire vienne au temps $t = \tau$ recouper la surface S en un point P dont les coordonnées seront:

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c.$$

→ III ←

94

D'après la terminologie que nous avons adopté, le point P sera *quand on suppose* $\mu = 0$ le conséquent du point O.

Supposons de plus que dans le voisinage du point O, $\varphi(x, y)$ soit développable suivant les puissances de x et y, et dans le voisinage du point P suivant les puissances de $x - a$ et $y - b$.

Soit maintenant x_0, y_0, z_0 un point A très voisin de O et appartenant à la surface S. Si l'on fait passer par ce point A une trajectoire, si on suppose que μ cesse d'être nul, mais reste très petit, on verra que cette trajectoire viendra, à une époque t très peu différente de τ couper la surface S en un point B très voisin de P.

Ce point B dont j'appellerai les coordonnées x_1, y_1, z_1 sera d'après notre terminologie le conséquent du point A.

Ce que je me propose de démontrer, c'est que x_1, y_1, z_1 peuvent se développer suivant les puissances croissantes de x_0, y_0, z_0 et μ.

H III § 2

En effet, d'après le théorème ~~que nous venons d'établir~~, si x, y, z sont les coordonnées au temps t du point mobile qui décrit la trajectoire issue du point A, si de plus x_0, y_0, z_0, μ et $t - \tau$ sont suffisamment petits, on aura:

$$
\begin{aligned}
x &= \phi_1(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0),\\
y &= \phi_2(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0),\\
z &= \phi_3(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 étant des séries ordonnées suivant les puissances de $t - \tau$, μ, x_0, y_0, z_0.

Ces séries se réduiront respectivement à a, b, c pour

$$t - \tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0.$$

Comme $\varphi(x, y)$ est développable suivant les puissances de $x - a$ et $y - b$, si $x - a$ et $y - b$ sont assez petits, nous aurons également:

$$\varphi(x, y) = \phi_4(t - \tau, \mu, x_0, y_0, z_0),$$

ϕ_4 étant une série de même forme que ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3.

Ecrivons que le point x, y, z se trouve sur la surface S, nous aurons:

$$\phi_3 = \phi_4. \tag{5}$$

95

La relation (5) peut être regardée comme une équation entre $t - \tau$, μ, x_0, y_0 et z_0 et on peut chercher à la résoudre par rapport à $t - \tau$.

Pour:

$$t - \tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

cette relation est satisfaite, car on a

$$\psi_3 = \psi_4 = 0.$$

D'après un théorème de CAUCHY, sur lequel nous allons d'ailleurs revenir dans un instant, on pourra tirer de la relation (5) $t - \tau$ sous la forme suivante:

$$t - \tau = \theta(\mu, x_0, y_0, z_0), \tag{6}$$

θ étant une série ordonnée suivant les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0.

Il n'y aurait d'exception que si pour

$$t - \tau = \mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

on avait

$$\frac{d\psi_3}{dt} = \frac{d\psi_4}{dt}.$$

Or cette équation exprime que la trajectoire issue du point O pour $\mu = 0$ va *toucher* la surface S au point P.

Mais il n'en sera pas ainsi, parce que nous supposerons toujours que S est une surface ou une portion de surface sans contact.

Dans les équations (4) remplaçons $t - \tau$ par θ et x, y, z par x_1, y_1, z_1; il viendra:

$$x_1 = \theta_1(\mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$y_1 = \theta_2(\mu, x_0, y_0, z_0),$$
$$z_1 = \theta_3(\mu, x_0, y_0, z_0),$$

θ_1, θ_2 et θ_3 étant des séries développées selon les puissances de μ, x_0, y_0 et z_0.

C. Q. F. D.

~~C'est de ce résultat (qui, malgré la longueur de la démonstration que nous venons d'en donner, est presque évident) que nous avons fait~~

96

~~Quelle est la distance de ces points A et B? La valeur de φ correspondant à ces deux points est la même; la valeur de ω est la même à un multiple près de 2π. La distance AB sera donc du même ordre de grandeur que la différence des valeurs de ρ qui correspondent aux deux points A et B. Or cette différence est égale à:~~

$$\cancel{e^{t}(e^{2\pi\mu\sqrt{-1}} - 1).}$$

~~Si donc μ est comme nous le supposons un paramètre très petit, cette différence et par conséquent la distance AB est une quantité très petite d'ordre $n - 1$. La courbe C est alors une courbe quasi-fermée dont les points A et B sont les points de fermeture.~~

~~Ainsi si une courbe qui dépend de μ est quasi-fermée, cela veut dire qu'elle est fermée pour $\mu = 0$.~~

LII *Lemme*. Si la distance de deux points A_0 et B_0 appartenant à la portion de surface sans contact S est une quantité très petite d'ordre n, il en sera de même de la distance de leurs conséquents A_1 et B_1.

Soient en effet a_1, a_2, a_3 les coordonnées d'un point fixe P_0 de S très voisin de A_0 et de B_0; a'_1, a'_2, a'_3 les coordonnées de son conséquent P_1.

Soient $x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3; y_1, y_2, y_3; y'_1, y'_2, y'_3$ les coordonnées de A_0, A_1, B_0 et B_1. ~~Il est clair que x'_1, x'_2 et x'_3 seront des fonctions holomorphes de x_1, x_2 et x_3.~~ H rj

H rj
H D'après le lemme I

~~Donc~~ $x'_1 - a'_1, x'_2 - a'_2, x'_3 - a'_3$ peuvent se développer selon les puissances croissantes de $x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3$ et μ. ~~J'introduis μ parce que les équations différentielles dépendant de μ, il doit en être de même de la relation qui lie un point à son conséquent.~~ H rj

L'expression de $y'_1 - a'_1, y'_2 - a'_2, y'_3 - a'_3$ en fonctions de $y_1 - a_1$, $y_2 - a_2, y_3 - a_3$ et μ sera évidemment la même que celle de $x'_1 - a'_1$, $x'_2 - a'_2, x'_3 - a'_3$ en fonctions de $x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3$ et μ.

On déduit de là que l'on peut écrire:

$$
\begin{aligned}
x'_1 - y'_1 &= (x_1 - y_1)F_1 + (x_2 - y_2)F_2 + (x_3 - y_3)F_3, \\
(1) \qquad x'_2 - y'_2 &= (x_1 - y_1)F'_1 + (x_2 - y_2)F'_2 + (x_3 - y_3)F'_3, \\
x'_3 - y'_3 &= (x_1 - y_1)F''_1 + (x_2 - y_2)F''_2 + (x_3 - y_3)F''_3,
\end{aligned}
$$

les F étant des séries développées suivant les puissances de:

$$\mu, x_1 - a_1, x_2 - a_2, x_3 - a_3, y_1 - a_1, y_2 - a_2, y_3 - a_3.$$

~~[1] Voir *Note E.*~~

forts. rd 90

89.

97

~~contact S simplement connexe et que k_n soit sa n^e conséquente; si l'on peut joindre chacun des points de k à son n^e conséquent par des arcs de courbe situés sur S et de telle façon que deux quelconques de ces arcs n'aient aucun point commun; si de plus il y a un invariant intégral positif, deux au moins des points de k coïncideront avec leurs n^{es} conséquents.~~

CHAPITRE III.

Théorie des solutions périodiques.

§ 9. *Existence des solutions périodiques.*

Considérons un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

où les X sont des fonctions des x et d'un paramètre μ. Les X devront aussi dépendre de t, mais ce seront alors des fonctions périodiques de ~~cette~~ variable et la période sera 2π.

89.89 Supposons que pour la valeur 0 du paramètre μ, ces équations admettent une solution périodique, de telle sorte que

$$x_i = \varphi_i(t),$$

φ_i étant une fonction périodique du temps dont la période sera par exemple 2π.

Posons:

$$x_i = \varphi_i + \xi_i$$

et cherchons pour les valeurs très petites de μ à trouver les valeurs des ξ que nous supposerons également très petites, il viendra

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \mu\frac{dX_i}{d\mu} + \sum_k \xi_k \frac{dX_i}{dx_k}.$$

qui a la même valeur pour α et pour α_n et qui est telle que

$$MH\varphi > 0.$$

Soient ρ_0 et θ_0 les coordonnées d'un point quelconque de k, ρ_n et $\theta_n = \theta_0$ celles de son n^e conséquent qui appartient par définition à k_n.

Soit

$$X = \int_{\rho_0}^{\rho_n} MH\varphi d\rho.$$

(Dans le calcul de l'intégrale X, on doit regarder θ comme une constante égale à θ_0.)

La quantité sous le signe $\int$ étant positive, l'intégrale X est positive si $\rho_n > \rho_0$ et négative si $\rho_n < \rho_0$; elle ne peut s'annuler que si $\rho_n = \rho_0$.

D'ailleurs d'après la définition de X, cette intégrale est une fonction de θ_0.

Soient J_0 et J_n les valeurs de l'intégrale J étendues respectivement à l'aire α et à l'aire α_n. On aura d'après la définition même des intégrales doubles:

$$J_n - J_0 = \int_0^{2\pi} X d\theta_0.$$

L'intégrale du second membre devra être prise tout le long de la courbe k. Quand on aura fait tout le tour de cette courbe fermée, la fonction X devra être revenue à sa valeur initiale.

Mais J étant un invariant, $J_n - J_0$ doit être nul. X ne peut donc être toujours de même signe et comme cette quantité a même valeur aux deux limites d'intégration, il faut que X s'annule deux fois entre ces deux limites.

Or quand X est nul, $\rho_0 = \rho_n$ et le point correspondant de k coïncide avec son n^e conséquent.

Donc deux au moins des points de k coïncident avec leurs n^{es} conséquents.

C. Q. F. D.

On peut énoncer le théorème IV sans faire intervenir le système particulier de coordonnées que nous avons défini plus haut et dire:

Si une courbe fermée k fait partie d'une portion de surface sans

98

Dans les dérivées partielles des X les x_i sont remplacés par les fonctions périodiques φ_i. Les ξ sont ainsi déterminés par des équations linéaires à second membre dont les coefficients sont des fonctions périodiques.

Deux cas peuvent se présenter.

1°. Les équations sans second membre:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum \xi_k \frac{dX_i}{dx_k} \tag{2}$$

n'admettent pas de solution périodique de période 2π.

Dans ce cas les équations à second membre en admettent une que j'écrirai:

$$\xi_i = \mu\psi_i(t),$$

ψ étant une fonction périodique de période 2π.

2°. Les équations sans second membre admettent une solution périodique de période 2π.

Alors les équations à second membre peuvent ne pas avoir de solution périodique, de telle façon qu'en général nous trouverons une solution de la forme suivante:

$$\xi_i = \mu t\psi_{1.i}(t) + \mu\psi_{0.i}(t),$$

les ψ étant toujours des fonctions périodiques, ou même dans certains cas

$$\xi_i = \mu[t^n\psi_{n.i}(t) + t^{n-1}\psi_{n-1.i}(t) + \ldots + \psi_{0.i}(t)].$$

Plaçons-nous dans le premier cas et voyons la chose de plus près.

Cherchons à former une solution périodique et à la développer suivant les puissances de μ; posons par conséquent:

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1.i} + \mu^2\varphi_{2.i} + \ldots.$$

Quand on substituera à la place des x_i ces valeurs dans les X_i, on trouvera

$$X_i = X_{0.i} + \mu X_{1.i} + \mu^2 X_{2.i} + \ldots.$$

Il est clair que les $X_{0.i}$ ne dépendent que des φ_i, les $X_{1.i}$ des φ_i et des $\varphi_{1.i}$, les $X_{2.i}$ des $\varphi_{1.i}$ et des $\varphi_{2.i}$ etc. De plus si les $\varphi_{n.i}$ sont des fonctions périodiques de t de période 2π, il en sera de même des $X_{n.i}$.

99

Nous avons de plus

$$X_{n.i} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k} \varphi_{n.k} + Y_{n.i}.$$

Dans le second membre, dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, on doit substituer les φ_i à la place des x_i ainsi que nous l'avons fait plus haut. De plus $Y_{n.i}$ ne dépendra que des φ_i, des $\varphi_{1.i}$, des $\varphi_{2.i}, \ldots$, des $\varphi_{n-1.i}$; mais ne dépendra plus des $\varphi_{n.i}$.

Cela posé on est conduit aux équations suivantes

$$\frac{d\varphi_{n.i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k} \varphi_{n.k} + Y_{n.i}. \tag{3}$$

Supposons qu'on ait déterminé les quantités

$$\varphi_{1.i}, \varphi_{2.i}, \ldots, \varphi_{n-1.i}$$

à l'aide des équations précédentes sous forme de fonctions périodiques de t; on pourra ensuite à l'aide des équations (3) déterminer les $\varphi_{n.i}$.

Ces équations (3) sont des équations linéaires à second membre et les coëfficients sont périodiques.

Par hypothèse les équations sans second membre

$$\frac{d\varphi_{n.i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k} \varphi_{n.k},$$

qui ne sont autres que les équations (2), n'ont pas de solution périodique; donc les équations (3) en admettent une.

Il résulte de là qu'il existe des séries

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1.i} + \mu^2\varphi_{2.i} + \ldots$$

dont les coëfficients sont périodiques et qui satisfont formellement aux équations (1).

Il resterait à démontrer la convergence de ces séries. Nul doute que cette démonstration ne puisse se faire directement; je ne le ferai pas toutefois, car je vais, en reprenant la question à un point de vue différent, démontrer rigoureusement l'existence des solutions périodiques,

100

ce qui entraîne la convergence de nos séries. Nous n'aurons en effet qu'à nous appuyer sur les principes les plus connus du »~~C~~ calcul des ~~L~~ limites.»

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$. Soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = 2\pi$. Les γ_i dépendront évidemment de μ et des valeurs initiales des variables et elles s'annuleront avec elles.

Cela me permet d'écrire:

$$\gamma_i = \beta_i + a_i\mu + \Sigma b_{ik}\beta_k + \Sigma\,[m\,,\,p_1\,,\,p_2\,,\,\ldots\,,\,p_n]\,\mu^m \beta_1^{p_1}\beta_2^{p_2}\ldots\beta_n^{p_n}$$

$$= \beta_i + \psi_i,$$

les a, les b et les $[m\,,\,p_1\,,\,p_2\,,\,\ldots\,,\,p_n]$ étant des coefficients constants.

On obtiendra les solutions périodiques de période 2π en cherchant les cas où:

$$\gamma_i = \beta_i.$$

On peut donc considérer μ comme une donnée de la question et chercher à résoudre par rapport aux n inconnues β les équations

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0. \tag{4}$$

Nous savons que les ψ sont des fonctions holomorphes de μ et des β s'annulant avec les variables. (Voir Théorème III ~~chap~~ §2)

Si le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β (c'est à dire le déterminant des b_{ik}) n'est pas nul, on peut résoudre ces n équations et on trouve comme solution:

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

les θ_i étant, d'après un théorème bien connu, des fonctions holomorphes de μ s'annulant avec μ. (Voir Théorème IV ~~chap~~ §2)

C'est le cas que nous avons étudié plus haut et où les équations (2) n'ont pas de solution périodique.

On doit en conclure que pour les valeurs de μ suffisamment petites, les équations (1) admettent une solution périodique.

~~Mais il peut arriver que, bien que le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β soit nul, les équations (4) puissent néanmoins être résolues et par conséquent que les équations (1) admettent une solution~~

périodique pour les petites valeurs de μ. Il en sera ainsi en général quand les déterminants compris dans la matrice

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{d\psi_1}{d\mu} & \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \dots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\psi_2}{d\mu} & \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \dots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\psi_n}{d\mu} & \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \dots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} \end{array} \right\|$$

seront tous nuls.

Supposons donc que les équations (1) admettent une solution périodique pour $\mu = 0$ et pour les valeurs de μ suffisamment petites, plus petites par exemple que μ_0, et qu'elles n'en admettent plus pour $\mu > \mu_0$. De quelle façon la solution périodique disparaîtra-t-elle au moment où μ atteindra la valeur μ_0? On pourrait démontrer que les choses se passent comme il suit.

Pour $\mu = \mu_0 - \varepsilon$, les équations (1) admettent *deux* solutions périodiques; pour $\mu = \mu_0$, ces deux solutions se confondent en une seule et enfin pour $\mu > \mu_0$, ces deux solutions disparaissent.

Pour le faire voir, reprenons les équations (4):

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_n = 0 \tag{4}$$

et supposons que le déterminant fonctionnel des ψ s'annule quand les β et le paramètre μ sont nuls à la fois. Il est alors impossible, du moins en général, de tirer des équations les β_i sous la forme:

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

les θ_i étant des fonctions holomorphes de μ s'annulant avec cette variable. Mais il sera possible en général de tirer des $n - 1$ premières équations (4)

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_{n-1} = 0$$

les $n - 1$ quantités $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$; on trouvera:

$$\beta_i = H_i(\beta_n, \mu), \qquad (i=1,2,\dots,n-1)$$

~~Note 6~~

~~Nous étudierons en particulier les courbes invariantes fermées. On peut en distinguer deux sortes; on peut supposer d'abord que chaque l'on a une courbe invariante fermée C et que tous les conséquents d'un point quelconque de cette courbe se trouve encore sur cette courbe. Les trajectoires issues des divers points de la courbe C engendrent alors une surface trajectoire fermée.~~

~~Mais nous pouvons~~

Note 8.

Supposons maintenant que le déterminant fonctionnel des φ soit nul; nous pourrons alors, en vertu du Théorème VI ~~chapitre I~~ §2, éliminer entre les équations (4) $\beta_1, \beta_2, \dots$ ~~$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi$~~ $\dots \beta_{n-1}$; nous arriverions ainsi à une équation unique

$$\Phi = 0$$

dont le premier membre sera développé suivant les puissances de μ et de β_n.

Il n'y aurait d'exception que si les équations (4) n'étaient pas distinctes, mais dans ce cas nous leur adjoindrions une autre équation choisie arbitrairement.

Si l'on regarde μ et β_n comme les coordonnées d'un point dans un plan, l'équation $\Phi = 0$ représente une courbe passant par l'origine. A chacun des points de cette courbe correspondra une solution périodique, de sorte que pour étudier les solutions périodiques qui correspondent aux petites valeurs de μ et des β, il nous suffira de construire la partie de cette courbe qui avoisine l'origine.

Si le déterminant fonctionnel des φ est nul on aura ~~on aura~~, (pour $\mu = \beta_n = 0$):

$$\frac{d\Phi}{d\beta_n} = 0.$$

En d'autres termes, la courbe $\Phi = 0$ sera tangente à l'origine à la droite $\mu = 0$, ou bien encore pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi = 0$ sera une équation en β_n qui admettra 0 comme racine multiple; j'appelle m l'ordre de multiplicité de cette racine.

En vertu du Théorème ~~(5)~~ V ~~chapitre I~~ §2 on pourra trouver m séries développées suivant les puissances ~~croissantes~~ fractionnaires et positives de μ, s'annulant avec μ et qui substituées à la place de β_n satisfassent à l'équation $\Phi = 0$.

Considérons l'intersection de la courbe $\Phi = 0$ ou plutôt de la portion de cette courbe qui avoisine l'origine avec deux droites $\mu = \varepsilon$, $\mu = -\varepsilon$ très voisines de la droite $\mu = 0$. On obtiendra les points ~~réels~~ d'intersection en faisant $\mu = \varepsilon$, puis $\mu = -\varepsilon$ dans les m séries dont je viens de parler.

Soit m_1 le nombre des points d'intersection de $\Phi = 0$ et $\mu = +\varepsilon$ réels et voisins de l'origine. Soit m_2 le nombre des points d'intersection de $\Phi = 0$ et $\mu = -\varepsilon$ réels et voisins de l'origine.

~~si l'on~~ Les trois nombres m, m_1 et m_2 seront de même parité.
Si donc m est impair, m_1 et m_2 seront au moins égaux à 1. Donc il existera des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ, tant positives que négatives.

Comment une solution périodique peut-elle disparaître quand on fait varier μ d'une manière continue? Comment peut-il se faire que le nombre des solutions pour $\mu = +\varepsilon$ soit plus petit que pour $\mu = -\varepsilon$, que $m_1 < m_2$?

J'observe d'abord qu'une solution périodique ne peut disparaître quand μ passe de la valeur $-\varepsilon$ à la valeur $+\varepsilon$ que si pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi = 0$ admet une racine multiple; ~~par conséquent~~ en d'autres termes une solution périodique ne peut disparaître qu'après s'être confondue avec une autre solution périodique.

De plus m_1 et m_2 étant de même parité, la différence $m_2 - m_1$ est toujours paire.

Donc les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques.

Un cas particulier intéressant est celui où pour $\mu = 0$, les équations différentielles (1) admettent une infinité de solutions périodiques que j'écrirai:
$x_1 = \varphi_1(t, h)$, $x_2 = \varphi_2(t, h)$, ——, $x_n = \varphi_n(t, h)$, h étant une constante arbitraire.
Dans ce cas les équations (4) ne sont plus distinctes pour $\mu = 0$ et Φ contient μ en facteur de sorte que nous pouvons poser:

$$\Phi = \mu \Phi_1$$

(d'ailleurs Φ_1 dépendra aussi de h.)

Φ_1 étant holomorphe en β_n et μ; La courbe $\Phi = 0$ se décompose alors en deux autres, à savoir la droite $\mu = 0$, ~~$\Phi_1 = 0$~~ et la courbe $\Phi_1 = 0$; c'est cette dernière courbe qu'il convient d'étudier.

La courbe $\Phi = 0$ passe ~~toujours~~ forcément par l'origine; il n'en est pas toujours de même de $\Phi_1 = 0$; il faudra d'abord s'arranger pour l'y faire passer, en ~~choisissant~~ disposant convenablement de h ~~les arbitraires dont on dispose~~. Une fois qu'~~elle y aura~~ on l'y aura fait passer, on l'étudiera comme on a fait de la courbe $\Phi = 0$.

Si pour $\mu = \beta_n = 0$, $\frac{d\Phi_1}{d\beta_n}$ n'est pas nul, (ou ~~si pas~~ plus généralement si pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi_1 = 0$, admet $\beta_n = 0$ comme racine multiple d'ordre impair.) il y aura encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ.

Il arrivera souvent que, même avant l'élimination, quelques-unes des fonctions φ_i contiennent μ en facteur. Dans ce cas on commencerait par diviser par μ les équations correspondantes.

Si les équations (1) admettent une intégrale uniforme:

§ 9. 103 21

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

les équations (4) ne seront pas distinctes à moins que l'on n'ait à la fois

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

pour

$$x_1 = \varphi_1(0), \quad x_2 = \varphi_2(0), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(0).$$

En effet il viendra identiquement:

$$F[\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i] = F[\varphi_i(0) + \beta_i]$$

Si par exemple pour $x_i = \varphi_i(0)$, $\frac{dF}{dx_1}$ n'est pas nul, on pourra tirer de cette équation:

$$\psi_1 = \psi_2 \Theta_2 + \psi_3 \Theta_3 + \ldots + \psi_n \Theta_n$$

$\Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_n$ étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes des

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_n$$

La première des équations (4) est donc alors une conséquence des $n-1$ dernières. On la supprimera alors pour la remplacer par une autre équation choisie arbitrairement.

104

89.

Alors l'équation:

$$\Phi_1 = 0$$

pourra être résolue par rapport à β_n puisque pour

$$\mu = 0, \qquad \beta_n = \beta_n^0$$

on a

$$\Phi_1 = 0, \qquad \frac{d\Phi_1}{d\beta_n} \gtrless 0.$$

On obtient ainsi:

$$\beta_n = \theta_n(\mu),$$

θ_n étant holomorphe en μ. En remplaçant β_n par θ_n dans les H_i, on trouve:

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

θ_i étant holomorphe.

L'existence d'une solution périodique pour les petites valeurs de μ est donc établie. De plus pour une pareille solution périodique, le déterminant fonctionnel des ϕ par rapport aux β n'est pas nul si μ est suffisamment petit sans être nul.

3°. Ou bien l'équation $\Phi_1^0 = 0$ n'a que des racines multiples et alors nous ne pouvons rien affirmer.

Si toutefois cette équation a une racine triple, ou plus généralement une racine d'ordre impair, nous pourrions affirmer que pour les petites valeurs de μ, il existe une solution périodique, mais nous ne saurions plus si le déterminant fonctionnel correspondant n'est pas nul.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui entrent dans les équations différentielles (1) dépendent du temps t. Les résultats seraient modifiés si le temps t n'entre pas dans ces équations.

Il y a d'abord entre les deux cas une différence qu'il est impossible de ne pas apercevoir. Nous avions supposé dans ce qui précède que les X_i étaient des fonctions périodiques du temps et que la période était 2π; il en résultait que, si les équations admettaient une solution périodique, la période de cette solution devait être égale à 2π ou à un multiple de 2π. Si au contraire les X_i sont indépendants de t, la période d'une solution périodique peut être quelconque.

n'est pas nul. On pourra donc résoudre nos $n-1$ équations par rapport aux $n-1$ quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$.

On trouvera:

$$\beta_i = H_i(\beta_n, \mu), \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

les H étant des fonctions holomorphes de β_n et de μ s'annulant avec ces variables.

Substituons H_i à la place de β_i dans la n^e équation (4)

$$\psi_n = 0.$$

Nous obtiendrons une équation:

$$\Phi = 0$$

dont le premier membre sera une fonction holomorphe de μ et de β_n. Cette fonction holomorphe doit contenir μ en facteur. En effet, pour $\mu = 0$, les n équations (4) se réduisent à $n-1$ d'entre elles et par conséquent l'équation $\Phi = 0$ doit devenir identique.

Posons donc

$$\Phi = \mu \Phi_1,$$

Φ_1 sera encore holomorphe. Appelons Φ_1^0 ce que devient Φ_1 quand on y fait $\mu = 0$ et envisageons l'équation:

$$\Phi_1^0 = 0$$

dont le premier membre est une fonction holomorphe de β_n seulement. Trois cas peuvent se présenter:

1°. Ou bien cette équation n'admet aucune racine; on peut en conclure que pour les petites valeurs de μ les équations (1) n'ont pas de solution périodique de période 2π.

2°. Ou bien cette équation admet une ou plusieurs racines simples. Dans ce cas les équations (1) ont des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ.

En effet supposons que pour:

$$\beta_n = \beta_n^0$$

on ait:

$$\Phi_1^0 = 0, \qquad \frac{d\Phi_1^0}{d\beta_n} \gtrless 0.$$

105

59.

En second lieu, si les équations (1) admettent une solution périodique (et si les X ne dépendent pas de t), elles en admettent une infinité.

Si en effet

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

est une solution périodique des équations (1), il en sera de même (quelle que soit la constante h) de

$$x_1 = \varphi_1(t+h), \quad x_2 = \varphi_2(t+h), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t+h).$$

Ainsi le cas sur lequel nous nous sommes étendus d'abord et dans lequel pour $\mu = 0$, les équations (1) admettent une solution périodique et une seule, ne peut se présenter si les X ne dépendent pas de t.

Plaçons-nous donc dans le cas où le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) et supposons que pour $\mu = 0$, ces équations admettent une solution périodique de période T:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t).$$

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$; soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = T + \tau$. Posons ensuite, comme nous l'avons fait plus haut,

$$\gamma_i - \beta_i = \psi_i.$$

Les ψ_i seront des fonctions holomorphes de μ, de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ et de τ s'annulant avec ces variables.

Nous avons donc à résoudre par rapport aux $n+1$ inconnues

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \tau$$

les n équations

$$(5) \qquad \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0.$$

Nous avons une inconnue de trop, nous pouvons donc poser arbitrairement par exemple

$$\beta_n = 0.$$

Nous tirerons ensuite des équations (5), $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ et τ en fonctions

106

59.

holomorphes de μ s'annulant avec μ. Cela est possible à moins que le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{vmatrix}$$

ne soit nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$.

Si ce déterminant était nul, au lieu de poser arbitrairement $\beta_n = 0$, on poserait par exemple $\beta_i = 0$, et la méthode ne serait en défaut que si tous les déterminants contenus dans la matrice:

$$\left\Vert \begin{matrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{matrix} \right\Vert$$

étaient nuls à la fois. (Il est à remarquer que le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne de cette matrice est toujours nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$.)

Comme en général tous ces déterminants ne seront pas nuls à la fois, les équations (1) admettront pour les petites valeurs de μ, une solution périodique de période $T + \tau$.

§ 10. *Exposants caractéristiques.*

97

Reprenons les équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \tag{1}$$

107

et imaginons qu'elles admettent une solution périodique

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Formons les équations aux variations (voir Chapitre I) des équations (1) en posant:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$$

et négligeant les carrés des ξ.

Ces équations aux variations s'écriront:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2}\xi_2 + \dots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n. \tag{2}$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux ξ, et leurs coëfficients $\frac{dX_i}{dx_k}$, (quand on y a remplacé x_i par $\varphi_i(t)$) sont des fonctions périodiques de t. Nous avons donc à intégrer des équations linéaires à coëfficients périodiques.

On sait quelle est en général la forme des intégrales de ces équations; on obtient n intégrales particulières de la forme suivante:

$$\begin{array}{llll}
\xi_1 = e^{\alpha_1 t}S_{11}, & \xi_2 = e^{\alpha_1 t}S_{21}, & \dots, & \xi_n = e^{\alpha_1 t}S_{n1}, \\
\xi_1 = e^{\alpha_2 t}S_{12}, & \xi_2 = e^{\alpha_2 t}S_{22}, & \dots, & \xi_n = e^{\alpha_2 t}S_{n2}, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\xi_1 = e^{\alpha_n t}S_{1n}, & \xi_2 = e^{\alpha_n t}S_{2n}, & \dots, & \xi_n = e^{\alpha_n t}S_{nn},
\end{array} \tag{3}$$

les α étant des constantes et les S_{ik} des fonctions périodiques de t de même période que les $\varphi_i(t)$.

Les constantes α s'appellent les *exposants caractéristiques* de la solution périodique.

Si α est purement imaginaire de façon que son carré soit négatif, le module de $e^{\alpha t}$ est constant et égal à 1. Si au contraire α est réel, ou si α est complexe de telle façon que son carré ne soit pas réel, le module $e^{\alpha t}$ tend vers l'infini pour $t = +\infty$ ou pour $t = -\infty$. Si donc tous les α ont leurs carrés réels et négatifs, les quantités $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ resteront finies; je dirai alors que la solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$ est stable; dans le cas contraire, je dirai que cette solution est instable.

108

Un cas particulier intéressant est celui où deux ou plusieurs des exposants caractéristiques α sont égaux entre eux. Dans ce cas les intégrales des équations (2) ne peuvent plus se mettre sous la forme (3). Si par exemple

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

les équations (2) admettraient deux intégrales particulières qui s'écriraient

$$\xi_i = e^{\alpha_1 t} S_{i.1}$$

et

$$\xi_i = te^{\alpha_1 t} S_{i.1} + e^{\alpha_1 t} S_{i.2},$$

les $S_{i.1}$ et les $S_{i.2}$ étant des fonctions périodiques de t.

Si trois des exposants caractéristiques étaient égaux entre eux, on verrait apparaître, non seulement t, mais encore t^2 en dehors des signes trigonométriques et exponentiels.

Supposons que le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) de telle sorte que les fonctions X_i ne dépendent pas de cette variable; supposons de plus que ces équations (1) admettent une intégrale

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C. \tag{4}$$

Il est aisé de voir que dans ce cas deux des exposants caractéristiques sont nuls.

On se trouve donc alors dans le cas d'exception que nous venons de signaler; mais il n'en résulte pas de difficulté; il est aisé en effet à l'aide de l'intégrale (4) d'abaisser d'une unité l'ordre des équations (1). Il n'y a plus alors que $n - 1$ exposants caractéristiques et il n'y en a plus qu'un qui soit nul.

Nous allons maintenant envisager un cas particulier qui est celui où les équations (1) ont la forme des équations de la dynamique. Ecrivons-les donc sous la forme:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)} \tag{1'}$$

F étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$; nous pourrons supposer, soit que F est indépendant de t; soit que F dépend

109

non seulement des x et des y, mais encore de t, et que par rapport à cette dernière variable, c'est une fonction périodique de période 2π.

Supposons que les équations (1') admettent une solution périodique de période 2π:

$$x_i = \varphi_i(t), \qquad y_i = \psi_i(t),$$

et formons les équations aux variations en posant:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \qquad y_i = \psi_i(t) + \eta_i.$$

Nous avons vu dans le chapitre II que l'intégrale double:

$$\iint (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2 + \ldots + dx_n dy_n)$$

est un invariant intégral, ou (ce qui revient au même) que si ξ_i, η_i et ξ'_i, η'_i sont deux solutions particulières quelconques des équations aux variations, on a

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i \eta'_i - \xi'_i \eta_i) = \text{const.}$$

Je dis qu'il en résulte que les exposants caractéristiques sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Soient en effet ξ_i^0 et η_i^0 les valeurs initiales de ξ_i et de η_i pour $t = 0$ dans une des équations aux variations; soient ξ_i^1 et η_i^1 les valeurs correspondantes de ξ_i et de η_i pour $t = 2\pi$. Il est clair que les ξ_i^1 et les η_i^1 seront des fonctions linéaires des ξ_i^0 et des η_i^0 de telle sorte que la substitution:

$$T = (\xi_i^0, \eta_i^0; \xi_i^1, \eta_i^1)$$

sera une substitution linéaire.

Soit:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1.2n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2.2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n.1} & a_{2n.2} & \ldots & a_{2n.2n} \end{vmatrix}$$

le tableau des coëfficients de cette substitution linéaire.

110

Formons l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1.2n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2.2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n.1} & a_{2n.2} & \dots & a_{2n.2n}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Les $2n$ racines de cette équation seront ce qu'on appelle les $2n$ multiplicateurs de la substitution linéaire T. Mais cette substitution linéaire T ne peut pas être quelconque. Il faut qu'elle n'altère pas la forme bilinéaire:

$$\sum(\xi_i\eta_i' - \xi_i'\eta_i).$$

Pour cela, l'équation en λ doit être réciproque. Si donc on pose:

$$\lambda = e^{2\alpha\pi},$$

les quantités α devront être deux à deux égales et de signe contraire.

C. Q. F. D.

Il y aura donc en général n quantités α^2 distinctes. Nous les appellerons les *coefficients de stabilité* de la solution périodique considérée.

Si ces n coefficients sont tous réels et négatifs, la solution périodique sera stable, car les quantités ξ_i et η_i resteront inférieures à une limite donnée.

Il ne faut pas toutefois entendre ce mot de stabilité au sens absolu. En effet, nous avons négligé les carrés des ξ et des η et rien ne prouve qu'en tenant compte de ces carrés, le résultat ne serait pas changé. Mais nous pouvons dire au moins que les ξ et η, s'ils sont originairement très petits resteront très petits pendant très longtemps. Nous pouvons exprimer ce fait en disant que la solution périodique jouit, sinon de la stabilité *séculaire,* du moins de la stabilité *temporaire.*

On peut se rendre compte de cette stabilité en se reportant aux valeurs des ξ_i; on trouve en effet, pour la solution générale des équations aux variations:

$$\xi_i = \sum A_k e^{\alpha_k t} S_{ik},$$

les A_k étant des coëfficients constants et les S_α des séries trigonométriques.

Or si α_k^2 est réel négatif, on trouve

$$e^{\alpha_k t} = \cos t\sqrt{-\alpha_k^2} + i \sin t\sqrt{-\alpha_k^2},$$

de sorte que ξ_i s'exprime trigonométriquement.

Au contraire si un ou plusieurs des coëfficients de stabilité devient réel positif ou imaginaire, la solution périodique considérée ne jouit plus de la stabilité temporaire.

On voit aisément en effet que ξ_i est alors représenté par une série dont le terme général est de la forme:

$$Ae^{ht} \cos(kt + mt + l)$$

où $(h + ik)^2$ est un des coëfficients de stabilité, où m est un entier et l et A des constantes quelconques. Le défaut de stabilité se trouve ainsi mis en évidence.

Si deux des coëfficients de stabilité deviennent égaux entre eux, ou si l'un d'eux devient nul, on trouvera en général dans la série qui représente ξ_i des termes de la forme:

$$Ate^{ht} \cos(kt + mt + l) \quad \text{ou} \quad At \cos(mt + l).$$

En résumé, ξ_i peut dans tous les cas être représenté par une série toujours convergente. Dans cette série le temps peut entrer sous le signe sinus ou cosinus, ou par l'exponentielle e^{ht}, ou enfin en dehors des signes trigonométriques ou exponentiels.

Si tous les coëfficients de stabilité sont réels, négatifs et distincts, le temps n'apparaîtra que sous les signes sinus et cosinus et il y aura stabilité temporaire.

Si l'un des coefficients est positif ou imaginaire, le temps apparaîtra sous un signe exponentiel; si deux des coëfficients sont égaux ou que l'un d'eux soit nul, le temps apparaît en dehors de tout signe trigonométrique ou exponentiel.

Si donc tous les coëfficients ne sont pas réels, négatifs et distincts, il n'y a pas en général de stabilité temporaire.

112

Toutes les fois que F ne dépend pas du temps t, l'un des n coëfficients de stabilité est nul; car d'une part le temps n'entre pas explicitement dans les équations différentielles; d'autre part ces équations admettent une intégrale

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = \text{const.}$$

Nous nous trouvons donc dans le cas dont nous avons parlé plus haut et où deux des exposants caractéristiques sont nuls. Mais, comme nous l'avons dit, cela ne peut créer une difficulté parce que l'on peut, à l'aide de l'intégrale connue abaisser à $2n - 1$ l'ordre des équations (1'). Il n'y a plus alors que $2n - 1$ exposants caractéristiques; l'un d'eux est nul et les $2n - 2$ autres, aux carrés desquels on peut conserver le nom de coëfficients de stabilité, sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Reprenons le déterminant que nous avons eu à envisager dans le paragraphe précédent.

Nous avons dans ce paragraphe envisagé d'abord le cas où les équations (1) dépendent du temps t et d'un paramètre μ, et admettent pour $\mu = 0$ une solution périodique et une seule. Nous avons vu que si le déterminant fonctionnel:

$$\Delta = \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \neq 0$$

les équations admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de μ.

Ce déterminant peut s'écrire:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - 1 & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - 1 & \dots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - 1 \end{vmatrix}.$$

V/113

§10.

Or les exposants caractéristiques α sont donnés par l'équation:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - e^{2\alpha\pi} & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - e^{2\alpha\pi} & \dots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - e^{2\alpha\pi} \end{vmatrix} = 0.$$

Dire que Δ est nul, c'est donc dire que l'un des exposants caractéristiques est nul de sorte que nous pouvons énoncer de la façon suivante le premier des théorèmes démontrés au paragraphe précédent.

Si les équations (1) *qui dépendent d'un paramètre μ admettent pour $\mu = 0$ une solution périodique dont aucun des exposants caractéristiques ne soit nul, elles admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de μ.*

§ 11. ***Solutions périodiques des équations de la dynamique.***

Je prendrai, pour fixer les idées, les équations de la dynamique avec trois degrés de liberté, mais ce que je vais dire s'appliquerait évidemment au cas général. J'écrirai donc mes équations sous la forme:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, & \frac{dx_3}{dt} &= \frac{dF}{dy_3}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}, & \frac{dy_3}{dt} &= -\frac{dF}{dx_3}, \end{aligned}$$

F étant une fonction uniforme quelconque des x et des y, indépendante de t.

Je supposerai ensuite que x_1, x_2 et x_3 sont des variables linéaires, mais que y_1, y_2 et y_3 sont des variables angulaires, c'est à dire que F est une fonction periodique de y_1, y_2 et y_3 avec la période 2π, de telle façon que la situation du système ne change pas quand une ou plusieurs des trois quantités y augmente d'un multiple de 2π. (Cf. chapitre I.)

114

Je supposerai de plus que F dépend d'un paramètre arbitraire μ et peut se développer suivant les puissances croissantes de ce paramètre de telle sorte que l'on ait:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \mu^3 F_3 + \dots .$$

Je supposerai enfin que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y de telle sorte que:

$$\frac{dF_0}{dy_1} = \frac{dF_0}{dy_2} = \frac{dF_0}{dy_3} = 0.$$

Rien n'est plus simple alors que d'intégrer les équations (1) quand $\mu = 0$; elles s'écrivent en effet:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = 0,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_1}, \qquad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_2}, \qquad \frac{dy_3}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_3}.$$

Ces équations montrent d'abord que x_1, x_2 et x_3 sont des constantes. On en conclut que

$$-\frac{dF_0}{dx_1}, -\frac{dF_0}{dx_2}, -\frac{dF_0}{dx_3}$$

qui ne dépendent que de x_1, x_2 et x_3 sont aussi des constantes que nous appellerons pour abréger n_1, n_2 et n_3 et qui sont complètement définies quand on se donne les valeurs constantes de x_1, x_2 et x_3. Il vient alors:

$$y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad y_3 = n_3 t + \varpi_3,$$

ϖ_1, ϖ_2 et ϖ_3 étant de nouvelles constantes d'intégration.

Quelle est la condition pour que la solution ainsi trouvée soit périodique et de période T. Il faut que si l'on change t en $t + T$, y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π, c'est à dire que:

$$n_1 T, n_2 T \quad \text{et} \quad n_3 T$$

soient des multiples de 2π.

105 § 11

Ainsi pour que la solution que nous venons de trouver soit périodique, il faut et il suffit que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 soient commensurables entre eux.

Quant à la période T, ce sera le plus petit commun multiple des trois quantités:

$$\frac{2\pi}{n_1}, \quad \frac{2\pi}{n_2} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{n_3}.$$

Nous exclurons, au moins provisoirement de nos recherches, le cas où les trois fonctions $\frac{dF_0}{dx_1}$, $\frac{dF_0}{dx_2}$ et $\frac{dF_0}{dx_3}$ ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Si on laisse ce cas de côté, on peut toujours choisir x_1, x_2 et x_3 de telle façon que n_1, n_2 et n_3 aient telles valeurs que l'on veut, au moins dans un certain domaine. Il y aura donc une infinité de choix possibles pour les trois constantes x_1, x_2 et x_3 qui conduiront à des solutions périodiques.

Je me propose de rechercher s'il existe encore de solutions périodiques de période T lorsque μ n'est plus égal à o.

~~Pour cela, je vais chercher à satisfaire aux équations (1) en faisant~~[1]

Pour le prouver, je vais employer un raisonnement analogue à celui du §9.

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \ldots, \\ x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \ldots, \\ x_3 &= x_3^0 + \mu x_3^1 + \mu^2 x_3^2 + \ldots, \\ y_1 &= y_1^0 + \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \ldots, \\ y_2 &= y_2^0 + \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \ldots, \\ y_3 &= y_3^0 + \mu y_3^1 + \mu^2 y_3^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Dans ces formules x_1^0, x_2^0, x_3^0 désignent les valeurs constantes que j'avais été conduit plus haut à attribuer à x_1, x_2 et x_3 quand je supposais $\mu = $ o et qui sont telles que:

$$\frac{d}{dx_1^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_1, \quad \frac{d}{dx_2^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_2, \quad \frac{d}{dx_3^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_3$$

[1] Les chiffres placés en haut et à droite des lettres x et y dans les équations (2) sont ~~des indices et non des exposants.~~

On a de plus:

$$y_i^0 = n_i t + \varpi_i.$$

Enfin les x_i^1, les y_i^1, les x_i^2, les y_i^2 etc. sont des fonctions du temps qu'il s'agira de déterminer et qui devront être périodiques de période T.

Dans F, à la place des x et des y, substituons leurs valeurs (2), puis développons F suivant les puissances croissantes de μ de telle sorte que l'on ait:

$$F = \Phi_0 + \mu \Phi_1 + \mu^2 \Phi_2 + \dots.$$

Il est clair que

$$\Phi_0 = F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

ne dépend que des x_i^0; que

$$\Phi_1 = F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0) + x_1^1 \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1 \frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^1 \frac{dF_0}{dx_3^0} \tag{3}$$

ne dépend que des x_i^0, des y_i^0 et des x_i^1; que Φ_2 ne dépend que des x_i^0, des y_i^0, des x_i^1, des y_i^1 et des x_i^2 etc.

Pour le premier je vais employer un raisonnement analogue à celui du §11.

Plus généralement, je puis écrire:

$$\Phi_k = \Theta_k + x_1^k \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^k \frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^k \frac{dF_0}{dx_3^0} = \Theta_k - n_1 x_1^k - n_2 x_2^k - n_3 x_3^k,$$

où Θ_k dépend seulement

des x_i^0, des x_i^1, ... et des x_i^{k-1}

des y_i^0, des y_i^1, ... et des y_i^{k-1}.

Je puis ajouter que par rapport à y_1^0, y_2^0, y_3^0 la fonction Θ_k est une fonction périodique de période 2π. L'équation (3) montre que $\Theta_1 = F_1$.

Cela posé les équations différentielles peuvent s'écrire, en égalant les puissances de même nom de μ:

$$\frac{dx_1^0}{dt} = \frac{dx_2^0}{dt} = \frac{dx_3^0}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_1^0}{dt} = n_1, \qquad \frac{dy_2^0}{dt} = n_2, \qquad \frac{dy_3^0}{dt} = n_3.$$

On trouve ensuite:

$$\frac{dx_1^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_1^0}, \quad \frac{dx_2^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_2^0}, \quad \frac{dx_3^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_3^0} \tag{4}$$

116

§11.

part cette convergence est une conséquence nécessaire de l'existence même des solutions périodiques; je préfère donc employer le même raisonnement que dans ce paragraphe (1) pour établir cette existence.

Nous avons vu que les équations (1) admettent pour solution quand $\mu = 0$

$$x_1 = a_1, \qquad x_2 = a_2, \qquad x_3 = a_3,$$

$$y_1 = n_1 t + \varpi_1, \qquad y_2 = n_2 t + \varpi_2, \qquad y_3 = n_3 t + \varpi_3,$$

les a et les ϖ étant des constantes d'intégration, et les n des fonctions des a.

Nous avons vu en outre que si

$$n_1 T,\ n_2 T,\ n_3 T$$

sont multiples de 2π, cette solution est périodique de période T.

Il en effet

Supposons ~~maintenant~~ que μ cesse d'être nul, et imaginons que, dans une certaine solution, les valeurs des x et des y pour $t = 0$ soient respectivement:

$$x_1 = a_1 + \delta a_1, \qquad x_2 = a_2 + \delta a_1, \qquad x_3 = a_3 + \delta a_3,$$

$$y_1 = \varpi_1 + \delta\varpi_1, \qquad y_2 = \varpi_2 + \delta\varpi_2, \qquad y_3 = \varpi_3 + \delta\varpi_3.$$

Supposons que, dans cette même solution, les valeurs des x et des y pour $t = T$ soient

$$x_1 = a_1 + \delta a_1 + \Delta a_1,$$

$$x_2 = a_2 + \delta a_2 + \Delta a_2,$$

$$x_3 = a_3 + \delta a_3 + \Delta a_3,$$

$$y_1 = \varpi_1 + n_1 T + \delta\varpi_1 + \Delta\varpi_1,$$

$$y_2 = \varpi_2 + n_2 T + \delta\varpi_2 + \Delta\varpi_2,$$

$$y_3 = \varpi_3 + n_3 T + \delta\varpi_3 + \Delta\varpi_3.$$

La condition pour que cette solution soit périodique de période T c'est que l'on ait:

$$(12) \qquad \Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = \Delta\varpi_1 = \Delta\varpi_2 = \Delta\varpi_3 = 0.$$

117

Les six équations (12) ne sont pas distinctes. En effet, comme $F = \text{const.}$ est une intégrale des équations (1), et que d'ailleurs F est périodique par rapport aux y, on a:

$$F(a_i + \delta a_i\,,\, \varpi_i + \delta\varpi_i) = F(a_i + \delta a_i + \Delta a_i\,,\, \varpi_i + n_i T + \delta\varpi_i + \Delta\varpi_i)$$

$$= F(a_i + \delta a_i + \Delta a_i\,,\, \varpi_i + \delta\varpi_i + \Delta\varpi_i).$$

Il nous suffira donc de satisfaire à cinq des équations (12). Je supposerai de plus:

$$\varpi_1 = \delta\varpi_1 = 0,$$

ce qui revient à prendre pour origine du temps l'époque où y_1 est nul.

Il est aisé de voir que les Δa_i et les $\Delta\varpi_i$ sont des fonctions holomorphes de μ, des δa_i et des $\delta\varpi_i$ s'annulant quand toutes ces variables s'annulent.

Il s'agit donc de démontrer que l'on peut tirer des cinq dernières équations (12) $\delta a_1\,,\, \delta a_2\,,\, \delta a_3\,,\, \delta\varpi_2$ et $\delta\varpi_3$ en fonctions de μ.

Remarquons que quand μ est nul, on a

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = 0.$$

Par conséquent $\Delta a_1\,,\, \Delta a_2$ et Δa_3, développés suivant les puissances de μ, des δa_i et des $\delta\varpi_i$, contiennent μ en facteur. Nous supprimerons ce facteur μ, et nous écrirons par conséquent les cinq équations (12) que nous avons à résoudre sous la forme:

$$(13) \qquad \frac{\Delta a_2}{\mu} = \frac{\Delta a_3}{\mu} = \Delta\varpi_1 = \Delta\varpi_2 = \Delta\varpi_3 = 0.$$

~~Il est aisé de voir que si dans les deux premières équations (13) on fait $\mu = 0$, ces équations se ramènent aux relations (6)~~

$$\cancel{\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0.}$$

~~Nous choisirons donc ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire à ces relations. Quand on aura choisi de la sorte ϖ_2 et ϖ_3, on verra que les équations (13) sont satisfaites quand on y fait à la fois:~~

$$\cancel{\mu = \delta\varpi_2 = \delta\varpi_3 = \delta a_1 = \delta a_2 = \delta a_3 = 0.}$$

~~Nous pourrons donc tirer des équations (13) les cinq inconnues δa_i~~

§11.

~~Note 9~~

Il nous faut déterminer ϖ_2 et ϖ_3 de telle façon que ces équations soient satisfaites pour

$$(14)\qquad \mu = \delta\varpi_2 = \delta\varpi_3 = \delta a_1 = \delta a_2 = \delta a_3 = 0$$

~~Cherchons donc à déterminer les~~ Voyons ce que deviennent les premiers membres des équations (13) quand on y fait $\mu = 0$.

Il vient:

$$n_1 T + \Delta\varpi_1 = +\int_0^T \frac{dy_1}{dt}\,dt = -\int_0^T \frac{dF}{dx_1}\,dt = -\int_0^T \frac{dF_0}{d(a_1+\delta a_1)}\,dt,$$

d'où:

$$\Delta\varpi_1 = -T\left(\frac{dF_0}{dx_1} + n_1\right)$$

et de même:

$$\Delta\varpi_2 = -T\left(\frac{dF_0}{dx_2} + n_2\right),$$

$$\Delta\varpi_3 = -T\left(\frac{dF_0}{dx_3} + n_3\right).$$

II Il importe d'observer que dans F_0 il faut remplacer x_1, x_2 et x_3 par $a_1+\delta a_1$, $a_2+\delta a_2$, $a_3+\delta a_3$; en effet pour $\mu=0$, F se réduit à F_0 et x_1, x_2, x_3 à des constantes qui restent constamment égales à leurs valeurs initiales $a_1+\delta a_1$, $a_2+\delta a_2$, $a_3+\delta a_3$.

Il vient d'autre part:

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \frac{1}{\mu}\int_0^T \frac{dx_2}{dt}\,dt = \frac{1}{\mu}\int_0^T \frac{dF}{dy_2}\,dt$$

ou puisque F_0 ne dépend pas de y_i:

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \int_0^T \frac{d}{dy_2}\left(\frac{F-F_0}{\mu}\right)dt$$

ou pour $\mu = 0$

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \int_0^T \frac{dF_1}{dy_2}\,dt.$$

~~Si l'on Supposons que les équations (14) soient satisf~~

Supposons que μ, ~~les~~ $\delta\varpi$ et les δa soient nuls à la fois; il faudra alors faire dans F_1

$$x_1 = a_1,\ x_2 = a_2,\ x_3 = a_3,\ y_1 = n_1 t,\ y_2 = n_2 t + \varpi_2,\ y_3 = n_3 t + \varpi_3.$$

F_1 deviendra alors une fonction périodique de t de période T, et une fonction périodique de ϖ_2 et de ϖ_3 de période 2π.

Soit ψ la valeur moyenne de F_1 considérée comme fonction périodique de t. Il viendra:

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \int_0^T \frac{dF_1}{d\varpi_2}\,dt = T\frac{d\psi}{d\varpi_2}$$

et de même

$$\frac{\Delta a_3}{\mu} = T \frac{d\psi}{d\varpi_3}.$$

Nous devons donc choisir ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux équations

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0.$$

Cela est toujours possible, en effet la fonction ψ est périodique en ϖ_2 et en ϖ_3 et elle est finie; donc elle a au moins un maximum et un minimum, pour lesquels ses deux dérivées doivent s'annuler. (forts. å sid 120)

Note 10.

Revenons au cas où l'on a trois degrés de liberté, et où la période est constante et égale à T.

Je dis que $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ peuvent se développer suivant les puissances croissantes de μ. En effet, en vertu du théorème III ~~Chapitre~~ §2, les x et les y peuvent être développés suivant les puissances de μ, ~~et~~ de $\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \delta\varpi_2$ et $\delta\varpi_3$. Mais imaginons que l'on ait, ~~conformément aux considérations qui précèdent,~~ déterminé les δa et les $\delta\varpi$ de façon que la solution soit périodique de période T. ~~D'après ce que nous~~ On tirera alors les δa et les $\delta\varpi$ des équations (13) sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de μ, de sorte que les x et les y seront finalement ordonnés suivant les puissances de μ.

La solution devant être périodique de période T quel que soit μ, les ~~les~~ coefficients des diverses puissances de μ seront des fonctions périodiques de t.

~~L'existence et la convergence de ces séries étant ainsi établie par avance, nous~~ Je vais ~~déterminer leurs coefficients.~~

Remarquons de plus que l'on peut toujours supposer que l'origine du temps ait été choisie de telle sorte que y_1 s'annule avec t, et que cela ait lieu quel que soit μ. ~~On aura~~ Alors pour $t = 0$ on aura:

$$0 = y_1^0 = y_1^1 = y_1^2 = \text{---}$$

L'existence et la convergence de ces séries étant ainsi établie, je vais déterminer leurs coefficients. (forts. å sid. 122)

X §11. 120

Quand on aura choisi de la sorte ϖ_2 et ϖ_3, on verra que les équations (13) sont satisfaites quand on y fait à la fois:

$$\mu = \delta\varpi_2 = \delta\varpi_3 = \delta a_1 = \delta a_2 = \delta a_3 = 0.$$

Nous pourrons donc tirer des équations (13) les cinq inconnues δa_i et $\delta\varpi_i$ sous la forme de fonctions holomorphes de μ, s'annulant avec μ. Il n'y aurait d'exception que si le déterminant fonctionnel:

$$\frac{\partial\left(\frac{\Delta a_2}{\mu}, \frac{\Delta a_3}{\mu}, \Delta\varpi_1, \Delta\varpi_2, \Delta\varpi_3\right)}{\partial(\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \delta\varpi_2, \delta\varpi_3)}$$

était nul. Mais pour $\mu = 0$, $\Delta\varpi_1$, $\Delta\varpi_2$ et $\Delta\varpi_3$ sont indépendants de $\delta\varpi_2$ et de $\delta\varpi_3$, de sorte que ce déterminant fonctionnel est le produit de deux autres:

$$\frac{\partial\left(\frac{\Delta a_2}{\mu}, \frac{\Delta a_3}{\mu}\right)}{\partial(\delta\varpi_2, \delta\varpi_3)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\Delta\varpi_1, \Delta\varpi_2, \Delta\varpi_3)}{\partial(\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3)}.$$

Le premier de ces déterminants est égal au hessien de ϕ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 et le second au hessien de F_0 par rapport à x_1^0, x_2^0 et x_3^0. Si l'on supprime les facteurs T^2 et $-T^3$,

Si donc aucun de ces deux hessiens n'est nul, il sera possible de satisfaire aux cinq équations (13) et par conséquent pour des valeurs suffisamment petites de μ, il existera une solution périodique de période T.

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant chercher à déterminer, non plus seulement les solutions périodiques de période T, mais les solutions de période peu différente de T. Nous avons pris pour point de départ les trois nombres n_1, n_2, n_3; nous aurions pu tout aussi bien choisir trois autres nombres n'_1, n'_2, n'_3, pourvu qu'ils soient commensurables entre eux, et nous serions arrivés à une autre solution périodique dont la période T' aurait été le plus petit commun multiple de $\frac{2\pi}{n'_1}, \frac{2\pi}{n'_2}, \frac{2\pi}{n'_3}$.

Si nous prenons en particulier:

$$n'_1 = n_1(1+\varepsilon), \quad n'_2 = n_2(1+\varepsilon), \quad n'_3 = n_3(1+\varepsilon)$$

les trois nombres n'_1, n'_2, n'_3 seront commensurables entre eux puisqu'ils sont proportionnels aux trois nombres n_1, n_2 et n_3.

Ils nous conduiront donc à une solution périodique de période:

$$T' = \frac{T}{1+\varepsilon}$$

121

de telle façon que nous aurons:

$$x_i = \varphi_i(t, \mu, \varepsilon), \qquad y_i = \varphi'_i(t, \mu, \varepsilon), \tag{14}$$

les φ_i et les φ'_i étant des fonctions développables suivant les puissances de μ et de ε, et périodiques en t, mais de façon que la période dépende de ε.

Si dans F nous remplaçons les x_i et les y_i par leurs valeurs (14), F doit devenir une constante indépendante du temps (puisque $F =$ const. est une des intégrales des équations (1)). Mais cette constante qui est dite constante des forces vives, dépendra de μ et de ε et pourra être développée suivant les puissances croissantes de ces variables.

Si la constante des forces vives B est une donnée de la question, l'équation

$$F(\mu, \varepsilon) = B$$

peut être regardée comme une relation qui lie ε à μ. Si donc nous nous donnons arbitrairement B, il existera toujours une solution périodique quelle que soit la valeur choisie pour cette constante, mais la période dépendra de ε et par conséquent de μ.

Un cas plus particulier que celui que nous venons de traiter en détail est celui où il n'y a que deux degrés de liberté. F ne dépend alors que de quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2 et la fonction ψ ne dépend plus que d'une seule variable ϖ_2. Les relations (6) se réduisent alors à

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0 \tag{15}$$

et le hessien de ψ se réduit à $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$. D'où cette conclusion:

A chacune des racines simples de l'équation (15) correspond une solution périodique des équations (1), qui existe pour toutes les valeurs de μ suffisamment petites.

Je pourrais même ajouter qu'il en est encore de même pour chacune des racines d'ordre impair,

ainsi que nous l'avons vu au §9, et que cette équation admet toujours de pareilles racines puisque la fonction ψ a au moins un maximum qui ne peut correspondre qu'aux racines impaires de l'équation (15)

~~Ce que nous venons de dire s'applique en particulier à une équation que l'on rencontre quelquefois en Mécanique Céleste et dont plusieurs géomètres se sont déjà occupés. Cette équation est la suivante:~~

(forts. à sid 119)

122

84.

Ainsi pour que la solution que nous venons de trouver soit périodique, il faut et il suffit que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 soient commensurables entre eux.

Quant à la période T, ce sera le plus petit commun multiple des trois quantités:

$$\frac{2\pi}{n_1}, \quad \frac{2\pi}{n_2} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{n_3}.$$

Nous exclurons, au moins provisoirement de nos recherches, le cas où les trois fonctions $\frac{dF_0}{dx_1}$, $\frac{dF_0}{dx_2}$ et $\frac{dF_0}{dx_3}$ ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Si on laisse ce cas de côté, on peut toujours choisir x_1, x_2 et x_3 de telle façon que n_1, n_2 et n_3 aient telles valeurs que l'on veut, au moins dans un certain domaine. Il y aura donc une infinité de choix possibles pour les trois constantes x_1, x_2 et x_3 qui conduiront à des solutions périodiques.

Je me propose de rechercher s'il existe encore de solutions périodiques de période T lorsque μ n'est plus égal à o.

Pour cela, je vais chercher à satisfaire aux équations (1) en faisant[1].

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \dots, \\
x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \dots, \\
x_3 &= x_3^0 + \mu x_3^1 + \mu^2 x_3^2 + \dots, \\
y_1 &= y_1^0 + \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \dots, \\
y_2 &= y_2^0 + \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \dots, \\
y_3 &= y_3^0 + \mu y_3^1 + \mu^2 y_3^2 + \dots.
\end{aligned} \qquad (6)$$

Dans ces formules x_1^0, x_2^0, x_3^0 désignent les valeurs constantes que j'avais été conduit plus haut à attribuer à x_1, x_2 et x_3 quand je supposais $\mu = 0$ et qui sont telles que:

$$\frac{d}{dx_1^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_1, \quad \frac{d}{dx_2^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_2, \quad \frac{d}{dx_3^0} F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_3.$$

[1] Les chiffres placés en haut et à droite des lettres x et y dans les équations (2) sont des indices et non des exposants.

17

123

On a de plus:

$$y_i^0 = n_i t + \varpi_i.$$

Enfin les x_i^1, les y_i^1, les x_i^2, les y_i^2 etc. sont des fonctions du temps qu'il s'agira de déterminer et qui devront être périodiques de période T.

Dans F, à la place des x et des y, substituons leurs valeurs (6), puis développons F suivant les puissances croissantes de μ de telle sorte que l'on ait:

$$F = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots.$$

Il est clair que

$$\Phi_0 = F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

ne dépend que des x_i^0; que

$$\Phi_1 = F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0) + x_1^1\frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1\frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^1\frac{dF_0}{dx_3^0} \tag{7}$$

ne dépend que des x_i^0, des y_i^0 et des x_i^1; que Φ_2 ne dépend que des x_i^0, des y_i^0, des x_i^1, des y_i^1 et des x_i^2 etc.

Plus généralement, je puis écrire:

$$\Phi_k = \Theta_k + x_1^k\frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^k\frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^k\frac{dF_0}{dx_3^0} = \Theta_k - n_1x_1^k - n_2x_2^k - n_3x_3^k,$$

où Θ_k dépend seulement

des x_i^0, des x_i^1, ... et des x_i^{k-1},
des y_i^0, des y_i^1, ... et des y_i^{k-1}.

Je puis ajouter que par rapport à y_1^0, y_2^0, y_3^0 la fonction Θ_k est une
17 fonction périodique de période 2π. L'équation (7) montre que $\Theta_1 = F_1$.

Cela posé les équations différentielles peuvent s'écrire, en égalant les puissances de même nom de μ:

$$\frac{dx_1^0}{dt} = \frac{dx_2^0}{dt} = \frac{dx_3^0}{dt} = 0, \qquad \frac{dy_1^0}{dt} = n_1, \qquad \frac{dy_2^0}{dt} = n_2, \qquad \frac{dy_3^0}{dt} = n_3.$$

On trouve ensuite:

$$\frac{dx_1^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_1^0}, \qquad \frac{dx_2^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_2^0}, \qquad \frac{dx_3^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_3^0} \tag{8}$$

124

et

9 (~~7~~)
$$\frac{dy_1^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_1^0}, \quad \frac{dy_2^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_2^0}, \quad \frac{dy_3^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_3^0},$$

et plus généralement:

8' (~~7~~)
$$\frac{dx_i^k}{dt} = \frac{d\Phi_k}{dy_i^0}$$

et:

9' (~~8~~)
$$\frac{dy_i^k}{dt} = -\frac{d\Phi_k}{dx_i^0} = -\frac{d\Theta_k}{dx_i^0} - x_1^k \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_i^0} - x_2^k \frac{d^2F_0}{dx_2^0 dx_i^0} - x_3^k \frac{d^2F_0}{dx_3^0 dx_i^0}.$$

Intégrons d'abord les équations (~~7~~ 8). Dans F_1 nous remplacerons y_1^0, y_2^0, y_3^0 par leurs valeurs:

$$n_1 t + \varpi_1, \; n_2 t + \varpi_2, \; n_3 t + \varpi_3.$$

~~Nous pouvons d'ailleurs toujours choisir l'origine des temps de telle façon que ϖ_1 soit nul.~~ Alors les seconds membres des équations (4) sont des fonctions périodiques de t de période T; ces seconds membres peuvent donc être développés en séries procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Pour que les valeurs de x_1^1, x_2^1 et x_3^1 tirées des équations (~~7~~) soient des fonctions périodiques de t, il faut et il suffit que ces séries ne contiennent pas de termes tout connus.

H Puisque y_1^0 doit s'annuler avec t, ϖ_1 sera nul.

113 §11

6o

Je puis écrire en effet:

$$F_1 = \Sigma A \sin(m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h),$$

où m_1, m_2, m_3 sont des entiers positifs ou négatifs et où A et h sont des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0. J'écrirai pour abréger:

$$F_1 = \Sigma A \sin \omega$$

en posant

$$\omega = m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h.$$

Je trouverai alors

$$\frac{dF_1}{dy_1^0} = \Sigma A m_1 \cos \omega, \quad \frac{dF_1}{dy_2^0} = \Sigma A m_2 \cos \omega, \quad \frac{dF_1}{dy_3^0} = \Sigma A m_3 \cos \omega$$

125

et

$$\omega = t(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) + h + m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3.$$

Parmi les termes de ces séries, je distinguerai ceux pour lesquels

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$$

et qui sont indépendants de t. Ces termes existent puisque nous avons supposé que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 sont commensurables entre eux.

Je poserai alors

$$\psi = \mathrm{S} A \sin \omega, \qquad (m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0\,,\ \omega = h + m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3)$$

la sommation représentée par le signe S s'étendant à tous les termes de F_1 pour lesquels le coëfficient de t est nul. Nous aurons alors:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \mathrm{S} A m_2 \cos \omega, \qquad \frac{d\psi}{d\varpi_3} = \mathrm{S} A m_3 \cos \omega.$$

Si donc on a:

12 $$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = \frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0, \tag{$\cancel{10}$}$$

il viendra:

13 $$\mathrm{S} A m_1 \cos \omega = 0, \qquad \mathrm{S} A m_2 \cos \omega = 0, \qquad \mathrm{S} A m_3 \cos \omega = 0. \tag{$\cancel{11}$}$$

La première des équations (11) est en effet une conséquence des deux autres, puisque en vertu de la relation $m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$, on a identiquement

$$n_1 \mathrm{S} A m_1 \cos \omega + n_2 \mathrm{S} A m_2 \cos \omega + n_3 \mathrm{S} A m_3 \cos \omega = 0.$$

12 Si donc les relations ($\cancel{10}$) sont satisfaites, les séries $\sum A m_i \cos \omega$ ne con-
6 tiendront pas de terme tout connu, et les équations ($\cancel{6}$) nous donneront:

$$x_1^1 = \sum \frac{A m_1 \sin \omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_1^1, \qquad x_2^1 = \sum \frac{A m_2 \sin \omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_2^1,$$

$$x_3^1 = \sum \frac{A m_3 \sin \omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_3^1,$$

C_1^1, C_2^1 et C_3^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

126

Il me reste à démontrer que l'on peut choisir les constantes ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux relations ([illegible]). La fonction ψ est une fonction périodique de ϖ_2 et de ϖ_3 qui ne change pas quand l'une de ces deux variables augmente de 2π. De plus elle est finie, elle aura donc au moins un maximum et un minimum. Il y a donc au moins deux manières de choisir ϖ_2 et ϖ_3 de façon à satisfaire aux relations ([illegible]).

12 ~~10~~

12

Je pourrais même ajouter qu'il y en a au moins quatre, sans pouvoir toutefois affirmer qu'il en est encore de même quand le nombre de degrés de liberté est supérieur à trois.

Je vais maintenant chercher à déterminer à l'aide des équations (9) les trois fonctions y_i^1 et les trois constantes C_i^1.

Nous pouvons regarder comme connus les x_i^0 et les y_i^0; les x_i^1 sont connus également aux constantes près C_i^1. Je puis donc écrire les équations (9) sous la forme suivante:

$$\frac{dy_i^1}{dt} = H_i - C_1^1 \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_i^0} - C_2^1 \frac{d^2F_0}{dx_2^0 dx_i^0} - C_3^1 \frac{d^2F_0}{dx_3^0 dx_i^0}, \tag{12}$$

où les H_i représentent des fonctions entièrement connues développées en séries suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Les coefficients de C_1^1, C_2^1 et C_3^1 sont des constantes que l'on peut regarder comme connues.

Pour que la valeur de y_i^1 tirée de cette équation soit une fonction périodique de t, il faut et il suffit que dans le second membre le terme tout connu soit nul. Si donc H_i^0 désigne le terme tout connu de la série trigonométrique H_i, je devrai avoir:

15

$$C_1^1 \frac{d^2F_0}{dx_1^0 dx_i^0} + C_2^1 \frac{d^2F_0}{dx_2^0 dx_i^0} + C_3^1 \frac{d^2F_0}{dx_3^0 dx_i^0} = H_i^0. \tag{13}$$

Les trois équations linéaires (9) déterminent les trois constantes C_1^1, C_2^1 et C_3^1.

Il n'y aurait d'exception que si le déterminant de ces trois équations était nul; c'est à dire si le *hessien* de F_0 par rapport à x_1^0, x_2^0 et x_3^0 était nul; nous exclurons ce cas.

Les équations (8) me donneront donc:

$$y_1^1 = \eta_1^1 + k_1^1, \qquad y_2^1 = \eta_2^1 + k_2^1, \qquad y_3^1 = \eta_3^1 + k_3^1,$$

127

n s'annulant avec t,

les η_i^1 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues, et les k_i^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Venons maintenant aux équations (8') en y faisant $k=2$ et $i=1, 2, 3$ et cherchons à déterminer à l'aide des trois équations ainsi obtenues, les trois fonctions x_i^2 et les trois constantes k_i^1.

Il est aisé de voir que nous avons:

$$\theta_2 = \Omega_2 + y_1^1 \frac{dF_1}{dy_1^0} + y_2^1 \frac{dF_1}{dy_2^0} + y_3^1 \frac{dF_1}{dy_3^0},$$

où Ω_2 dépend seulement des x_i^0, des y_i^0 et des x_i^1 et où l'on a, comme plus haut:

$$\frac{dF_1}{dy_i^0} = \sum A m_i \cos\omega.$$

Les équations (8') s'écrivent alors:

$$\frac{dx_i^2}{dt} = \frac{d\Omega_2}{dy_i^0} + \sum_k y_k^1 \frac{d^2 F_1}{dy_k^0 dy_i^0}$$

ou

$$(14) \quad \frac{dx_i^2}{dt} = H_i' - k_1^1 \sum A m_1 m_i \sin\omega - k_2^1 \sum A m_2 m_i \sin\omega - k_3^1 \sum A m_3 m_i \sin\omega,$$

16

H_i' étant une fonction périodique de t, que l'on peut regarder comme entièrement connue. Pour que l'on puisse tirer de cette équation x_i^2 sous la forme d'une fonction périodique, il faut et il suffit que les seconds membres des équations (14), développés en séries trigonométriques, ne possèdent pas de termes tout connus. Nous devons donc disposer des quantités k_i^1 de manière à annuler ces termes tout connus. Nous serions ainsi conduits à trois équations linéaires entre les trois quantités k_i^1; mais comme le déterminant de ces trois équations est nul, il y a une petite difficulté et je suis forcé d'entrer dans quelques détails.

H Comme y_i^1 s'annule avec t, on doit avoir

~~Nous allons d'abord supposer:~~

$$k_1^1 = 0;$$

nous n'aurons plus alors que deux inconnues k_2^1 et k_3^1 et trois équations à satisfaire; mais ces trois équations ne sont pas distinctes comme nous allons le voir.

128

Appelons en effet E_i le terme tout connu de H_i^1, ces trois équations s'écriront:

15

$$
\begin{aligned}
E_1 &= k_2^1 \mathsf{S} A m_2 m_1 \sin\omega + k_3^1 \mathsf{S} A m_3 m_1 \sin\omega, \\
E_2 &= k_2^1 \mathsf{S} A m_2^2 \sin\omega \quad + k_3^1 \mathsf{S} A m_3 m_2 \sin\omega, \qquad (14)\\
E_3 &= k_2^1 \mathsf{S} A m_2 m_3 \sin\omega + k_3^1 \mathsf{S} A m_3^2 \sin\omega,
\end{aligned}
$$

en conservant au signe de sommation S le même sens que plus haut. Je ne considérerai d'abord que les deux dernières des équations (~~14~~ 15) que j'écrirai:

$$
-E_2 = k_2^1 \frac{d\psi}{d\varpi_2^2} + k_3^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_2 d\varpi_3},
$$

$$
-E_3 = k_2^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_2 d\varpi_3} + k_3^1 \frac{d^2\psi}{d\varpi_3^2}.
$$

De ces deux équations on peut tirer k_2^1 et k_3^1, à moins que le hessien de ψ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 ne soit nul. Si l'on donne aux k_i^1 les valeurs ainsi obtenues, les deux dernières équations (14) nous donneront x_2^2 et x_3^2 sous la forme suivante:

$$
x_2^2 = \xi_2^2 + C_2^2, \qquad x_3^2 = \xi_3^2 + C_3^2,
$$

les ξ_i^2 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les C_i^2 étant de nouvelles constantes d'intégration.

Pour trouver x_1^2 nous pouvons, au lieu d'employer la première des équations (14) nous servir des considérations suivantes:

Les équations (1) admettent une intégrale:

$$
F = B,
$$

B étant une constante d'intégration que je supposerai développée suivant les puissances de μ en écrivant:

$$
B = B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \ldots,
$$

de sorte que l'on a:

$$
\Phi_0 = B_0, \qquad \Phi_1 = B_1, \qquad \Phi_2 = B_2, \ldots,
$$

B_0, B_1, B_2 etc. étant autant de constantes différentes.

129

Le premier membre de l'équation:

$$\Phi_2 = B_2$$

dépend des x_i^0, des y_i^0, des x_i^1, des y_i^1, de x_2^2 et de x_3^2 qui sont des fonctions connues de t et de x_1^2 que nous n'avons pas encore calculé. De cette équation, nous pourrons donc tirer x_1^2 sous la forme suivante:

$$x_1^2 = \xi_1^2 + C_1^2.$$

ξ_1^2 sera une fonction périodique de t entièrement déterminée et C_1^2 est une constante qui dépend de B_2, de C_2^2 et de C_3^2.

17 Nous pouvons conclure de là que la première des équations (15)
17 doit être satisfaite et par conséquent que ces trois équations (15) ne sont pas distinctes.

11' Prenons maintenant les équations (9') et faisons-y $k = 2$; nous obtiendrons trois équations qui nous permettront de déterminer les constantes C_1^1, C_1^2 et C_1^3 et d'où l'on tirera en outre les y_i^2 sous la forme:

$$y_1^2 = \eta_1^2 + k_1^2, \qquad y_2^2 = \eta_2^2 + k_2^2, \qquad y_3^2 = \eta_3^2 + k_3^2,$$

les η étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les k étant trois nouvelles constantes d'intégration.

10' Reprenons ensuite les équations (9') en y faisant $k = 3$; si nous supposons $k_1^2 = 0$, nous pourrons tirer des trois équations ainsi obtenues, d'abord les deux constantes k_2^2 et k_3^2, puis les x_i^3 sous la forme:

$$x_i^3 = \xi_i^3 + C_i^3,$$

les ξ étant des fonctions périodiques connues de t et les C_i^3 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Et ainsi de suite.

Voilà un procédé pour trouver des séries ordonnées suivant les puissances de μ, périodiques de période T par rapport au temps et satisfaisant aux équations (1). *Ce procédé ne serait en défaut que si le hessien de F_0 par rapport aux x_i^0 était nul ou si le hessien de ϕ par rapport à ϖ_2 et ϖ_3 était nul.*

~~On pourrait démontrer directement la convergence de ces séries par les procédés ordinaires du »calcul des limites» de Cauchy; mais d'autre~~

§11.

130

Ce que nous venons de dire s'applique en particulier à une équation que l'on rencontre quelquefois en Mécanique Céleste et dont plusieurs géomètres se sont déjà occupés. Cette équation est la suivante:

$$(16) \qquad \frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^3 = \mu R(\rho, t).$$ 18

n et m sont des constantes, μ est un paramètre très petit et R est une fonction de ρ et de t, développée suivant les puissances croissantes de ρ et périodique par rapport à t.

Pour bien nous en rendre compte, il faut d'abord ramener l'équation (16) à la forme canonique des équations de la dynamique. Cela se fera en posant:

$$\xi = t, \qquad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \qquad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2\rho^2}{2} + \frac{m\rho^4}{4} - \mu \int R(\rho, \xi)d\rho + \eta,$$

ξ et η étant deux nouvelles variables auxiliaires et l'intégrale $\int R(\rho, \xi)d\rho$ étant calculée en regardant ξ comme une constante. On trouve alors:

$$(17) \qquad \frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta},$$ 19

auxquelles nous pourrons adjoindre (η étant restée jusqu'ici complètement arbitraire) l'équation suivante:

$$(17) \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi}$$

qui complète un système canonique.

Quand $\mu = 0$ l'intégrale générale de l'équation (16) s'écrit

$$(18) \qquad \rho = h\,\mathrm{sn}(gt + \varpi), \qquad \sigma = hg\,\mathrm{cn}(gt + \varpi)\,\mathrm{dn}(gt + \varpi)$$

où g et ϖ sont deux constantes d'intégration et où h, ainsi que le module du sinus amplitude sont deux fonctions de g faciles à déterminer.

Nous allons changer de variables; nous prendrons au lieu de ξ, η, ρ et σ, quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2, définies comme il suit. Nous aurons d'abord:

$$x_2 = \eta, \qquad y_2 = \xi.$$

Des équations (18) qui donnent ρ et σ en fonctions de g et de $gt + \varpi$ pour $\mu = 0$, on peut tirer g et $gt + \varpi$ en fonctions de ρ et de σ. Il vient:

$$g = \chi_1(\rho, \sigma), \qquad gt + \varpi = \chi_2(\rho, \sigma).$$

/131

 §11.

Nous prendrons alors pour x_1 une certaine fonction de $\chi_1(\rho, \sigma)$ et pour y_1

$$y_1 = \frac{k}{2\pi} \chi_2(\rho, \sigma),$$

k désignant la période réelle de $\operatorname{sn}(x)$.

Si alors x_1 a été convenablement choisi en fonction de χ_1 les équations conserveront leur forme canonique

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{dF}{dx_2}, \quad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{dF}{dy_2}.$$

Il est clair d'ailleurs que pour $\mu = 0$, F ne dépend que de x_1 et de x_2 et non de y_1 et de y_2.

Nous nous trouvons donc bien dans les conditions énoncées au début de ce paragraphe.

L'équation (16) a surtout été étudiée par les géomètres dans le cas où $m = 0$; il semble au premier abord qu'elle est alors beaucoup plus simple. Ce n'est qu'une illusion; en effet, si l'on suppose $m = 0$, on se trouve dans le cas où le hessien de F_0 est nul et ce que nous avons dit dans ce paragraphe n'est plus applicable sans modification.

Ce n'est pas que les particularités que présente l'équation (16) dans le cas général ne soient encore vraies pour $m = 0$, toutes les fois du moins que μ n'est pas nul. La seule différence, c'est qu'on ne peut les mettre en évidence par un développement suivant les puissances de μ. L'apparente simplification qu'a reçue ainsi l'équation (16) n'a fait qu'augmenter les difficultés. Il est vrai qu'on est conduit quand $m = 0$, à des séries beaucoup plus simples que dans le cas général, mais ces séries ne convergent pas comme nous le verrons dans la suite.

§ 4. *Calcul des exposants caractéristiques.*

Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \qquad (i=1,2,3)$$

Supposons qu'on ait trouvé une solution périodique de ces équations:

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = \phi_i(t).$$

§ 11 139 24

~~Note II.~~

La méthode exposée dans ce paragraphe s'applique également à un cas particulier du problème des trois corps.

Supposons une masse nulle C attirée par deux ~~axes~~ masses mobiles A et B égales l'une à $1-\mu$ et l'autre à μ et décrivant ~~toutes deux~~ d'un mouvement uniforme ~~une~~ deux circonférences concentriques autour de leur centre de gravité commun supposé fixe.

Imaginons ~~que~~ de plus que la masse C se trouve dans le plan de ces deux circonférences.

Nous verrons plus loin que dans ce cas les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

On désigne par x_1 la ~~constante des aires~~ vitesse aréolaire du point C, par x_2 la racine carrée du grand axe de l'orbite de C, par y_1 la différence de la longitude du périhélie de C et de la longitude de B, par y_2 l'anomalie moyenne.

~~On doit avoir d'autre part~~

D'ailleurs F peut être développé suivant les puissances de μ et l'on a:

$$F_0 = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}.$$

Il est aisé de voir que le hessien de F_0 par rapport à x_1 et à x_2 est nul.

Il semble donc d'abord que les méthodes du présent paragraphe sont en défaut. Il n'en est rien et un artifice très simple permet de tourner la difficulté.

Les équations (1) admettent comme intégrale

$$F = C.$$

Considérons la constante C comme une donnée de la question.

Si alors $\varphi(F)$ est une fonction quelconque de F et $\varphi'(F)$ sa dérivée, on aura:

$$\varphi'(F) = \varphi'(C)$$

et les équations (1) pourront s'écrire:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\varphi'(F)}{\varphi'(C)} \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\varphi'(F)}{\varphi'(C)} \frac{dF}{dx_i}$$

ou

$$(1\text{ bis}) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dy_i}\left[\frac{\varphi(F)}{\varphi'(C)}\right], \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{d}{dx_i}\left[\frac{\varphi(F)}{\varphi'(C)}\right].$$

En général, le hessien de $\dfrac{\varphi(F_0)}{\varphi'(C)}$ ne sera pas nul. C'est ce qui arrive en particulier quand

$$\varphi(F_0) = F_0^2 = x_1^2 + \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{1}{4x_2^4}.$$

§11.

Les solutions des équations (1) qui correspondent à la valeur particulière C de l'intégrale F appartiennent aussi aux équations (1 bis).

Considérons maintenant une solution des équations (1) qui soit telle que l'intégrale F soit égale à une constante C_1 différente de C.

~~Soit~~ Je dis que cette solution appartiendra encore aux équations (1 bis) pourvu ~~qu'on change l'unité de temps, c'est à dire~~ pourvu qu'on y change t en

$$t\,\frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}.$$

On a en effet:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}\,,\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}\,;$$

si on change t en $t\,\frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}$ il viendra:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}\frac{dF}{dy_i}\,,\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}\frac{dF}{dx_i}$$

ou puisque $F=C_1$

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\varphi'(F)}{\varphi'(C)}\frac{dF}{dy_i}\,,\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\varphi'(F)}{\varphi'(C)}\frac{dF}{dx_i}.$$

C. Q. F. D.

Des solutions de (1) il est donc aisé de déduire celles de (1 bis) et inversement.

Les méthodes du présent paragraphe sont donc grâce à cet artifice, applicables à ce cas particulier du problème des trois corps.

Elles ne le seraient pas aussi aisément au cas général. Dans le cas général en effet, non seulement le hessien de F_0 est nul, mais celui de $\varphi(F_0)$ est encore nul, quelle que soit la fonction φ.

~~Cela~~ De là certaines difficultés dont je ne parlerai pas ici; j'y reviendrai plus loin et je me bornerai pour le moment à renvoyer le lecteur à un travail que j'ai inséré dans le Bulletin Astronomique, Tome 1er page 65.

134

§ 12. Calcul des exposants caractéristiques.

Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}.\qquad (i=1,2,3)$$

Supposons qu'on ait trouvé une solution périodique de ces équations:

$$x_i=\varphi_i(t),\qquad y_i=\psi_i(t)$$

et proposons-nous de déterminer les exposants caractéristiques de cette solution.

Pour cela nous poserons:

$$x_i=\varphi_i(t)+\xi_i,\qquad y_i=\psi_i(t)+\eta_i,$$

puis nous formerons les équations aux variations des équations (1) que nous écrirons:

$$(2)\qquad \begin{aligned}\frac{d\xi_i}{dt}&=\sum_k\frac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k+\sum_k\frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k,\\ \frac{d\eta_i}{dt}&=-\sum_k\frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k-\sum_k\frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k,\end{aligned}\qquad (i,k=1,2,3)$$

et nous chercherons à intégrer ces équations en faisant:

$$(3)\qquad \xi_i=e^{\alpha t}S_i,\qquad \eta_i=e^{\alpha t}T_i,$$

S_i et T_i étant des fonctions périodiques de t. Nous savons qu'il existe en général six solutions particulières de cette forme (les équations linéaires (2) étant du sixième ordre). Mais il importe d'observer, que dans le cas particulier qui nous occupe, il n'y a plus que quatre solutions particulières qui conservent cette forme, parce que deux des exposants caractéristiques sont nuls, et qu'il y a par conséquent deux solutions particulières d'une forme dégénérescente.

Cela posé, supposons d'abord $\mu=0$, alors F se réduit à F_0 comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent et ne dépend plus que de x_1^0, x_2^0 et x_3^0.

Alors les équations (2) se réduisent à:

$$(2')\qquad \frac{d\xi_i}{dt}=0,\qquad \frac{d\eta_i}{dt}=-\sum_k\frac{d^2F_0}{dx_i^0 dx_k^0}\xi_k.$$

Les coëfficients de ξ_k dans la seconde équation (2′) sont des constantes.

Nous prendrons comme solutions des équations (2′)

$$\xi_1=\xi_2=\xi_3=0,\qquad \eta_1=\eta_1^0,\qquad \eta_2=\eta_2^0,\qquad \eta_3=\eta_3^0,$$

η_1^0, η_2^0 et η_3^0 étant trois constantes d'intégration.

Cette solution n'est pas la plus générale puisqu'elle ne contient que trois constantes arbitraires, mais c'est la plus générale parmi celles que

135

 §12.

l'on peut ramener à la forme (3). Nous voyons ainsi que pour $\mu = 0$, les six exposants caractéristiques sont nuls.

Ne supposons plus maintenant que μ soit nul. Nous allons maintenant chercher à développer α, S_i et T_i, non pas suivant les puissances croissantes de μ, mais suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ en écrivant:

$$\alpha = \alpha_1\sqrt{\mu} + \alpha_2\mu + \alpha_3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$

$$S_i = S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + S_i^2\mu + S_i^3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$

$$T_i = T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + T_i^2\mu + T_i^3\mu\sqrt{\mu} + \dots.$$

~~Alors on a:~~

$$S_i^0 = 0, \qquad T_i^0 = \eta_i^0$$

et:

$$\xi_i = e^{\alpha t}(S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + \dots), \qquad \eta_i = e^{\alpha t}(T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + \dots),$$

$$(4) \qquad \frac{d\xi_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\begin{matrix} \frac{dS_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\frac{dS_i^1}{dt} + \dots \\ + \alpha S_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}S_i^1 + \dots \end{matrix}\right|, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\begin{matrix} \frac{dT_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\frac{dT_i^1}{dt} + \dots \\ + \alpha T_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}T_i^1 + \dots \end{matrix}\right|.$$

Nous développerons d'autre part les dérivées secondes de F qui entrent comme coëfficients dans les équations (2) en écrivant:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2F}{dy_i dx_k} &= A_{ik}^0 + \mu A_{ik}^2 + \mu^2 A_{ik}^4 + \dots, \\ \frac{d^2F}{dy_i dy_k} &= B_{ik}^0 + \mu B_{ik}^2 + \mu^2 B_{ik}^4 + \dots, \\ -\frac{d^2F}{dx_i dx_k} &= C_{ik}^0 + \mu C_{ik}^2 + \mu^2 C_{ik}^4 + \dots, \\ -\frac{d^2F}{dx_i dy_k} &= D_{ik}^0 + \mu D_{ik}^2 + \mu^2 D_{ik}^4 + \dots. \end{aligned}$$

Ces développements ne contiennent que des puissances entières de μ et ne possèdent pas comme les développements (4) des termes dépendants de $\sqrt{\mu}$.

§12.

~~Note 12~~

Je me propose d'abord d'établir que ce développement est possible.

Montrons d'abord que les exposants caractéristiques ~~A~~ α peuvent se développer suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$.

D'après ce que nous avons vu au §11, les exposants caractéristiques nous seront donnés par l'équation suivante, en reprenant les notations des §§9 et 10:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - e^{\alpha T} & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - e^{\alpha T} & \cdots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \cdots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - e^{\alpha T} \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est holomorphe en α; de plus d'après le théorème III ~~Chapitre I~~ §2, les γ peuvent être développés suivant les puissances de μ et des β (Cf. §9), d'ailleurs d'après le §9 les β peuvent se développer eux-mêmes suivant les puissances de μ. D'après cela les γ et le déterminant que je viens d'écrire peuvent eux-mêmes être développés suivant les puissances de μ.

Il résulte de là que les exposants α nous sont donnés en fonction de μ par une équation:

$$G(\alpha, \mu) = 0$$

dont le premier membre est holomorphe en α et en μ.

Si pour $\mu = 0$, tous les exposants α étaient différents les uns des autres, l'équation $G = 0$ n'aurait pour $\mu = 0$ que des racines simples, et on en conclurait que les α seraient développables suivant les puissances de μ (Théorème IV ~~Chapitre I~~ §2)

Mais il n'en est pas ainsi; nous venons de voir en effet que pour $\mu = 0$, tous les α sont nuls.

Reprenons les notations du §11, notre équation pourra s'écrire, en supposant trois degrés de liberté seulement:

$$0 = G(\alpha,\mu) = \begin{vmatrix} \frac{d\Delta a_1}{d\delta a_1} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta\varpi_1} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta\varpi_2} & \frac{d\Delta a_1}{d\delta\varpi_3} \\ \frac{d\Delta a_2}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta a_2} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta\varpi_1} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta\varpi_2} & \frac{d\Delta a_2}{d\delta\varpi_3} \\ \frac{d\Delta a_3}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta a_3} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta\varpi_1} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta\varpi_2} & \frac{d\Delta a_3}{d\delta\varpi_3} \\ \frac{d\Delta\varpi_1}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta\varpi_1}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta\varpi_1}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta\varpi_1}{d\delta\varpi_1} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta\varpi_1}{d\delta\varpi_2} & \frac{d\Delta\varpi_1}{d\delta\varpi_3} \\ \frac{d\Delta\varpi_2}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta\varpi_2}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta\varpi_2}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta\varpi_2}{d\delta\varpi_1} & \frac{d\Delta\varpi_2}{d\delta\varpi_2} + 1 - e^{\alpha T} & \frac{d\Delta\varpi_2}{d\delta\varpi_3} \\ \frac{d\Delta\varpi_3}{d\delta a_1} & \frac{d\Delta\varpi_3}{d\delta a_2} & \frac{d\Delta\varpi_3}{d\delta a_3} & \frac{d\Delta\varpi_3}{d\delta\varpi_1} & \frac{d\Delta\varpi_3}{d\delta\varpi_2} & \frac{d\Delta\varpi_3}{d\delta\varpi_3} + 1 - e^{\alpha T} \end{vmatrix}$$

Cela fait, je pose:

$$\alpha = \lambda\sqrt{\mu}.$$

Je divise ~~ensuite~~ les trois premières lignes du déterminant par $\sqrt{\mu}$; je divise ensuite les trois dernières colonnes par $\sqrt{\mu}$. (de sorte que le déterminant lui-même se trouve finalement divisé par μ^3)

Je fais ensuite $\mu = 0$.

J'observe que d'après ce que nous avons vu au $\S$ 11, Δa_1, Δa_2, Δa_3 sont divisibles par μ. Si donc j'envisage le premier élément de la première ligne cet élément après la division par $\sqrt{\mu}$ s'écrira:

$$\frac{d\Delta a_1}{\sqrt{\mu}\, d\delta a_1} + \frac{1 - e^{\lambda T\sqrt{\mu}}}{\sqrt{\mu}}$$

et quand on y fera $\mu = 0$ il deviendra $-\lambda T$.

De même le second élément de la 1ère ligne s'écrit.

$$\frac{d\Delta a_1}{\sqrt{\mu}\, d\delta a_2}$$

et il tend vers 0 avec μ.

Ainsi quand on aura fait $\mu = 0$, les trois premiers éléments des trois premières lignes s'annuleront à l'exception des éléments de la diagonale principale qui deviendront égaux à $-\lambda T$.

Considérons maintenant les ~~deux~~ trois derniers éléments des trois dernières lignes; ils s'écriront:

$$\frac{d\Delta\varpi_i}{\sqrt{\mu}\, d\delta\varpi_i} + \frac{1 - e^{\lambda T\sqrt{\mu}}}{\sqrt{\mu}} \quad \text{ou} \quad \frac{d\Delta\varpi_k}{\sqrt{\mu}\, d\delta\varpi_i}$$

selon qu'ils appartiennent, ou non à la diagonale principale. D'après ce que nous avons vu au $\S$ 11, $\Delta\varpi_k$ est développable suivant les puissances de μ, des δa et des $\delta\varpi_i$; de plus, pour $\mu = 0$, $\Delta\varpi_k$ ne dépend pas des $\delta\varpi_i$. On en conclura que $\frac{d\Delta\varpi_k}{d\delta\varpi_i}$ est divisible par μ.

Donc ~~les trois~~ quand on fera $\mu = 0$, les trois derniers éléments des trois dernières lignes deviendront égaux à

$$-\lambda T \quad \text{ou à} \quad 0$$

selon qu'ils appartiennent ou non à la diagonale principale.

Considérons maintenant les trois premiers éléments des trois dernières lignes $\frac{d\Delta\varpi_i}{d\delta a_k}$.

D'après ce que nous avons vu au $\S$ 11, on a pour $\mu = 0$:

$$\frac{d\Delta\varpi_i}{d\delta a_k} = -T\frac{d^2 F_0}{dx_i\, dx_k}.$$

Passons enfin aux trois derniers éléments des trois premières lignes qui s'écrivent

§12.

$$\frac{d\Delta a_i}{\mu\, d\,\delta\varpi_k}$$

~~Soit~~ ~~Rappelons ce que nous avons vu au~~ D'après ce que nous avons vu au §11, si dans F_1 on substitue ~~à la p~~ $a_1, a_2, a_3, n_1 t+\varpi_1, n_2 t+\varpi_2, n_3 t+\varpi_3$ à la place de $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$; on voit que F_1 devient une fonction périodique de t de période T et si l'on appelle ψ la valeur moyenne de cette fonction périodique, on a pour $\mu = 0$:

$$\frac{\Delta a_i}{\mu} = T\frac{d\psi}{d\varpi_i},$$

d'où

$$\frac{d\,\Delta a_i}{\mu\, d\,\delta\varpi_k} = T\frac{d^2\psi}{d\varpi_i\, d\varpi_k}.$$

~~Nous en conclurons que pour μ =~~

Il importe de remarquer que l'on a identiquement

$$n_1\frac{d\psi}{d\varpi_1} + n_2\frac{d\psi}{d\varpi_2} + n_3\frac{d\psi}{d\varpi_3} = 0.$$

Nous voyons donc que pour $\mu = 0$ on a:

$$\frac{G(\lambda\sqrt{\mu}, \mu)}{\mu^3\, T^6} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1^2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1 d\varpi_2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1 d\varpi_3} \\ 0 & -\lambda & 0 & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1 d\varpi_2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_2 d\varpi_3} \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{d^2\psi}{d\varpi_1 d\varpi_3} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_2 d\varpi_3} & \frac{d^2\psi}{d\varpi_3^2} \\ -\frac{d^2F_0}{dx_1^2} & -\frac{d^2F_0}{dx_1 dx_2} & -\frac{d^2F_0}{dx_1 dx_3} & -\lambda & 0 & 0 \\ -\frac{d^2F_0}{dx_1 dx_2} & -\frac{d^2F_0}{dx_2^2} & -\frac{d^2F_0}{dx_2 dx_3} & 0 & -\lambda & 0 \\ -\frac{d^2F_0}{dx_1 dx_3} & -\frac{d^2F_0}{dx_2 dx_3} & -\frac{d^2F_0}{dx_3^2} & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

En égalant à 0 ce déterminant, on a une équation du 6e degré en λ, deux de ses racines sont nulles; nous n'en parlerons pas, car elles se rapportent aux deux solutions particulières de forme dégénérescente dont j'ai parlé plus haut. Les quatre autres solutions sont distinctes en général.

Il résulte alors du théorème IV (~~[illegible]~~ §2) que nous pourrons tirer de l'équation

$$\frac{G(\lambda\sqrt{\mu}, \mu)}{\mu^3 T^6} = 0$$

λ (et par conséquent α) sous la forme d'une série développée suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$. J'ajouterai que λ peut se développer suivant les puissances de μ et que le développement de α ne contient que des ~~racines~~ puissances impaires de $\sqrt{\mu}$. En effet les racines de l'équation:

$$G(\alpha, \mu) = 0$$

doivent être deux à deux égales et de signe contraire (cf. §10). Donc ~~elles~~ α doit changer de signe quand je change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$.

Démontrons maintenant que S_i et T_i peuvent ~~encore~~ aussi se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

~~Les~~ S_i et T_i nous sont donnés en effet par les équations suivantes:

$$(2'')\qquad \begin{aligned} \frac{dS_i}{dt} + \alpha S_i &= \sum \frac{d^2F}{dy_i\, dx_k} S_k + \sum \frac{d^2F}{dy_i\, dy_k} T_k \\ \frac{dT_i}{dt} + \alpha T_i &= -\sum \frac{d^2F}{dx_i\, dx_k} S_k - \sum \frac{d^2F}{dx_i\, dy_k} T_k . \end{aligned}$$

Soit β_i la valeur initiale de S_i et β'_i celle de T_i; les valeurs de S_i et de T_i pour une valeur quelconque de t pourront d'après le théorème III, ~~(chapitre 1er~~ § 2 se développer suivant les puissances de μ, ~~de~~ α, des β_i et des β'_i. De plus à cause de la forme linéaire des équations, ces valeurs seront des fonctions linéaires et homogènes des β_i et des β'_i.

~~Soit ψ_i l'accroissement que prend S_i quand t varie de 0 à T~~

Soit, pour employer des ~~conformément aux~~ notations analogues à celles du § 9, $\beta_i + \psi_i$ la valeur de S_i et ~~celle~~ $\beta'_i + \psi'_i$ celle de T_i pour $t = T$. La condition pour que la solution soit périodique c'est que l'on ait

$$\psi_i = \psi'_i = 0.$$

Les ψ_i et les ψ'_i sont des fonctions linéaires des β_i et des β'_i; ces équations sont donc linéaires par rapport à ces quantités. En général ces équations n'admettent d'autre solution que

$$\beta_i = \beta'_i = 0.$$

de sorte que les équations (2'') n'ont d'autre solution périodique que

$$S_i = T_i = 0.$$

Mais nous savons que si l'on choisit α de façon à satisfaire à $G(\alpha, \mu) = 0$, les équations (2'') admettent ~~une~~ des solutions périodiques autres que $S_i = T_i = 0$ (127 § 12). Par conséquent le déterminant des équations linéaires $\psi_i = \psi'_i = 0$ est nul. Nous pourrons donc tirer de ces équations les rapports:

$$\cancel{\frac{\beta_i}{\beta'_1} =} \qquad \frac{\beta_i}{\beta'_1} \quad \text{et} \quad \frac{\beta'_i}{\beta'_1}$$

~~ces rapports pourront être développés suivant les~~ sous la forme de séries développées suivant les puissances de α et de μ.

~~Nous conviendrons de prendre $\beta'_1 = 1$,~~

Comme β'_1 reste arbitraire, nous conviendrons de prendre $\beta'_1 = 1$ de telle sorte que la valeur initiale de T_1 soit égale à 1. Les β_i et les β'_i sont alors développés suivant les puissances de α et de μ; mais les S_i et les T_i sont comme nous l'avons vu développables suivant les puissances de α, de μ ~~et~~, des β_i et des β'_i et ~~les~~ d'autre part α est développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

§12.

Donc les S_i et les T_i seront développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

C.Q.F.D.

On aura en particulier:

$$T_1 = T_1^0 + T_1^1\sqrt{\mu} + T_1^2\mu + \ldots$$

Comme, d'après notre hypothèse, β_1' qui est la valeur initiale de T_1 doit être égale à 1, quel que soit μ, on aura pour $t=0$:

$$T_1^0 = 1\,,\quad 0 = T_1^1 = T_1^2 = \ldots = T_1^m = \ldots$$

Ayant ainsi démontré l'existence de nos séries, nous allons chercher à en déterminer les coefficients.

Nous avons:

$$S_i^0 = 0, \qquad T_i^0 = \eta_i^0$$

et:

$$\xi_i = e^{\alpha t}(S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + \ldots), \qquad \eta_i = e^{\alpha t}(T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + \ldots),$$

(4)
$$\frac{d\xi_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\begin{array}{l}\dfrac{dS_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\dfrac{dS_i^1}{dt} + \ldots \\ + \alpha S_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}S_i^1 + \ldots\end{array}\right|, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = e^{\alpha t}\left|\begin{array}{l}\dfrac{dT_i^0}{dt} + \sqrt{\mu}\dfrac{dT_i^1}{dt} + \ldots \\ + \alpha T_i^0 + \alpha\sqrt{\mu}T_i^1 + \ldots\end{array}\right|.$$

Nous développerons d'autre part les dérivées secondes de F qui entrent comme coefficients dans les équations (2) en écrivant:

(5)
$$\begin{aligned}
\frac{d^2F}{dy_i dx_k} &= A_{ik}^0 + \mu A_{ik}^2 + \mu^2 A_{ik}^4 + \ldots, \\
\frac{d^2F}{dy_i dy_k} &= B_{ik}^0 + \mu B_{ik}^2 + \mu^2 B_{ik}^4 + \ldots, \\
-\frac{d^2F}{dx_i dx_k} &= C_{ik}^0 + \mu C_{ik}^2 + \mu^2 C_{ik}^4 + \ldots, \\
-\frac{d^2F}{dx_i dy_k} &= D_{ik}^0 + \mu D_{ik}^2 + \mu^2 D_{ik}^4 + \ldots.
\end{aligned}$$

Ces développements ne contiennent que des puissances entières de μ et ne possèdent pas comme les développements (4) des termes dépendants de $\sqrt{\mu}$.

141

On observera que:

$$
(6)\qquad
\begin{gathered}
A_{ik}^{0} = B_{ik}^{0} = D_{ik}^{0} = 0,\\
C_{ik}^{m} = C_{ki}^{m}, \qquad B_{ik}^{m} = B_{ki}^{m}, \qquad A_{ik}^{m} = -D_{ki}^{m}.
\end{gathered}
$$

Nous substituons dans les équations (2) les valeurs (4) et (5) à la place des ξ, des η, de leurs dérivées et des dérivées secondes de F. Dans les expressions (4) je suppose que α soit développé suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, sauf lorsque cette quantité α entre dans un facteur exponentiel $e^{\alpha t}$.

Nous identifierons ensuite en égalant les puissances semblables de $\sqrt{\mu}$ et nous obtiendrons ainsi une série d'équations qui permettent de déterminer successivement:

$$
\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \text{etc.}\quad S_i^0,\ S_i^1,\ \ldots,\ T_i^0,\ T_i^1,\ \ldots.
$$

Je n'écrirai que les premières de ces équations obtenues en égalant successivement les termes tout connus, les termes en $\sqrt{\mu}$, les termes en μ etc. Je fais d'ailleurs disparaître le facteur $e^{\alpha t}$ qui se trouve partout.

Egalons d'abord les termes en $\sqrt{\mu}$, il vient:

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dS_i^1}{dt} + \alpha_1 S_i^0 &= \Sigma_k A_{ik}^0 S_k^1 + \Sigma_k B_{ik}^0 T_k^1,\\
\frac{dT_i^1}{dt} + \alpha_1 T_i^0 &= \Sigma_k C_{ik}^0 S_k^1 + \Sigma_k D_{ik}^0 T_k^1.
\end{aligned}
$$

Egalons les termes en μ, il vient:

$$
(8)\qquad \frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 + \alpha_2 S_i^0 = \Sigma_k (A_{ik}^0 S_k^2 + A_{ik}^2 S_k^0 + B_{ik}^0 T_k^2 + B_{ik}^2 T_k^0), \qquad (i=1,2,3)
$$

outre trois équations analogues donnant les $\frac{dT_i^2}{dt}$.

Si l'on tient compte maintenant des relations (6), les équations (7) deviennent:

$$
\frac{dS_i^1}{dt} = 0, \qquad \frac{dT_i^1}{dt} + \alpha_1 \eta_i^0 = \Sigma_k C_{ik}^0 S_k^1.
$$

La première de ces équations montre que S_1^1, S_2^1 et S_3^1 sont des con-

142

stantes. Quant à la seconde, elle montre que $\frac{dT_i^1}{dt}$ est une constante; mais comme T_i^1 doit être une fonction périodique, cette constante doit être nulle, de sorte qu'on a:

$$\alpha_1 \eta_i^0 = C_{i1}^0 S_1^1 + C_{i2}^0 S_2^1 + C_{i3}^0 S_3^1, \tag{9}$$

ce qui établit trois relations entre les trois constantes η_i^0, les trois constantes S_i^1 et la quantité inconnue α_1.

De son côté l'équation (8) s'écrira:

$$\frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 = \sum_k B_{ik}^2 \eta_k^0.$$

Les B_{ik}^2 sont des fonctions périodiques de t; développons-les d'après la formule de Fourier et soit b_{ik} le terme tout connu de B_{ik}^2. Il viendra:

$$\alpha_1 S_i^1 = \sum_k b_{ik} \eta_k^0$$

ou en tenant compte des équations (9), il viendra:

$$\alpha_1^2 S_i^1 = \sum_{k=1}^{k=3} b_{ik}(C_{k1}^0 S_1^1 + C_{k2}^0 S_2^1 + C_{k3}^0 S_3^1). \tag{10}$$

En faisant dans cette équation (10) $i = 1, 2$ et 3, nous aurons trois relations linéaires et homogènes entre les trois constantes S_i^1. En éliminant ces trois constantes, nous aurons alors une équation du 3me degré qui déterminera α_1^2.

Si nous posons pour abréger

$$e_{ik} = b_{i1} C_{1k}^0 + b_{i2} C_{2k}^0 + b_{i3} C_{3k}^0,$$

l'équation due à cette élimination s'écrira:

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \alpha_1^2 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - \alpha_1^2 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Elle peut encore s'écrire:

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & C^0_{11} & C^0_{12} & C^0_{13} \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & C^0_{21} & C^0_{22} & C^0_{23} \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & C^0_{31} & C^0_{32} & C^0_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & -\alpha_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La détermination de α_1 est la seule partie du calcul qui présente quelque difficulté.

Les équations analogues à (7) et à (8) formées en égalant dans les équations (2) les coëfficients des puissances semblables de $\sqrt{\mu}$, permettent ensuite de déterminer sans peine les α_k, les S_i^m et les T_i^m. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

Les exposants caractéristiques α sont développables suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$.[1]

Concentrant donc toute notre attention sur la détermination de α_1, nous allons étudier spécialement l'équation (11). Nous devons chercher d'abord à déterminer les quantités C^0_{ik} et b_{ik}.

On a évidemment:

$$C^0_{ik} = -\frac{d^2F_0}{dx_i^0\,dx_k^0}$$

et

$$B^2_{ik} = \frac{d^2F_1}{dy_i^0\,dy_k^0}$$

ou

$$B^2_{ik} = -\sum A m_i m_k \sin\omega \qquad (\omega = m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h)$$

et

$$b_{ik} = -\mathrm{S} A m_i m_k \sin\omega.$$

D'après les conventions faites dans le paragraphe précédent, la sommation représentée par le signe Σ s'étend à tous les termes, quelles que

[1] ~~Voir Note I.~~

144

soient les valeurs entières attribuées à m_1, m_2 et m_3. La sommation représentée par le signe S s'étend seulement aux termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 = 0.$$

Sous le signe S nous avons par conséquent:

$$\omega = m_2 \varpi_2 + m_3 \varpi_3 + h.$$

Cela nous permet d'écrire

$$b_{ik} = \frac{d^2\psi}{d\varpi_i d\varpi_k} \qquad (\text{pour } i \text{ et } k = 2 \text{ ou } 3).$$

Si un ou deux des indices i et k sont égaux à 1, b_{ik} sera défini par la relation

$$n_1 b_{i1} + n_2 b_{i2} + n_3 b_{i3} = 0.$$

Nous allons à l'aide de cette dernière relation, transformer l'équation (11) de façon à mettre en évidence l'existence de deux racines nulles et à réduire l'équation au quatrième degré.

Je trouve en effet par une simple transformation de déterminant et en divisant par α_1^2:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & b_{23} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & b_{33} & b_{32} & 0 \\ C_{13}^0 & C_{23}^0 & C_{33}^0 & -\alpha_1 & 0 & n_3 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & C_{32}^0 & 0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & C_{31}^0 & 0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas particulier où l'on n'a plus que deux degrés de liberté, cette équation s'écrit:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & \dfrac{d^2\psi}{d\varpi_2^2} & 0 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & 0. & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

145

ou:

$$n_1^2\alpha_1^2 = \frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}(n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0).$$

L'expression $n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0$ ne dépend que de x_1^0 et x_2^0 ou si l'on veut de n_1 et de n_2. Quand nous nous serons donné les deux nombres n_1 et n_2 dont le rapport doit être commensurable, nous pourrons regarder $n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0$ comme une constante donnée. Alors le signe de α_1^2 dépend seulement de celui de $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$.

Quand on s'est donné n_1 et n_2, on forme l'équation:

$$\frac{d\psi}{d\varpi_2} = 0, \qquad (~~15~~\ 12)$$

qui est l'équation (~~25~~ 5) du paragraphe précédent. Nous avons vu dans ce paragraphe qu'à chaque racine de cette équation correspond une solution périodique.

Considérons le cas général où l'équation (~~15~~ 12) n'a que des racines simples; chacune de ces racines correspond alors à un maximum ou à un minimum de ψ. Mais la fonction ψ étant périodique présente dans chaque période au moins un maximum et un minimum et précisément autant de maxima que de minima.

Or pour les valeurs de ϖ_2 correspondant à un minimum, $\frac{d^2\psi}{d\varpi_2^2}$ est positif; pour les valeurs correspondant à un maximum, cette dérivée est négative.

Donc l'équation (~~15~~ 12) aura précisément autant de racines pour lesquelles cette dérivée sera positive, que de racines pour lesquelles cette dérivée sera négative, et par conséquent autant de racines pour lesquelles α_1^2 sera positif que de racines pour lesquelles α_1^2 sera négatif.

Cela revient à dire qu'il y aura précisément autant de solutions périodiques stables que de solutions instables, en donnant à ce mot le même sens que dans le paragraphe 2 de ce chapitre.

Ainsi, ~~si μ est suffisamment petit~~, à chaque système de valeurs de n_1 et de n_2, correspondront au moins une solution périodique stable et une solution périodique instable et précisément autant de solutions stables que de solutions instables.

pourvu que μ soit suffisamment petit

146

Je n'examinerai pas ici comment ces résultats s'étendraient au cas où l'équation (15) aurait des racines multiples.

Här inskjutes note 13

§ 13. *Solutions asymptotiques.*

Soient:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{1}$$

137, §13

n équations différentielles simultanées. Les X sont des fonctions des x et de t.

Par rapport aux x elles peuvent être développées en séries de puissances.

Par rapport à t, elles sont périodiques de période 2π.

Soit:

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n = x_n^0$$

une solution particulière périodique de ces équations. Les x_i^0 seront des fonctions de t périodiques de période 2π. Posons:

$$x_i = x_i^0 + \xi_i.$$

Il viendra:

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Xi_i. \tag{2}$$

Les Ξ seront des fonctions des ξ et de t, périodiques par rapport à t et développées suivant les puissances des ξ; mais il n'y aura plus de termes indépendants des ξ.

Si les ξ sont très petits et qu'on néglige leurs carrés, les équations se réduisent à

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1^0}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2^0}\xi_2 + \dots + \frac{dX_i}{dx_n^0}\xi_n, \tag{3}$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

I

~~Note D~~

Voici comment il faudrait continuer le calcul.

Imaginons que l'on ait déterminé complètement les quantités

$$\alpha_1, \alpha_2, \text{———}, \alpha_m$$

et les fonctions:

$$S_i^0, S_i^1, \text{———}, S_i^m$$

$$T_i^1, T_i^1, \text{———}, T_i^{m-1}$$

et que l'on ~~ait calculé ensuite~~ connaisse les fonctions S_i^{m+1} et T_i^m à une constante près

Supposons qu'on se propose ensuite ~~de déterminer~~ de calculer α_{m+1}, d'achever la détermination des fonctions S_i^{m+1} et T_i^m et de déterminer ensuite les fonctions S_i^{m+2} et T_i^{m+1} à une constante près.

En égalant les puissances semblables de μ dans les équations (4) on obtient des équations de la forme suivante, analogues aux équations (7) et (8)

II

$$-\frac{dT_i^{m+1}}{dt} \cancel{\frac{dS_i^{m+2}}{dt}} + \sum_k C_{ik}^0 S_k^{m+1} - \alpha_1 T_i^m - \alpha_{m+1} T_i^0 = \text{quantité connue}$$

$$-\frac{dS_i^{m+2}}{dt} + \sum_k B_{ik}^2 T_k^m - \alpha_1 S_i^{m+1} - \alpha_{m+1} S_i^1 = \text{quantité connue} \qquad (12)$$

~~ces équat.~~

$$(i = 1, 2, 3)$$

Les deux membres de ces équations (12) sont des fonctions périodiques de t. Égalons la valeur moyenne de ces deux membres. Si nous désignons par $[U]$ la valeur moyenne d'une fonction périodique quelconque U, si nous observons que si U est périodique, on a

$$\left[\frac{dU}{dt}\right] = 0,$$

si nous rappelons que, T_k^m étant connu à une constante près, $T_k^m - [T_k^m]$ et

$$\left[B_{ik}^2\left(T_k^m - [T_k^m]\right)\right]$$

sont des quantités connues, nous obtiendrons les équations suivantes

$$\sum_k C_{ik}^0 [S_k^{m+1}] - \alpha_1 [T_i^m] - \alpha_{m+1} T_i^0 = \text{quantité connue.}$$

$$\sum_k b_{ik} [T_k^m] - \alpha_1 [S_i^{m+1}] - \alpha_{m+1} S_i^1 = \text{quantité connue} \qquad (13)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

Ces équations (13) vont nous servir à calculer α_{m+1}, $[T_i^m]$ et $[S_i^{m+1}]$ et par conséquent à achever la détermination des fonctions T_i^m et S_i^{m+1} qui ne sont encore connues qu'à une constante près.

Si l'on additionne les équations (13) après les avoir respectivement multipliées par

$$S_1^1, S_2^1, S_3^1, T_1^0, T_2^0, T_3^0$$

on trouve:

$$2 \sum_i S_i^1 T_i^0 \alpha_{m+1} = \text{quantité connue}$$

§12.

Donc les S_i et les T_i seront développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$

C. Q. F. D.

On aura en particulier:

$$T_1 = T_1^0 + T_1^1\sqrt{\mu} + T_1^2\mu +$$

Comme, d'après notre hypothèse, β_1' qui est la valeur initiale de T_1 doit être égale à 1, quel que soit μ, on aura pour $t=0$:

$$T_1^0 = 1 , \quad 0 = T_1^1 = T_1^2 = \quad\quad = T_1^m = $$

Ayant ainsi démontré l'existence de nos séries, nous allons chercher à en déterminer ~~les coefficients.~~

~~Nous avons~~

N

ce qui détermine α_{m+1}.
Si dans les équations ( ) on remplace α_{m+1} par la valeur ainsi trouvée, on a pour déterminer les six inconnues $[T_i^m]$ et $[S_i^{m+1}]$ six équations linéaires dont cinq seulement sont indépendantes.

II Cela posé, on déterminera $[T_1^m]$ par la condition que $[T_1^m]$ soit nul pour $t=0$, conformément à l'hypothèse faite plus haut et les cinq équations ( ) restées indépendantes permettront de calculer les cinq autres inconnues.
Les équations ( ) nous permettront ensuite de calculer $\frac{dT_i^{m+1}}{dt}$ et $\frac{dS_i^{m+2}}{dt}$ et par conséquent de déterminer les fonctions T_i^{m+1} et S_i^{m+2} à une constante près — et ainsi de suite.

(Forts. s. 146)

149

Elles sont linéaires et à coefficients périodiques. On connait la forme de leur intégrale générale, on trouve:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{11} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{21} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n1},\\
\xi_2 &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{12} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{22} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{n2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= A_1 e^{\alpha_1 t}\varphi_{1n} + A_2 e^{\alpha_2 t}\varphi_{2n} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\varphi_{nn};
\end{aligned}$$

les A sont des constantes d'intégration, les α des constantes fixes qu'on appelle exposants caractéristiques, les φ des fonctions périodiques de t.

Si alors nous posons:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \eta_1\varphi_{11} + \eta_2\varphi_{21} + \ldots + \eta_n\varphi_{n1},\\
\xi_2 &= \eta_1\varphi_{12} + \eta_2\varphi_{22} + \ldots + \eta_n\varphi_{n2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi_n &= \eta_1\varphi_{1n} + \eta_2\varphi_{2n} + \ldots + \eta_n\varphi_{nn},
\end{aligned}$$

les équations (2) deviendront:

$$(2') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i$$

où les H_i sont des fonctions de t et des η de même forme que les Ξ.

Nous pourrons d'ailleurs écrire

$$(2') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 + H_i^2 + \ldots + H_i^n + \ldots;$$

H_i^p représente l'ensemble des termes de H_i qui sont de degré p par rapport aux η.

Quant aux équations (3), elles deviennent:

$$(3') \qquad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 = \alpha_i\eta_i.$$

Cherchons maintenant la forme des solutions générales des équations (2) et (2').