

Je dis que nous devons trouver:

$\eta_i =$ fonction développée suivant les puissances de $A_1 e^{a_1 t}$, $A_2 e^{a_2 t}$, ..., $A_n e^{a_n t}$ dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t .

Nous pouvons écrire alors:

$$(4') \quad \eta_i = \eta_i^1 + \eta_i^2 + \dots + \eta_i^p + \dots,$$

η_i^p représentant l'ensemble des termes de η_i qui sont de degré p par rapport aux A .

Nous remplacerons les η_i par leurs valeurs dans H_i^p et nous trouverons:

$$H_i^p = H_i^{p,p} + H_i^{p,p+1} + \dots + H_i^{p,q} + \dots,$$

$H_i^{p,q}$ désignant l'ensemble des termes qui sont de degré q par rapport aux A .

Nous trouverons alors:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_i^1}{dt} - a_i \eta_i^1 &= 0, & \eta_i^1 &= A_i e^{a_i t}, \\ \frac{d\eta_i^2}{dt} - a_i \eta_i^2 &= H_i^{2,2}, & \frac{d\eta_i^3}{dt} - a_i \eta_i^3 &= H_i^{2,3} + H_i^{3,3}, \\ & \dots & & \dots \\ \frac{d\eta_i^q}{dt} - a_i \eta_i^q &= H_i^{2,q} + H_i^{3,q} + \dots + H_i^{q,q} = K_q. \end{aligned}$$

Ces équations permettront de calculer successivement par récurrence

$$\eta_i^2, \eta_i^3, \dots, \eta_i^q, \dots$$

En effet K_q ne dépend que des $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^{q-1}$. Si nous supposons que ces quantités aient été préalablement calculées, nous pourrions écrire K_q sous la forme suivante:

$$K_q = \sum A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n} e^{(a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + \dots + a_n \beta_n) t} \phi,$$

les β étant des entiers positifs dont la somme est q et ϕ une fonction périodique.

On peut écrire encore:

$$\phi = \sum C e^{i t / \omega},$$

157

§ 3. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. 91

C étant un coefficient généralement imaginaire et γ un entier positif ou négatif. Nous écrirons pour abrégé:

$$A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n} = A^q, \quad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n = \sum \alpha \beta,$$

et il viendra:

$$\frac{d\eta_l^q}{dt} - \alpha_l \eta_l^q = \sum C A^q e^{i(\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha \beta t)}.$$

Or on peut satisfaire à cette équation en faisant:

$$\eta_l^q = \sum \frac{C A^q e^{i(\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha \beta t)}}{\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha \beta - \alpha_l}.$$

Il y aurait exception dans le cas où l'on aurait:

$$\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha \beta - \alpha_l = 0,$$

auquel cas il s'introduirait dans les formules des termes en t . Nous réserverons ce cas qui ne se présente pas en général.

Nous devons maintenant traiter la question de la convergence de ces séries. La seule difficulté provient d'ailleurs comme on va le voir des diviseurs

$$(5) \quad \gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha \beta - \alpha_l.$$

En effet remplaçons les équations (2') par les suivantes:

$$(2'') \quad \eta_l = A_l e^{a_l t} + \overline{H}_l^2 + \overline{H}_l^3 + \dots + \overline{H}_l^p + \dots$$

Définissons $\overline{H}_l^p$. On voit sans peine que H_l^p est de la forme suivante:

$$H_l^p = \sum C \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n} e^{i\gamma\sqrt{-1} t}.$$

C est une constante quelconque, les β sont des entiers positifs dont la somme est p , γ est un entier positif ou négatif. Nous prendrons alors:

$$\overline{H}_l^p = \sum |C| \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n}.$$

Les séries ainsi obtenues seront convergentes pourvu que les séries trigonométriques qui définissent les fonctions périodiques dont dépendent

Cette convergence est une conséquence immédiate des résultats obtenus dans le § 3 (religion 122) mais je préfère en donner une démonstration directe

Hab / R
L L L 1/2

152

les H convergent absolument et uniformément; or cela aura toujours lieu parce que ces fonctions périodiques sont analytiques.

On peut tirer des équations (2'') les η sous la forme suivante:

$$(4'') \quad \eta_i = \sum M A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n} e^{(\sum \alpha_j \beta_j) t}.$$

Plusieurs termes pourront d'ailleurs correspondre aux mêmes exposants β . Si on compare avec les séries tirées de (2') qui s'écrivent:

$$\eta_i = \sum N \frac{A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n}}{\Pi} e^{(\sum \alpha_j \beta_j + r\sqrt{-1}) t}$$

voici ce qu'on observe: 1° M est réel positif et plus grand que $|N|$.

2° Π désigne le produit des diviseurs (5) ($q < \sum \beta$).

Si donc la série (4'') converge ~~pourvu que l'on ait~~

$$|A_i e^{\alpha_i t}| < R \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

si aucun des diviseurs (5) n'est plus petit que ε , la série (4') convergera ~~pourvu que~~

$$|A_i e^{\alpha_i t}| < R.$$

Voici donc comment on peut énoncer la condition de convergence.

La série converge:

Si l'expression

$$r\sqrt{-1} + \sum \alpha_j \beta_j - \alpha_i$$

ne peut pas devenir plus petite que toute quantité donnée pour des valeurs entières et positives des β et entières (positives ou négatives) de r ; c'est à dire si aucun des deux polygones convexes qui enveloppe, le premier les α et $+\sqrt{-1}$, le second les α et $-\sqrt{-1}$, ne contient l'origine.

Ou si toutes les quantités α ont leurs parties réelles de même signe et si aucune d'elles n'a sa partie réelle nulle.

Que ferons-nous alors s'il n'en est pas ainsi.

Supposons par exemple que k des quantités α aient leur partie réelle positive, et que $n-k$ aient leur partie réelle négative ou nulle. Il arrivera alors que la série (4') restera convergente si on y annule les constantes A qui correspondent à un α dont la partie réelle est négative ou nulle, de sorte que ces séries ne nous donneront plus la solution gé-

λ $\frac{2}{\lambda}$ car $\alpha \in$
est une
constante
positive

H α_j
 H α_j

L et
également

L ε

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

nérale des équations proposées, mais une solution contenant seulement k constantes arbitraires.

Si on suppose que les équations données rentrent dans les équations de la dynamique, nous avons vu que n est pair et que les α sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Alors si k d'entre eux ont leur partie réelle positive, k auront leur partie réelle négative et $n - 2k$ auront leur partie réelle nulle. En prenant d'abord les α qui ont leur partie réelle positive, on obtiendra une solution particulière contenant k constantes arbitraires; on en obtiendra une seconde en prenant les α qui ont leur partie réelle négative.

Dans le cas où aucun des α n'a sa partie réelle nulle et en particulier si tous les α sont réels, on a d'ailleurs:

$$k = \frac{n}{2}.$$

Si maintenant nous supposons que dans les équations (1) les X dépendent d'un paramètre μ de telle sorte que ces fonctions X soient développables suivant les puissances de μ , les quantités η_i seront encore représentables par les séries (4'), mais ces séries seront développées, non seulement suivant les puissances des $A_i e^{\alpha_i t}$, mais encore suivant les puissances de μ .

Il peut arriver toutefois que ces séries (4') au lieu d'être développées suivant les puissances de μ , le soient suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$. En effet les α_i sont aussi des fonctions de μ ; il arrivera en général que les α_i^2 seront développés suivant les puissances de μ , mais dans certains cas particuliers, $\sqrt{\mu}$ s'introduira dans les α_i et par conséquent dans les séries (4'). C'est précisément, d'après ce que nous avons vu au paragraphe précédent, ce qui arrive dans le cas des équations (1) du § 3 de ce chapitre.¹

Nous allons nous placer maintenant dans un cas très particulier. Supposons d'abord $n = 2$, de telle façon que les équations (1) se réduisent à:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2.$$

¹ Les développements contiennent en général à la fois des puissances positives et négatives de $\sqrt{\mu}$. Mais les puissances négatives disparaissent dans les cas où les solutions asymptotiques subsistent pour $\mu = 0$. C'est ce qui arrive dans la plupart des applications et en particulier pour les équations de la dynamique. (Voir Note I.)

154

Supposons de plus que

$$(6) \quad \frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} = 0.$$

La situation du système dépend alors des trois quantités x_1 , x_2 et t ; on peut donc la représenter par la position d'un point dans l'espace; voici quel mode de représentation on peut adopter pour fixer les idées:

Les coordonnées rectangulaires du point représentatif seront:

$$e^{x_1} \cos t, e^{x_1} \sin t \text{ et } x_2.$$

De cette façon

1°. A tout système de valeurs des trois quantités x_1 , x_2 et t correspondra un point de l'espace.

2°. A tout point de l'espace correspondra un seul système de valeurs des quantités x_1 , x_2 , $\cos t$, $\sin t$, et par conséquent une seule situation du système si l'on ne considère pas comme distinctes deux situations qui ne diffèrent que parce que t a augmenté d'un certain nombre de périodes 2π .

3°. Si l'on fait varier t , (x_1 et x_2 restant constants) le point représentatif décrit une circonférence.

4°. A la condition $x_1 = x_2 = 0$ correspond le cercle $z = 0, x^2 + y^2 = 1$.

5°. A la condition $x_1 = -\infty$ correspond l'axe des z .

A toute solution des équations (1) correspondra une courbe décrite par le point représentatif. Si la solution est périodique, cette courbe est fermée.

Considérons donc une courbe fermée C correspondant à une solution périodique.

Formons les équations (2), (3), (2') et (3') relatives à cette solution périodique et imaginons que l'on calcule les quantités α correspondantes.

Ces quantités sont au nombre de deux, et en vertu de la relation (6) elles sont égales et de signe contraire.

Deux cas peuvent se présenter: ou bien leur carré est négatif et la solution périodique est stable; ou bien leur carré est positif et la solution est instable.

Plaçons-nous dans ce dernier cas et appelons $+\alpha$ et $-\alpha$ les deux

155

§ 13. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. 95
valeurs de l'exposant α ; nous pourrions supposer alors que α est réel positif.

Cela posé, les séries (4') seront développées suivant les puissances croissantes de $Ae^{\alpha t}$ et de $Be^{-\alpha t}$; mais elles ne seront pas convergentes si A et B y entrent à la fois; elles le deviendront au contraire, si l'on y fait soit $A = 0$, soit $B = 0$.

Faisons d'abord $A = 0$; alors les η seront développées suivant les puissances de $Be^{-\alpha t}$; si donc t croît indéfiniment, η_1 et η_2 tendent simultanément vers 0. Les solutions correspondantes peuvent s'appeler *solutions asymptotiques*; car pour $t = +\infty$, les η et par conséquent les ξ tendent vers 0, ce qui veut dire que la solution asymptotique se rapproche asymptotiquement de la solution périodique considérée.

Si on fait de même $B = 0$, les η sont développés suivant les puissances de $Ae^{\alpha t}$; ils tendent donc vers 0 quand t tend vers $-\infty$. Ce sont donc encore des solutions asymptotiques.

Il y a donc deux séries de solutions asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Chacune d'elles contient une constante arbitraire, la première B , la seconde A .

A chacun de ces séries de solutions asymptotiques correspondra une série de courbes se rapprochant asymptotiquement de la courbe fermée C et qu'on pourra appeler courbes asymptotiques. L'ensemble de ces courbes asymptotiques formera une *surface asymptotique*. Il y aura deux surfaces asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Ces deux surfaces iront passer par la courbe fermée C .

note 14

~~Voici maintenant comment on peut trouver l'équation des surfaces asymptotiques.~~

~~Nous avons trouvé pour les séries (4') en y faisant $A = 0$~~

~~$$\eta_1 = B^2 e^{-2\alpha t} \phi_2 + B^3 e^{-3\alpha t} \phi_3 + B^4 e^{-4\alpha t} \phi_4 + \dots,$$~~

~~$$\eta_2 = B e^{-\alpha t} + B^2 e^{-2\alpha t} \theta_2 + B^3 e^{-3\alpha t} \theta_3 + \dots,$$~~

~~les ϕ et les θ étant des fonctions périodiques du temps. Si entre ces deux équations on élimine $Be^{-\alpha t}$, il vient:~~

~~$$(7) \quad \eta_1 = \eta_2^2 f_2 + \eta_2^3 f_3 + \eta_2^4 f_4 + \dots,$$~~

~~les f étant des fonctions périodiques du temps. C'est là l'équation de la~~

surface asymptotique et on n'a qu'à y remplacer les η par leurs valeurs en fonctions des ξ , puis des x , pour avoir cette équation sous la forme:

$$(8) \quad F(x_1, x_2, t) = 0.$$

La série (7) n'est convergente que pour les petites valeurs de η ; elle ne donne donc qu'un élément de la surface asymptotique cherchée; mais on peut trouver le reste par le moyen de la continuation analytique.

Si dans les équations (1), X_1 et X_2 dépendent d'un paramètre arbitraire μ , nous avons vu que les séries (4') (et par conséquent la série (7)) étaient développées également suivant les puissances croissantes de μ ou de $\sqrt{\mu}$. Nous pouvons donc écrire l'équation (8) sous la forme

$$F(x_1, x_2, t, \mu) = 0,$$

F étant une fonction holomorphe de μ . Il importe de remarquer que F reste une fonction holomorphe de μ même quand on donne aux η des valeurs telles que la série (7) ne soit plus convergente.¹

Il y a dans le cas qui nous occupe un invariant intégral que l'on peut écrire

$$\iiint dx_1 dx_2 dt = \iiint \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2}.$$

¹ Voir Note E (Sur le calcul des limites).

Note 14

Supposons que dans les équations (1) les X dépendent d'un paramètre μ et que les fonctions X soient développables suivant les puissances de ce paramètre.

Imaginons que pour $\mu = 0$, les exposants caractéristiques α soient tous distincts, de telle façon que ces exposants, étant définis par l'équation $G(\alpha, \mu) = 0$ du § précédent, soient eux-mêmes développables suivant les puissances de μ .

Supposons enfin qu'on ait, ainsi que nous venons de le dire, comme toutes les constantes A qui correspondent à un α dont la partie réelle est négative ou nulle.

Les séries (4') qui définissent les quantités η_i dépendent alors de μ . Je ne propose d'établir que ces séries peuvent être développées, non seulement suivant les puissances des $A_i e^{\alpha_i \mu}$, mais encore suivant les puissances de μ .

Nous arrivons au plus haut :

Considérons ^{les de l'un} également ^{l'inverse de l'un} des diviseurs (5)

$$(\gamma \sqrt{-1} + \sum \alpha \beta - \alpha_i)^{-1}$$

Je dis que cette expression peut être développée suivant les puissances de μ .

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ les k exposants caractéristiques dont la partie réelle est positive et que nous sommes convenus de conserver. Chacun d'eux est plus développable suivant les puissances de μ . Soit α_i^0 la valeur de α_i pour $\mu = 0$; nous pourrions prendre μ_0 assez petit pour que α_i diffère aussi peu que nous voudrions de α_i^0 ^{quand $|\mu| < \mu_0$} . Mais soit alors h une quantité positive plus petite que la plus petite des parties réelles des k quantités $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0$; nous pourrions prendre μ_0 assez petit pour que, quand $|\mu| < \mu_0$, les k exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ^{ait leur partie réelle} soit plus grande ~~de~~ que h .

La partie réelle de $\gamma \sqrt{-1} + \sum \alpha \beta - \alpha_i$ sera alors plus grande que h , ^(si $\beta_i > 0$) de sorte qu'on aura :

$$|\gamma \sqrt{-1} + \sum \alpha \beta - \alpha_i| > h.$$

Ainsi si $|\mu| < \mu_0$, la fonction

$$(\gamma \sqrt{-1} + \sum \alpha \beta - \alpha_i)^{-1}$$

reste uniforme, continue, finie et plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{h}$.

Nous en concluons d'après un théorème bien connu que cette fonction est développable suivant les puissances de μ et que les coefficients du développement sont plus petits en valeur absolue que ceux du développement de

$$\frac{1}{h(1 - \frac{\mu}{\mu_0})}$$

Il est à remarquer que les nombres h et μ_0 sont indépendants des entiers β et γ .

qui détermine x_{m+1}

Si dans les équations (13) on remplace x_{m+1} par la valeur ainsi trouvée, on a pour déterminer les ^{six inconnues} $[T_i^{m+1}]$ et $[S_i^{m+1}]$ six équations ^{linéaires} dont cinq seulement sont indépendantes.

Cela posé, on déterminera $[T_i^m]$ par la condition ^{supplémentaire} que T_i^m soit nul pour $t=0$, conformément à l'hypothèse faite plus haut et les cinq équations (13) restées indépendantes permettront de calculer les cinq autres inconnues.

Ensuite on aura aussi calculé x_n

Les équations (12) nous permettront ensuite de calculer $\frac{dT_i^{m+1}}{dt}$ et $\frac{dS_i^{m+2}}{dt}$ et par conséquent de déterminer les fonctions T_i^{m+1} et S_i^{m+2} à une constante près et ainsi de suite.

Il y aurait exception dans le cas où β_i serait nul. La partie réelle des diviseurs (5) pourrait alors être plus petite que h et même être négative. Elle ~~est égale~~ ^{est égale} en effet à la partie réelle de $\Sigma \alpha \beta$ qui est positive, ^{moins} la partie réelle de d_i qui est également positive et qui peut être plus grande que celle de $\Sigma \alpha \beta$, si β_i est nul.

Supposons que la partie réelle ~~reste~~ de d_i reste plus petite qu'un certain nombre h , tant que $|\mu| < \mu_0$. Alors si

$$(7) \quad \Sigma \beta > \frac{h_1}{h} + 1$$

la partie réelle de (5) est certainement plus grande que h ; il ~~pourrait~~ ^{ne peut donc} y avoir de difficulté que pour ceux des diviseurs (5) pour lesquels l'inégalité (7) n'a pas lieu.

Supposons maintenant que la partie imaginaire des quantités $d_1, d_2, \dots, d_k$ reste constamment plus petite que ^{en} valeur absolue qu'un certain nombre positif h_2 ; si l'on a alors:

$$(8) \quad |\gamma| > h_2 \Sigma \beta + h$$

la partie imaginaire de (5) et par conséquent son module sera encore plus grand que h ; de telle sorte qu'il ne peut y avoir de difficulté que pour ceux des diviseurs (5) pour lesquels aucune des inégalités (7) et (8) n'a lieu. Mais ces diviseurs qui ne satisfont à aucune de ces inégalités sont en nombre fini. ~~Alors~~

D'après une hypothèse que nous avons faite plus haut, aucun d'eux ne s'annule pour les valeurs de μ que nous considérons; nous pouvons donc prendre h et μ_0 assez petits pour que ^{la valeur absolue de} l'un quelconque d'entre eux reste plus grand que h quand $|\mu|$ reste plus petit que μ_0 .

Alors l'inverse d'un diviseur (5) quelconque est développable suivant les puissances de μ et les coefficients du développement sont plus petits en valeur absolue que ceux de

$$\frac{1}{h(1 - \frac{\mu}{\mu_0})}$$

Nous avons écrit plus haut

$$H_i^p = \Sigma C \eta_1^{f_1} \eta_2^{f_2} \dots \eta_n^{f_n} e^{\gamma + \sqrt{-1}}$$

D'après nos hypothèses, C peut être développé suivant les puissances de μ de telle sorte que je puis poser:

$$C = \Sigma E \mu^e, H_i^p = \Sigma E \mu^e \eta_1^{f_1} \eta_2^{f_2} \dots \eta_n^{f_n} e^{\gamma + \sqrt{-1}}$$

Nous reprenons maintenant les ~~mêmes~~ équations (2'') en y faisant:

$$\varepsilon = h(1 - \frac{\mu}{\mu_0}),$$

$$\bar{H}_i^p = \Sigma |E| \mu^e \eta_1^{f_1} \eta_2^{f_2} \dots \eta_n^{f_n} e^{\gamma + \sqrt{-1}}.$$

Les ~~deux~~ membres des ~~équations~~ (2'') auront alors des ~~termes~~ ^{convergentes} ordonnés ou donnés selon les puissances de μ , de $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, e^{\gamma + \sqrt{-1}}, e^{-\gamma + \sqrt{-1}}$.

158

S/3.

35

158

S/3.

On en tirera les η_i sous la forme de séries (4'') convergentes, et ordonnées suivant les puissances de

$$(4'') \quad \eta_i = \sum M e^{-\sum f_k} A_1^{f_1} A_2^{f_2} \dots A_k^{f_k} e^{\sum x_k t}$$

et comme M et $e^{-\sum f_k}$ sont développables en

ordonnées suivant les puissances de μ , $A_1 e^{x_1 t}$, $A_2 e^{x_2 t}$, ..., $A_k e^{x_k t}$.

Des équations (2') nous tirons d'autre part les η_i sous la forme de séries (4') ordonnées suivant les puissances de μ , $A_1 e^{x_1 t}$, $A_2 e^{x_2 t}$, ..., $A_k e^{x_k t}$, e^{tV-1} , e^{-tV-1} .

Chacun des termes de (4') est plus petit en valeur absolue que le terme correspondant de (4'') et comme les séries (4'') convergent, il en sera de même des séries (4').

§ 14. Solutions Asymptotiques, des Equations de la Dynamique.

Reprenons les Equations (1) du § II.

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i} \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et les hypothèses faites à leur sujet au début de ce paragraphe II.

Nous avons vu dans ce § II que ces Equations admettent des solutions périodiques et nous pouvons en conclure que pourvu que l'un des exposants caractéristiques α correspondants soit nul, ces Equations admettront aussi des solutions asymptotiques.

Reprenons les Equations (2') du § précédent.

A la fin du ^{paragraphe} § précédent, nous avons envisagé le cas où ^{les} les Equations (1) du § dans les Equations (1) du § ^{du} B, les seconds membres X_i sont développables suivant les puissances de μ , mais où les exposants caractéristiques restent distincts les uns des autres pour $\mu = 0$.

Dans le cas des Equations qui sont maintenant nous occupent, c'est à dire des Equations (1) des § ¹³ et ¹⁴, les seconds membres sont encore développables selon les puissances de μ ; mais tous les exposants caractéristiques sont nuls pour $\mu = 0$.

Il en résulte un grand nombre de différences importantes...

En premier lieu les exposants caractéristiques α ne sont pas développables suivant les puissances de μ , mais suivant celles de $\sqrt{\mu}$ (cf. § ¹²). De même les fonctions que j'ai appelées ψ_{ik} au début du § ¹³ (et qui ne sont autres, dans le cas particulier des Equations de la dynamique qui nous occupe ici, que les fonctions S_i et T_i du § ¹²) sont développables, non suivant les puissances de μ , mais suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Alors les Equations (2') du § ¹³ $\frac{d\eta_i}{dt} = H_i$

le second membre H_i est développé suivant les puissances des η , de $(e^{\frac{t\sqrt{-1}}{2}}, e^{-\frac{t\sqrt{-1}}{2}})$ et de $\sqrt{\mu}$ (et non pas de μ).

On en tirera les η_i sous la forme des séries obtenues au ^{paragraphe} § précédent.

$$(4') \quad \eta_i = \sum N \frac{A_1^{p_1} A_2^{p_2} \dots A_n^{p_n}}{\Pi} e^{t[\sum \alpha p + \gamma \sqrt{-1}]}$$

et N et Π sont développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Un certain nombre de questions se pose alors naturellement:

- 1° Nous savons que N et Π sont développables suivant les puissances de $\sqrt{p}$; en est-il de même du quotient $\frac{N}{\Pi}$?
- 2° S'il en est ainsi, il existe des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{p}$ des $A_i e^{x_i t}$, de $e^{+t\sqrt{p}}$ et de $e^{-t\sqrt{p}}$ qui satisfont formellement aux équations proposées; ces séries sont-elles convergentes?
- 3° Si elles ne sont pas convergentes, quel parti peut-on en tirer pour le calcul des solutions asymptotiques.

Je me propose d'abord de démontrer que l'on peut développer $\frac{N}{\Pi}$ suivant les puissances de $\sqrt{p}$ et que par conséquent il existe des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{p}$, des $A_i e^{x_i t}$, de $e^{+t\sqrt{p}}$ et de $e^{-t\sqrt{p}}$ qui satisfont formellement aux équations

(1). On pourrait en douter; en effet Π est le produit d'un certain nombre des diviseurs (5) du ^{paragraphe} précédent. Tous ces diviseurs sont développables suivant les puissances de $\sqrt{p}$; mais quelques-uns d'entre eux, ceux pour lesquels γ est nul, s'annulent avec $\sqrt{p}$. ^{Il peut} ~~on pourrait donc craindre~~ ^{arriver} que Π s'annule avec $\sqrt{p}$ et contienne en facteur une certaine puissance de $\sqrt{p}$. Si alors N ne contenait pas cette même puissance en facteur, le quotient $\frac{N}{\Pi}$ se développerait encore selon les puissances croissantes de $\sqrt{p}$, mais le développement commencerait par des puissances négatives.

Je dis qu'il n'en est pas ainsi et que le développement de $\frac{N}{\Pi}$ ne contient que des puissances positives de $\sqrt{p}$.

§ 14.

ances croissantes de $A_1 e^{n_1 t}, A_2 e^{n_2 t}, \dots, A_n e^{n_n t}$ et suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Quant aux n_i , c'est un nombre tel que $n_i T$ soit un multiple de 2π . Nous désignons d'ailleurs par T la période de la solution périodique à laquelle se rapportent les solutions asymptotiques considérées.

Telle est la définition des solutions asymptotiques. Voyons si pour $\mu=0$, il existe encore des solutions des équations (1) satisfaisant à cette définition.

On trouve pour la solution générale de ces équations quand $\mu=0$

$$x_i = x_i^0, \quad y_i = n_i t + A_i,$$

les x_i^0 et les A_i étant des constantes d'intégration et n_i étant la valeur de $-\frac{dF_0}{dx_i}$ pour $x_k = x_k^0$. Nous pouvons choisir les constantes x_i^0 de façon que les n_i aient de valeurs données et par conséquent de façon que les $n_i T$ soient des multiples de 2π . Les A_i restent encore arbitraires. Nous pourrions écrire ces solutions sous la forme:

$$x_i = x_i^0, \quad y_i = n_i t + A_i e^{n_i t}$$

en convenant de faire

$$\alpha_i = 0.$$

On voit ainsi que ces solutions sont encore de la forme (2) et rentrent par conséquent dans la définition qui précède.

Ainsi dans le cas des équations de la dynamique, les séries (4') et les solutions asymptotiques qu'elles représentent ne disparaissent pas pour $\mu=0$, ce qui prouve qu'elles ne contiennent pas de puissance négative de $\sqrt{\mu}$.

Voyons par quel mécanisme ces puissances négatives de $\sqrt{\mu}$ disparaissent. Posons:

$$A_i e^{n_i t} = w_i$$

et considérons les x et les y comme des fonctions des variables t et w .

Il importe avant d'aller plus loin de faire la remarque suivante: parmi les $2n$ exposants caractéristiques α , deux sont nuls et les autres sont deux à deux égaux et de signe contraire. Nous ne conserverons que $n-1$ de ces exposants en convenant de regarder comme nuls les coefficients A_i et les variables w_i qui correspondent aux $n+1$ exposants rejetés. Nous rejetterons d'abord les deux exposants nuls et dans chaque

au plus

H Nous ne
conservons que
ceux de ces exposants
dont la partie réelle
est positive.

couple d'exposants égaux et de signe contraire qui resteront, nous conserverons encore de n'en conserver qu'un.

Cela posé, les équations (1) deviennent:

$$(3) \quad \frac{dx_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dx_i}{dw_k} = \frac{dF}{dy_i},$$

$$(4) \quad \frac{dy_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dy_i}{dw_k} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Cherchons, en partant de ces équations à développer les x_i et les $y_i - n_i t$ suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$ et des w de telle façon que les coefficients soient des fonctions périodiques de t .

Nous pouvons écrire:

$$\alpha_k = \alpha_k^0 \sqrt{\mu} + \alpha_k^1 \mu + \dots = \sum \alpha_k^p \mu^{\frac{p}{2}}$$

car nous avons vu au § 12 (4^{ème} partie, chapitre III) comment on peut développer les exposants caractéristiques suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Ecrivons d'autre part:

$$x_i = x_i^0 + x_i^1 \sqrt{\mu} + \dots = \sum x_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

$$y_i - n_i t = y_i^0 + y_i^1 \sqrt{\mu} + \dots = \sum y_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

les x_i^p et les y_i^p étant des fonctions de t et des w , périodiques par rapport à t et développables suivant les puissances des w .

Si dans les équations (3) et (4) nous substituons ces valeurs à la place des α_k , des x_i et des y_i ; les deux membres de ces équations seront développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Egalons dans les deux membres des équations (3) les coefficients de $\mu^{\frac{p+1}{2}}$, et dans les deux membres des équations (4) les coefficients de $\mu^{\frac{p}{2}}$, nous obtiendrons les équations suivantes:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dx_i^{p+1}}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^p}{dw_k} &= Z_i^p + \sum_k \frac{d^2 F_1}{dy_i^0 dy_k^0} y_k^{p-1}, \\ \frac{dy_i^p}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^{p-1}}{dw_k} &= T_i^p - \sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0 dx_k^0} x_k^p \end{aligned}$$

où Z_i^p et T_i^p ne dépendent que de

$$x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{p-1},$$

$$y_i^0, y_i^1, \dots, y_i^{p-2}.$$

Convenons, comme nous l'avons fait plus haut, de représenter par $[U]$ la valeur moyenne de U , si U est une fonction périodique de t .

Des équations (5) nous pourrions alors déduire les suivantes:

$$(6) \quad \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{d[x_i^p]}{dw_k} = [Z_i^p] + \sum_k \left[\frac{d^2 F_i}{dy_i^0 dy_k^0} y_k^{p-1} \right],$$

$$\sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{d[y_i^{p-1}]}{dw_k} = [T_i^p] - \sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0 dx_k^0} [x_k^p].$$

Supposons maintenant qu'un calcul préalable nous ait fait connaître:

$$x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{p-1}, x_i^p - [x_i^p],$$

$$y_i^0, y_i^1, \dots, y_i^{p-2}, y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}].$$

Les équations (6) vont nous permettre de calculer $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ et par conséquent x_i^p et y_i^{p-1} . Les équations (5) nous permettront ensuite de déterminer

$$x_i^{p+1} - [x_i^{p+1}] \quad \text{et} \quad y_i^p - [y_i^p],$$

de sorte que ce procédé nous fournira par récurrence tous les coefficients des développements de x_i et de y_i .

La seule difficulté est la détermination de $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ par les équations (6).

Les fonctions $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ sont développées suivant les puissances croissantes des w et nous allons calculer les divers termes de ces développements en commençant par les termes du degré le moins élevé.

Pour cela nous allons reprendre les notations du § 12 ~~1re partie, Chapitre III~~, c'est à dire que nous allons poser:

$$-\frac{d^2 F_0}{dx_i^0 dx_k^0} = C_{ik}^0, \quad \text{et} \quad \left[\frac{d^2 F_i}{dy_i^0 dy_k^0} \right] = b_{ik}$$

(pour les valeurs nulles de w).

Si alors nous appelons ξ_i et η_i les coefficients de

$$w_1^{m_1} w_2^{m_2} \dots w_{n-1}^{m_{n-1}}$$

164

dans $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$, nous aurons pour déterminer ces coefficients les équations suivantes:

$$(7) \quad \begin{aligned} \sum_k b_{ik} \eta_k - S \xi_i &= \lambda_i, \\ \sum_k c_{ik} \xi_k - S \eta_i &= \mu_i. \end{aligned}$$

Dans ces équations (7) λ_i et μ_i sont des quantités connues, parce qu'elles ne dépendent que de

$$\begin{aligned} x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{p-1}, x_i^p - [x_i^p], \\ y_i^0, y_i^1, \dots, y_i^{p-2}, y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}] \end{aligned}$$

ou des termes de $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ dont le degré par rapport aux w est plus petit que:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}.$$

De plus nous avons posé pour abréger

$$S = m_1 \alpha_1^2 + m_2 \alpha_2^2 + \dots + m_{n-1} \alpha_{n-1}^2.$$

Nous avons donc pour le calcul des coefficients ξ_i et η_i un système d'équations linéaires. Il ne pourrait y avoir de difficulté que si le déterminant de ces équations était nul; or ce déterminant est égal à:

$$S^2 [S^2 - (\alpha_1^1)^2] [S^2 - (\alpha_2^1)^2] \dots [S^2 - (\alpha_{n-1}^1)^2].$$

Il ne pourrait s'annuler que pour:

$$S = 0, \quad S = \pm \alpha_i^1,$$

c'est à dire pour

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} = 0 \text{ ou } 1.$$

On ne pourrait donc rencontrer de difficulté que dans le calcul des termes du degré 0 ou 1 par rapport aux w .

Mais nous n'avons pas à revenir sur le calcul de ces termes; en effet nous avons appris à calculer les termes indépendants des w dans le § 11^{re} partie, chapitre III, et les coefficients de

$$w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$$

12.
dans le § 11^{re} partie, chapitre III.

On ne sera donc jamais arrêté en cherchant à développer les α_i et les y_i suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et des w .

§14.

Note 16.

Je dis Les termes ~~tant connus~~ indépendants des w ne sont en effet autre chose que les séries (6) du § 1^{er} et les coefficients de

$$w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$$

ne sont autre chose que les séries S_i et T_i du § 12.

Il me reste à dire un mot des premières approximations.

Nous donnerons aux x_i^0 des valeurs constantes qui ne sont autres que celles que nous avons désignées ainsi au § 1^{er}. Nous donnerons également aux y_i^0 des valeurs constantes qui ne sont autres que celles que nous avons appelées w_i au § 3.

Nous aurons alors les équations suivantes:

$$\frac{dy_i^0}{dt} = 0 \quad \frac{dx_i^1}{dt} = 0 \quad \frac{dy_i^1}{dt} + \sum_k x_k^1 w_k \frac{dy_i^0}{dw_k} = - \sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0 dx_k^0} x_k^1 \quad (8)$$

$$\frac{dx_i^1}{dt} + \sum_k x_k^1 w_k \frac{dx_i^1}{dw_k} = \frac{d^2 F_0}{dy_i^0 dy_k^0} \frac{dF_1}{dy_i^0}$$

Dans F_0 qui ne dépend que des x_i , ces quantités se doivent remplacer par x_i^0 ; Dans F_1 les x_i sont remplacés par x_i^0 et les y_i par $n_i t + y_i^0$. Les F_1 devient alors une fonction périodique de t dont la période est T . Nous désignerons par ψ comme dans les § 1^{er} et 12 la valeur moyenne de cette fonction périodique F_1 ; ψ est alors une fonction périodique et de période 2π par rapport aux y_i^0 .

Les deux premières équations (8) montrent que les y_i^0 et les x_i^1 ne dépendent que des w . En égalant dans les deux dernières équations (8) les valeurs moyennes des deux membres, il vient:

$$\sum_k x_k^1 w_k \frac{dy_i^0}{dw_k} = \sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0 dx_k^0} x_k^1$$

$$(9) \quad \sum_k x_k^1 w_k \frac{dx_i^1}{dw_k} = \frac{d\psi}{dy_i^0}$$

Ces équations (9) doivent servir à déterminer les y_i^0 et les x_i^1 en fonction des w . Peut-on satisfaire à ces équations en substituant à la place des y_i^0 et des x_i^1 des séries développées suivant les puissances des w .

Pour nous en rendre compte ~~en~~ nous examinons les équations différentielles suivantes:

$$(10) \quad \frac{dy_i^0}{dt} = \sum_k C_{ik}^0 x_k^1$$

$$\frac{dx_i^1}{dt} = \frac{d\psi}{dy_i^0}$$

Ces équations différentielles où les fonctions inconnues sont les y_i^0 et les x_i^1 , admettent une solution périodique

$$x_i^1 = 0, \quad y_i^0 = w_i$$

w_i étant la quantité désignée ainsi au § 1^{er}.

Les exposants caractéristiques relatifs à cette solution périodique sont précisément les quantités α_i . Parmi ces quantités nous sommes convenus de ne conserver que celles dont la partie réelle est positive. Nous ferons. Les équations (10) admettent ~~flot~~ un système de solutions asymptotiques et il est aisé de voir que ces solutions se présentent sous la forme de séries développées suivant les puissances des w . Les séries satisfont alors aux équations (7). Les équations peuvent donc être résolues.

^{153 § 14 obs.} Les x_i et les y_i étant ainsi déterminés, le reste du calcul ne présente plus, comme nous l'avons vu aucune difficulté. Il existe donc des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, des w , et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ et qui satisfont formellement aux équations (1).

Cela prouve que le développement de $\frac{N}{\Pi}$ ne débute jamais par une puissance négative de $\sqrt{\mu}$.

Malheureusement les séries ainsi obtenues ne sont pas convergentes.

Sont en effet:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}\gamma + \sum \alpha\beta - \alpha_i}$$

Si γ n'est pas nul, cette expression est développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, mais le rayon de convergence de la série ainsi obtenue tend vers 0 quand $\frac{\gamma}{\sum \beta}$ tend vers 0.

Si donc on développe les diverses quantités $\frac{N}{\Pi}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ il y a toujours, parmi ces quantités, en nombre une infinité pour lesquelles le rayon de convergence du développement est aussi petit qu'on le veut.

On pourrait encore espérer, quelque invraisemblable que cela puisse paraître, qu'il n'en est pas de même pour les développements de diverses quantités $\frac{N}{\Pi}$; mais nous verrons dans la suite d'une façon ~~plus~~ rigoureuse qu'il n'en est pas ainsi en général; il faut donc ~~se résigner~~ renoncer à ce faible espoir et conclure que les séries que nous venons de former sont divergentes.

Mais quoiqu'elles soient divergentes, ne peut-on en tirer quelque parti.

^{d'abord} Considérons la série suivante qui est plus simple que celles que nous avons en vue.

$$F(w, \mu) = \sum_n \frac{w^n}{1+n\mu}$$

Cette série converge uniformément quand μ reste positif et que w reste plus petit qu'une valeur absolue qu'un certain nombre positif w_0 plus petit que 1. De même la série

§14.

$$\frac{1}{p!} \frac{d^p F(w, \mu)}{d\mu^p} = \pm \sum \frac{n^p w^n}{(1+n\mu)^p}$$

converge uniformément.

Si maintenant l'on cherche à développer $F(w, \mu)$ suivant les puissances de μ , la série à laquelle on est conduit

$$(11) \quad \sum w^n (-n)^p \mu^p$$

ne converge pas. Si dans cette série on néglige tous les termes où l'exposant de μ est supérieur à p , on obtient une certaine fonction

$$\phi_p(w, \mu).$$

Il est aisé de voir que l'expression:

$$\frac{F(w, \mu) - \phi_p(w, \mu)}{\mu^p}$$

tend vers 0 quand μ tend vers 0 par valeurs positives, de sorte que la série (11) représente asymptotiquement la fonction $F(w, \mu)$ pour les petites valeurs de μ de la même manière que la série de Stirling représente asymptotiquement la fonction entière pour les grandes valeurs de x .

Les séries divergentes que nous avons apprises à former dans le présent ^(paragraphe) sont tout à fait analogues à la série (11).

Considérons en effet l'une des séries (4') :

$$\sum \frac{N}{\pi} w_1^{p_1} w_2^{p_2} \dots w_k^{p_k} e^{\gamma t \sqrt{V}} \frac{d^p \left(\frac{N}{\pi} \right)}{(d\sqrt{V})^p} = \frac{d^p F}{(d\sqrt{V})^p}$$

$$\sum \frac{N}{\pi} w_1^{p_1} w_2^{p_2} \dots w_k^{p_k} e^{\gamma t \sqrt{V}} = F(\sqrt{V}, w_1, w_2, \dots, w_k, t)$$

ces séries sont uniformément convergentes, pourvu que les w restent inférieurs à une valeur absolue à certaines limites, et que $\sqrt{V}$ reste positif réel.

Résumé Si l'on développe $\frac{N}{\pi}$ suivant les puissances de $\sqrt{V}$, on obtient des séries divergentes, ainsi que nous l'avons dit. Supposons qu'on néglige dans le développement les termes où l'exposant de $\sqrt{V}$ est supérieur à p , on obtiendra une certaine fonction

$$\phi_p(\sqrt{V}, w_1, w_2, \dots, w_k, t)$$

qui sera développable suivant les puissances des w , de $e^{\pm t \sqrt{V}}$ et qui sera un polynôme de degré p en $\sqrt{V}$.

La différence On voit alors que l'expression

$$\frac{F - \phi_p}{\sqrt{V}^p}$$

tend vers 0 quand μ tend vers 0 par valeurs positives, et cela quelque grand que soit p .

En effet si l'on désigne par H_p l'ensemble des termes du développement de $\frac{N}{\pi}$ où l'exposant de $\sqrt{V}$ est au plus égal à p , on a:

$$\frac{F - \Phi_p}{\sqrt{\mu^p}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{N}{\pi} - H_p \right) w_1^k w_2^k - w_K^k e^{kV-1}$$

et la série du second membre est uniformément convergente et tous ses termes tendent vers 0 quand μ tend vers 0.

On peut donc dire que les séries que nous avons obtenues dans le présent § ¹⁴ représentent les solutions asymptotiques pour les petites valeurs de μ de la même manière que la série de Stirling représente les fonctions entières.

On s'en rendra d'ailleurs mieux compte de la manière suivante; supposons deux degrés de liberté seulement pour fixer les idées, alors nous ne conserverons plus qu'une seule des quantités w et nous pourrions écrire nos équations sous la forme suivante:

$$\frac{dx_i}{dt} + \alpha w \frac{dx_i}{dw} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} + \alpha w \frac{dy_i}{dw} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (i=1, 2)$$

en supprimant les indices d' α et de w devenus inutiles.

Nous savons qu' α est développable suivant les puissances ^(impaires) de $\sqrt{\mu}$; et par conséquent α^2 suivant les puissances de μ .
est développable suivant les puissances de α^2 ; nous pourrions remplacer μ par ce développement de sorte que F sera développé suivant les puissances de α^2 .
Pour $\alpha=0$, F se réduit à F_0 qui ne dépend que de x_1 et de x_2 .

Soit:

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = \psi_i(t) \quad \psi_i(t)$$

la solution périodique qui nous sert de point de départ. Posons, comme au § ¹² ~~14~~

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \quad y_i = \psi_i(t) + \eta_i$$

nos équations deviendront:

$$\frac{d\xi_i}{dt} + \alpha w \frac{d\xi_i}{dw} = \Xi_i, \quad \frac{d\eta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\eta_i}{dw} = +H_i \quad (\text{quik})$$

Ξ_i et H_i sont développés suivant les puissances des ξ_i , des η_i et de α^2 ; et les coefficients sont des fonctions périodiques de t .

Pour $\alpha=0$, $\frac{dF}{dy_i}$ et par conséquent Ξ_i s'annulent; $\frac{dF}{dx_i}$ donc Ξ_i est divisible par α^2 et je puis poser:

$$\Xi_i = \alpha^2 X_i + \alpha^4 X_i'$$

$\alpha^2 X_i$ représentant l'ensemble des termes du premier degré par rapport aux ξ et aux η , et $\alpha^4 X_i'$ représentant l'ensemble des termes de degré supérieur.

De même, quand α est nul, $\frac{dF}{dx_i}$ et par conséquent H_i ne dépendent plus que des ξ_i et non des η_i .

Je puis donc poser:

$$H_i = Y_i + Y'_i + d^2 Q_i + d^2 Q'_i$$

$Y_i + d^2 Q_i$ représentant l'ensemble des termes du ^{premier} ~~second~~ degré par rapport aux ξ et aux η , pendant que $Y'_i + d^2 Q'_i$ représentent l'ensemble des termes de degré supérieur au premier. Je suppose en outre que Y_i et Y'_i ne dépendent que de ξ_1 et de ξ_2 .

Posons

$$\xi_i = d \zeta_i, \quad \eta_i = d \zeta_i$$

Y_i devra être divisible par d et Y'_i par d^2 de sorte que je pourrai poser:

$$Y_i + d^2 Q_i = d Z_i, \quad Y'_i + d^2 Q'_i = d^2 Z'_i$$

et que nos équations deviendront:

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{d\zeta_i}{dt} + d w \frac{d\zeta_i}{dw} &= d X_i + d X'_i \\ \frac{d\eta_i}{dt} + d w \frac{d\eta_i}{dw} &= d Z_i + d^2 Z'_i \end{aligned}$$

Considérons les équations:

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{d\zeta_i}{dt} &= d X_i, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= d Z_i. \end{aligned}$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux ζ_i et η_i . Elles ne diffèrent pas des équations (2) du § ¹² ~~11~~, non parce que ξ_1 et ξ_2 y sont remplacés par $d \zeta_1$ et $d \zeta_2$. D'après ce que nous avons vu au § ¹² ~~11~~, l'équation qui définit les exposants caractéristiques admet 4 racines, l'une égale à $+d$, l'autre à $-d$ et les deux autres à 0.

A la première racine, c'est à dire à la racine $+d$ correspondra une solution des équations (2) du § ¹² ~~11~~ que nous avons appris à former dans ce § ¹² ~~11~~ et que nous avons écrite ainsi:

$$\xi_i = e^{dt} S_i, \quad \eta_i = e^{dt} T_i.$$

Je rappelle que S_i est nul et par conséquent que S_i est divisible par d .

A la seconde racine $-d$ correspondra de même une ~~seconde~~ autre solution des équations (2) et nous l'écrivons:

$$\xi_i = e^{-dt} S'_i, \quad \eta_i = e^{-dt} T'_i.$$

Enfin aux deux racines 0, correspondront deux solutions des équations (2) que nous écrivons:

$$\xi_i = S''_i, \quad \eta_i = T''_i,$$

$$\xi_i = S'''_i + dt S''_i, \quad \eta_i = T'''_i + dt T''_i.$$

$T'_i, T''_i, T'''_i, S'_i, S''_i, S'''_i$ sont des fonctions périodiques de t , comme S_i et T_i .

De plus S'_i, S''_i et S'''_i seront comme S_i divisibles par α .

Posez alors:

$$\alpha \zeta_1 = S_1 \theta_1 + S'_1 \theta_2 + S''_1 \theta_3 + S'''_1 \theta_4,$$

$$\alpha \zeta_2 = S_2 \theta_1 + S'_2 \theta_2 + S''_2 \theta_3 + S'''_2 \theta_4,$$

$$\eta_1 = T_1 \theta_1 + T'_1 \theta_2 + T''_1 \theta_3 + T'''_1 \theta_4,$$

$$\eta_2 = T_2 \theta_1 + T'_2 \theta_2 + T''_2 \theta_3 + T'''_2 \theta_4.$$

Les fonctions θ_i ~~joueront~~ ainsi définies, joueront un rôle analogue à celui de, fonctions η_i du §. 13. Les équations (12) deviennent alors

$$\frac{d\theta_1}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_1}{dw} - \alpha \theta_1 = \alpha \Theta_1, \quad \frac{d\theta_2}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_2}{dw} + \alpha \theta_2 = \alpha \Theta_2,$$

$$(14) \quad \left(\frac{d\theta_3}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_3}{dw} = \alpha \Theta_3 \right), \quad \left(\frac{d\theta_4}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_4}{dw} = \alpha \Theta_4 \right).$$

$$\left(\frac{d\theta_3}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_3}{dw} = \alpha \theta_4 + \alpha \Theta_3 \right)$$

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ et Θ_4 sont des fonctions développées suivant les puissances de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ et α dont tous les termes sont du 2^d degré au moins par rapport aux θ , et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t .

Ces équations (14) sont analogues aux équations (2') du §. 13.

Cela posé, soit Φ une fonction qui comme, de même que $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ et Θ_4 , soit développée suivant les puissances de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, de α , et qui

soit telle que chacun de ses coefficients soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le coefficient du terme correspondant dans $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ et Θ_4 ; tous les termes de Φ seront d'ailleurs, comme ceux des Θ_i , du second degré au moins par rapport aux θ .

Soit maintenant ε un nombre positif et réel, qui soit plus petit que la valeur absolue que $\frac{n\sqrt{-1}}{\alpha} + p$

(où n est entier positif, négatif ou nul, et où p est entier positif et au moins égal à 1)

On peut évidemment est toujours plus grand en valeur absolue que 1, quels que soient d'ailleurs n, p et α .

Formons alors les équations:

$$(15) \quad \theta_1 = w + \Phi, \quad \theta_2 = \Phi, \quad \theta_3 = \theta_4 + \Phi, \quad \theta_4 = \Phi$$

qui sont analogues aux équations (2'') du §. 13.

Des équations (15) on peut tirer les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances des w, ε et de w et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ et qui sont analogues aux

13
séries (4') du § 4. Des équations (15) on peut tirer les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances des mêmes variables et analogues aux séries (4'') du § 4. Chacun des termes de ces dernières séries est positif et plus grand en valeur absolue que le terme correspondant des premières séries; si donc elles convergent, il en est de même des séries tirées des équations (14).

Or il est aisé de voir que l'on peut trouver un nombre w_0 indépendant de α , tel que si $|w| < w_0$, les séries tirées de (15) convergent.

Il en résulte que les séries ordonnées suivant les puissances de w et tirées de (14) convergent uniformément quelque petit que soit α et par conséquent quelque petit que soit μ , ainsi que je l'ai annoncé plus haut.

Nous possédons maintenant les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de w et de $e^{\pm \sqrt{1-\alpha}}$; les coefficients sont les développements fonctionnels connus de α . Si on développe chacun de ces coefficients suivant les puissances de α , on obtiendra les θ développés suivant les puissances de α . Les séries ainsi obtenues sont divergentes, comme nous l'avons vu plus haut; ~~quoiqu'elles~~ ^{soient} néanmoins:

$$(16) \quad \theta_i = \theta_i^0 + \alpha \theta_i^1 + \alpha^2 \theta_i^2 + \dots + \alpha^p \theta_i^p + \dots$$

ces séries.

Posons:

$$H_1 = \theta_1 + \theta_1, \quad H_2 = \theta_2 - \theta_2, \quad H_3 = \theta_3 + \theta_4, \quad H_4 = \theta_4.$$

Posons

$$(17) \quad \theta_i = \theta_i^0 + \alpha \theta_i^1 + \alpha^2 \theta_i^2 + \dots + \alpha^p \theta_i^p + \alpha^p U_i$$

en égalant θ_i aux $p+1$ premiers termes de la série (16) plus un terme complémentaire $\alpha^p U_i$.

Si dans H_i on remplace les θ_i par leurs développements (17), les H_i ~~des~~ ^{peuvent} se développer suivant les puissances de α et on trouve peut écrire:

$$(18) \quad H_i = \theta_i^0 + \alpha \theta_i^1 + \alpha^2 \theta_i^2 + \dots + \alpha^{p-1} \theta_i^{p-1} + \alpha^p U_i,$$

les θ_i^k étant indépendants de α pendant que U_i est susceptible d'être développée suivant les puissances de α .

On aura alors les équations:

$$(19) \quad \frac{d\theta_i^0}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta_i^1}{dt} + w \frac{d\theta_i^0}{dw} = \theta_i^0, \quad \frac{d\theta_i^2}{dt} + w \frac{d\theta_i^1}{dw} = \theta_i^1, \quad \dots, \quad \frac{d\theta_i^p}{dt} + w \frac{d\theta_i^{p-1}}{dw} = \theta_i^{p-1}$$

et ensuite:

$$(19) \quad \frac{dU_i}{dt} + \alpha w \frac{dU_i}{dw} + \alpha w \frac{d\theta_i^p}{dw} = U_i.$$

Voici quelle est la forme de la fonction U_i ; les quantités θ_i^k ^{peuvent} doivent être regardées

comme des fonctions connues de t et de w , définies par les équations (18) et par l'équation (20) que j'aurais plus loin; pendant que les u_i restent les fonctions inconnues. Alors U_i est une fonction développée suivant les puissances de w , de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$, de d et des u_i . De plus tout terme qui contient du q^{e} degré par rapport aux u_i est au moins du degré $p(q-1)$ par rapport à d .

Soit U_i^0 ce que devient U_i quand on y annule d et les u_i ; on aura:

$$(20) \quad w \frac{d[\theta_i^p]}{dw} = [U_i^0].$$

Je puis ensuite, en posant

$$U_i' = U_i - w \frac{d\theta_i^p}{dw}$$

puis:

$$V_1 = U_1' - u_1, \quad V_2 = U_2' + u_2, \quad V_3 = U_3' - u_4, \quad V_4 = U_4',$$

mettre les équations (19) sous la forme:

$$(21) \quad \frac{du_1}{dt} + d w \frac{du_1}{dw} - d u_1 = d V_1, \quad \frac{du_2}{dt} + d w \frac{du_2}{dw} + d u_2 = d V_2,$$

$$\frac{du_3}{dt} + d w \frac{du_3}{dw} - d u_4 = d V_3, \quad \frac{du_4}{dt} + d w \frac{du_4}{dw} = d V_4.$$

On voit alors que les V_i ne contiennent que des termes du 2^{e} degré au moins par rapport à w et aux u_i .

En effet les θ_i sont divisibles par w et se réduisent à w ou à 0 quand on y ^{d'abord} supprime les termes de degré supérieur au premier en w . Il en résulte ^{d'abord} que θ_i^p est divisible par w^p . D'autre part le second membre de développement l'équation (17) ne contiendra que des termes du 1^{e} degré au moins par rapport à w et aux u_i . Donc θ_i ne contient que des termes du 1^{e} degré au moins par rapport à w et aux u_i . Il en résulte que ^{par la 314} les seuls termes du 1^{e} degré qui peuvent subsister dans U_i se réduisent à U_1, U_2, U_3 et U_4 et réduisent respectivement à $u_1, -u_2, u_4$ et 0.

D'ailleurs $w \frac{d\theta_i^p}{dw}$ est divisible par w^2 ; donc les V_i ne contiennent que des termes du 2^{e} degré au moins.

C. Q. F. D.

Des équations (21) on peut tirer les u_i sous la forme de séries développées suivant les puissances de w et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$. En appliquant à ces équations le même raisonnement qu'aux équations (14) on peut démontrer que ces séries convergent quand $|w| < w_0$ et que la convergence reste uniforme quelque petit que soit d .

Il en est de même pour les séries qui représentent $\frac{du_i}{dw}, \frac{d^2 u_i}{dw^2}$ etc.

Il résulte de là qu'on peut assigner une limite supérieure indépendante de d , à u_i .

à $\frac{du_i}{dw}$, $\frac{d^2u_i}{dw^2}$ etc, pourvu que $|w| < w_0$.

Mais je veux démontrer maintenant que cela a encore lieu pour toutes les valeurs de w , positives de w .

Si l'on remplace w par Ae^{at} , A étant une constante, les équations (*) deviennent

$$\frac{du_i}{dt} + a w \frac{du_i}{dw} \frac{\partial u_i}{\partial A} = U'_i$$

Je remplis la caractéristique D au lieu de la caractéristique d pour ce degré que

je suppose remplie par Ae^{at} .

U'_i est une fonction développée suivant les puissances de a et des u_i et dont les coefficients sont des fonctions de t et de w . Je dis que cette série sera convergente quels que soient t et w pourvu que a et les u_i soient assez petits. En effet elle ne pourrait cesser de converger que si la fonction:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

cessait d'être développable suivant les puissances de a , des v_i et des v'_i quand on y remplace x_i par:

$$x_i^0 + a x_i^1 + a^2 x_i^2 + \dots + a^{p+1} x_i^{p+1} + a^{p+1} v_i$$

et y_i par:

$$y_i^0 + a y_i^1 + a^2 y_i^2 + \dots + a^p y_i^p + a^p v'_i.$$

or ce qui revient au même, si la fonction F pour une valeur quelconque de t ou de w (c'est à dire pour un système quelconque de valeurs de t , de y_i^0 et de y_i^1) cessait d'être développable suivant les puissances de $x_i - x_i^0$ et de $y_i - y_i^0$. Or il est manifeste qu'il n'en est pas ainsi.

Je puis donc toujours trouver une fonction Φ développée suivant les puissances de a et des u_i , dont les coefficients sont des constantes au lieu d'être fonctions de t et de w comme ceux de U'_i , et de plus m'arranger de telle sorte que le coefficient d'un terme quelconque de Φ soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant de U'_i ($i = 1, 2, 3, 4$), pour moi-même pour les valeurs de t et de w que j'aurai à considérer.

J'ajouterai que je puis trouver des nombres réels positifs M et β tels que la fonction Φ satisfasse à la condition que je viens d'énoncer; si je prends:

$$\Phi = \frac{M(1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}{1 - \beta a - \beta a^p(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}$$

si je considère les valeurs de w inférieures positives et inférieures à une certaine limite W , je devrai prendre, pour satisfaire à cette condition, des nombres M et β

d'autant plus grands que W sera plus grand; mais tant que W sera fini, les nombres M et β seront eux mêmes finis.

Soit maintenant w_1 une valeur positive de w plus petite que w_0 . D'après ce que nous avons vu plus haut, il est possible d'assigner pour $w = w_1$ une limite supérieure à u_1, u_2, u_3 et u_4 ; soit u_0 cette limite, on aura donc

$$|u_i| < u_0 \quad \text{pour } w = w_1.$$

Soit maintenant u' une fonction définie par les conditions suivantes

$$\frac{du'}{dt} + \alpha w \frac{du'}{dw} = \frac{\alpha M (u' + 1)}{1 - \beta \alpha - 4\beta \alpha^2 u'}$$

$$u' = u_0 \quad \text{pour } w = w_1,$$

On aura manifestement pour toutes les valeurs de t et de w :

$$|u_i| < u' \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Où on trouve sans peine:

$$\frac{1 - \beta \alpha + \beta \alpha^2}{4M} \log \frac{1 + 4u'}{1 + 4u_0} - \frac{\beta \alpha^2}{M} (u' - u_0) = \log \frac{w}{w_1}$$

et pour $\alpha = 0$, on trouve:

$$\frac{1 + 4u'}{1 + 4u_0} = \left(\frac{w}{w_1} \right)^{4M}$$

ce qui montre que u' reste finie quand α tend vers 0.

Nous devons en conclure que les quantités u_i restent également finies quand α tend vers 0.

Il résulte de là
Cela peut, je me propose d'établir que la série

$$\theta_i^0 + \alpha \theta_i^1 + \alpha^2 \theta_i^2 + \dots$$

représente la fonction θ_i asymptotiquement (c'est à dire à la façon de la série de Stirling) ou en d'autres termes que l'expression:

$$\theta_i - \theta_i^0 - \alpha \theta_i^1 - \alpha^2 \theta_i^2 - \dots - \alpha^{p-1} \theta_i^{p-1}$$

tend vers 0 avec α . En effet cette expression est égale à:

$$\alpha (\theta_i^p + u_i)$$

or nous venons de voir que $\theta_i^p + u_i$ reste fini quand α tend vers 0.

Mais ce n'est pas tout; je dis que $\frac{du_i}{dw}$ reste fini quand α tend vers 0.

Nous avons en effet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{du_i}{dw} \right) + \alpha w \frac{d}{dw} \left(\frac{du_i}{dw} \right) = \alpha \sum_k \frac{dU_i^k}{du_k} \frac{du_k}{dw} + \alpha \frac{dU_i^0}{dw}$$

$\frac{dU_i^k}{du_k}$ et $\frac{dU_i^0}{dw}$ sont des fonctions de t , de w , de α et des u_i ; mais d'après ce que nous venons de voir, nous pouvons assigner aux u_i des limites supérieures; nous pourrions donc en

§14.

175 48

assigner également aux $\frac{dV_i'}{du_k}$ et aux $\frac{dV_i'}{dw}$. Supposons par exemple que l'on ait:

$$\left| \frac{dV_i'}{du_k} \right| < A, \quad \left| \frac{dV_i'}{dw} \right| < B \quad w < A \quad (\text{pour } w < W)$$

A et B étant deux nombres positifs.

D'autre part, nous savons qu'on peut assigner une limite à $\frac{dV_i'}{dw}$ pour $w = w_1$.

Supposons par exemple que l'on ait:

$$\left| \frac{dV_i'}{dw} \right| \leq u'_0 \quad \text{pour } w = w_1,$$

u'_0 étant un nombre positif. Soit ensuite u' une fonction définie comme il suit:

$$\frac{du'}{dt} + \alpha w \frac{du'}{dw} = \alpha u' (4A + W) + \alpha B$$

$$u' = u'_0 \quad \text{pour } w = w_1,$$

On aura manifestement

$$\left| \frac{dV_i'}{dw} \right| < u'_0$$

Or il est sans peine que u' ne dépend que de w et satisfait à l'équation

$$w \frac{du'}{dw} = u' (4A + W) + B.$$

Donc u' est fini; donc $\frac{dV_i'}{dw}$ reste fini quand d tend vers 0. Donc on a

asymptotiquement (en entendant α et β à dire au même sens que plus haut):

$$\frac{d\theta_i}{dw} = \frac{d\theta_i^0}{dw} + \alpha \frac{d\theta_i^1}{dw} + \alpha^2 \frac{d\theta_i^2}{dw} +$$

On démontrerait de même que l'on a asymptotiquement:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{d\theta_i^0}{dt} + \alpha \frac{d\theta_i^1}{dt} + \alpha^2 \frac{d\theta_i^2}{dt} +$$

$$\frac{d^2\theta_i}{dw^2} = \frac{d^2\theta_i^0}{dw^2} + \alpha \frac{d^2\theta_i^1}{dw^2} + \alpha^2 \frac{d^2\theta_i^2}{dw^2} +$$

Voici donc la conclusion finale à laquelle nous parvenons:

Les séries

$$x_i^0 + \sqrt{\mu} x_i^1 + \mu x_i^2 + \dots, \quad n_i t + y_i^0 + \sqrt{\mu} y_i^1 + \mu y_i^2 + \dots$$

définies dans ce paragraphe sont divergentes, mais elles jouissent de la même propriété ^{que la série de Stirling} de telle sorte qu'on a asymptotiquement:

$$x_i = x_i^0 + \sqrt{\mu} x_i^1 + \mu x_i^2 +$$

$$y_i = n_i t + y_i^0 + \sqrt{\mu} y_i^1 + \mu y_i^2 +$$

De plus, si D est un signe quelconque de différentiation, d'est à dire si l'on pose:

$$D.f_i = \frac{d^{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k} f}{dt^{\lambda_0} dw_1^{\lambda_1} dw_2^{\lambda_2} \dots dw_k^{\lambda_k}}$$

on aura encore asymptotiquement:

$$D x_i = D x_i^0 + \sqrt{\mu} D x_i^1 + \mu D x_i^2 + \dots$$

$$D y_i = D(n; t + y_i^0) + \sqrt{\mu} D y_i^1 + \mu D y_i^2 + \dots$$

En ce qui concerne l'étude des séries analogues à celles de Stirling je renverrai ^{au § 1^{er} du} ~~mon~~ mémoire que j'ai publié dans les Acta Mathematica (Tome 8, page 295).

177

Deuxième partie.
Équations de la dynamique et problème des n corps

~~Deuxième partie.~~

~~Équations de la dynamique et problème des n corps.~~

CHAPITRE I.

Etude du cas où il n'y a que deux degrés de liberté.

§ 15. Représentations géométriques diverses.

Reprenons les équations (1) du § ~~14~~ ¹¹ ~~(1^{ère} partie, chapitre III)~~

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}. \end{aligned}$$

Nous nous bornerons au cas le plus simple qui est celui où il n'y a que deux degrés de liberté; je n'ai pas à m'occuper en effet de celui où il n'y a qu'un degré de liberté, car les équations de la dynamique s'intègrent alors aisément par de simples quadratures.

Nous supposons donc que la fonction F ne dépend que de quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2 . Nous supposons de plus que cette fonction est uniforme par rapport à ces quatre variables et périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2 .

La situation du système est donc définie par les quatre quantités x_1, x_2, y_1, y_2 , mais cette situation ne change pas quand y_1 ou y_2 augmente de 2π ou d'un multiple de 2π . En d'autres termes, et pour reprendre le langage du chapitre I, ~~de la 1^{ère} partie~~, x_1 et x_2 sont des variables linéaires, pendant que y_1 et y_2 sont des variables angulaires.

Nous connaissons une intégrale des équations (2) qui est la suivante:

$$(2) \quad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

C désignant la constante des forces vives. Si cette constante est regardée comme une des données de la question, les quatre quantités x et y ne sont plus indépendantes; elles sont liées par la relation (2). Il suffira donc, pour déterminer la situation du système, de se donner arbitrairement trois de ces quatre quantités. Il devient possible, par conséquent, de représenter la situation du système par la position d'un point P dans l'espace.

Il pourra arriver en outre pour des raisons diverses que les quatre variables x et y soient soumises, non seulement à l'égalité (2), mais à une ou plusieurs inégalités:

$$(3) \quad \varphi_1(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0, \quad \varphi_2(x_1, x_2, y_1, y_2) > 0.$$

Supposons par exemple pour fixer les idées que les inégalités (3) s'écrivent:

$$a > x_1 > b,$$

et que l'égalité (2) soit telle que lorsque x_1 satisfait à ces inégalités, on puisse tirer de la relation (2) la quatrième variable x_2 en fonction uniforme des trois autres x_1, y_1 et y_2 .

Nous pouvons alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X = \cos y_1 [1 + \cos y_2 (cx_1 + d)], \quad Y = \sin y_1 [1 + \cos y_2 (cx_1 + d)],$$

$$Z = \sin y_2 (cx_1 + d),$$

c et d étant deux nouvelles constantes positives telles que

$$ca + d < 1; \quad cb + d > 0.$$

Il est clair en effet qu'à toute situation du système, c'est à dire à tout système de valeurs de x_1, y_1 et y_2 satisfaisant aux conditions:

$$a > x_1 > b, \quad 2\pi > y_1 > 0, \quad 2\pi > y_2 > 0$$

correspond un point de l'espace et un seul, compris entre les deux tores:

$$(4) \quad \begin{aligned} (1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 &= (cb + d)^2, \\ (1 - \sqrt{X^2 + Y^2})^2 + Z^2 &= (ca + d)^2. \end{aligned}$$

Et réciproquement, à tout point de l'espace compris entre ces deux tores correspond un système de valeurs de x_1, y_1 et y_2 et un seul, satisfaisant aux inégalités précédentes.

Il peut se faire que les inégalités (3) ne s'écrivent plus $a > x_1 > b$; mais que cependant ces inégalités, jointes à la relation (2) entraînent comme conséquence

$$a > x_1 > b.$$

Si de plus x_2 est encore fonction uniforme des trois autres variables, le même mode de représentation géométrique est encore applicable.

Nous pouvons nous placer dans un cas plus général encore:

Supposons que l'on puisse trouver une variable auxiliaire ξ , jouissant de la propriété suivante. Si x_1, x_2, y_1 et y_2 satisfont à la fois à l'égalité (2) et aux inégalités (3), on pourra exprimer x_1 et x_2 en fonctions uniformes de ξ , de y_1 et de y_2 . De plus, en vertu des inégalités (3), ξ ne peut devenir infinie et reste comprise entre certaines limites de telle façon que l'on a comme conséquence de (2) et de (3)

$$a > \xi > b.$$

Nous pourrions alors définir complètement la situation du système en nous donnant les trois variables ξ, y_1 et y_2 , et la représenter par un point P dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$\begin{aligned} X &= \cos y_1 [1 + \cos y_2 (c\xi + d)], & Y &= \sin y_1 [1 + \cos y_2 (c\xi + d)], \\ Z &= \sin y_2 (c\xi + d) \end{aligned}$$

avec les conditions:

$$c \geq 0, ca + d < 1, cb + d > 0.$$

On voit alors, comme dans le cas précédent, qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace et un seul compris entre les deux

179

169 8 15

tores (4), et réciproquement, qu'à tout point compris entre ces deux tores ne peut correspondre plus d'une situation du système.

Il peut se faire que pour $x_1 = a$, (ou plus généralement pour $\xi = a$) la situation du système reste la même quelle que soit la valeur attribuée à y_2 . Nous en verrons dans la suite des exemples. C'est ainsi qu'en coordonnées polaires, il faut en général pour définir la position d'un point se donner les deux coordonnées ρ et ω , mais que si on suppose $\rho = 0$, on retrouve toujours le même point, à savoir le pôle, quel que soit ω .

Dans ce cas on choisira les constantes c et d de telle façon que

$$ca + d = 0.$$

Le second des deux tores (4) se réduit alors à un cercle:

$$Z = 0, \quad X^2 + Y^2 = 1.$$

En chacun des points de ce cercle y_2 est indéterminé; mais néanmoins, comme pour $\xi = a$ la situation du système ne dépend pas de y_2 , à chaque point du cercle correspond une situation du système et une seule.

On peut dire alors qu'à toute situation du système correspond un point de l'espace intérieur au premier des deux tores (4) et que réciproquement, à un point intérieur de ce tore ne peut correspondre qu'une seule situation du système.

J'envisagerai encore un autre cas.

Imaginons qu'en vertu des inégalités (3), ξ puisse prendre toutes les valeurs positives, de telle sorte que:

$$a = 0, \quad b = +\infty.$$

Supposons que pour $\xi = 0$ la situation du système ne dépende pas de y_2 et que pour $\xi = \infty$, cette situation ne dépende pas de y_1 .

Nous pourrions alors représenter la situation par un point dont les coordonnées rectangulaires seront:

$$X = \cos y_1 e^{\xi \cos y_2}, \quad Y = \sin y_1 e^{\xi \cos y_2}, \quad Z = \xi \sin y_2.$$

Pour $\xi = 0$ il vient (quel que soit y_2)

$$X = \cos y_1, \quad Y = \sin y_1, \quad Z = 0.$$

Le point représentatif se trouve sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \quad Z = 0$$

et sa position ne dépend pas de y_2 ; cela n'a pas d'inconvénient puisque par hypothèse la situation du système pour $\xi = 0$ ne dépend pas non plus de y_2 .

Pour $\xi = \infty$, on trouve pourvu que $\cos y_2$ soit négatif:

$$X = Y = 0, \quad Z = \sin y_2.$$

Le point représentatif se trouve alors sur l'axe des Z et sa position ne dépend pas de y_1 , mais pour $\xi = \infty$, la situation du système ne dépend pas non plus de y_1 .

Le mode de représentation adopté est donc légitime.

Ce qui précède a besoin d'être appuyé de quelques exemples. Je n'en traiterai ici que trois.

Le premier de ces exemples est le plus important parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps. Imaginons deux corps, le premier de grande masse, le second de masse finie, mais très petite et supposons que ces deux corps décrivent autour de leur centre de gravité commun une circonférence d'un mouvement uniforme. Considérons ensuite un troisième corps de masse infiniment petite, de façon que son mouvement soit troublé par l'attraction des deux premiers corps, mais qu'il ne puisse pas troubler l'orbite de ces deux premiers corps. Bornons-nous de plus au cas où ce troisième corps se meut dans le plan des deux circonférences décrites par les deux premières masses.

Tel est le cas d'une petite planète se mouvant sous l'influence du Soleil et de Jupiter quand on néglige l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Tel est encore le cas de la lune se mouvant sous l'influence du Soleil et de la Terre quand on néglige l'excentricité de l'orbite terrestre et l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique.

Nous définirons la position du troisième corps par ses éléments osculateurs à un instant donné et nous écrirons les équations du mouve-

182

ment en adoptant les notations de M. TISSERAND dans sa Note des Comptes Rendus du 31 janvier 1887

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dR}{dt}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{dR}{dL}, \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{dR}{dg}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{dR}{dG}. \end{aligned}$$

Je désigne par a , e et n le grand axe osculateur, l'excentricité et le moyen mouvement de la troisième masse; j'appelle l l'anomalie moyenne de cette troisième masse et g la longitude de son périhélie.

Je pose ensuite:

$$L = \sqrt{a}, \quad G = \sqrt{a(1-e^2)}.$$

Je choisis les unités de telle façon que la constante de GAUSS soit égale à 1, que le moyen mouvement de la seconde masse soit égal à 1 et que la longitude de cette seconde masse soit égale à t .

Dans ces conditions, l'angle sous lequel la distance des deux dernières masses est vue de la première ne diffère de $l+g-t$ que par une fonction périodique de l de période 2π .

La fonction R est la fonction perturbatrice ordinaire augmentée de $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2L^2}$. Cette fonction ne dépend que de L , de G , de l et de $l+g-t$; car la distance de la seconde masse à la première est constante et la distance de la troisième à la première ne dépend que de L , G et l . Cette fonction est d'ailleurs périodique de période 2π tant par rapport à l que par rapport à $l+g-t$.

On conclut de là que l'on a:

$$\frac{dR}{dt} + \frac{dR}{dg} = 0$$

et que les équations (5) admettent comme intégrale:

$$R + G = \text{const.}$$

Nous allons chercher à ramener les équations (5) à la forme des équations (1). Pour cela nous n'avons qu'à poser:

$$\begin{aligned}x_1 &= G, & x_2 &= L, \\y_1 &= g - t, & y_2 &= l, \\F(x_1, x_2, y_1, y_2) &= R + G,\end{aligned}$$

et les équations (5) reprennent la forme:

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

La fonction F dépend d'un paramètre très petit μ qui est la masse du second corps et nous pouvons écrire:

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

F est périodique par rapport à y_1 et y_2 qui sont des variables angulaires, tandis que x_1 et x_2 sont des variables linéaires. Si l'on fait $\mu = 0$, F se réduit à F_0 et:

$$F_0 = \frac{1}{2a} + G = x_1 + \frac{1}{2x_2^2},$$

ne dépend plus que des variables linéaires.¹

Il résulte de la définition même de L et de G en fonctions de a et e que l'on doit avoir:

$$L^2 > G^2 \quad \text{ou} \quad x_2^2 > x_1^2,$$

ce qui montre que x_1 peut varier depuis $-x_2$ jusqu'à $+x_2$.

Si l'on suppose $x_1 = +x_2$, l'excentricité est nulle; il en résulte que la fonction perturbatrice et la situation du système ne dépendent plus que de la différence de longitude des deux petites masses, c'est à dire de:

$$l + g - t = y_1 + y_2.$$

¹ Il est aisé de voir que le hessien de F_0 par rapport à x_1 et à x_2 est identiquement nul. Il semble donc que les conclusions du § 3 (chapitre III, 1^{ère} partie) ne soient plus applicables. Il n'en est rien pourtant, parce qu'on peut remplacer F par une fonction arbitraire $\varphi(F)$ de telle sorte que le hessien de $\varphi(F_0)$ ne soit pas nul. Cela revient à changer l'unité de temps de façon que cette unité dépende de la constante C des forces vives.

On en déduit:

$$\frac{dF}{dy_1} = \frac{dF}{dy_2},$$

d'où:

$$(6) \quad \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = 0,$$

d'où l'on conclurait (puisque la valeur initiale de $x_1 - x_2$ est supposée nulle) que x_1 doit rester constamment égal à x_2 ; mais ce n'est là pour les équations (1) qu'une solution singulière qui doit être rejetée. En ce qui concerne les solutions «particulières» que nous devons conserver, l'équation (6) signifie simplement que quand $x_1 - x_2$ atteint la valeur 0, cette valeur est un maximum, ce qui est d'ailleurs une conséquence de l'inégalité $x_2^2 > x_1^2$.

Si nous supposons maintenant $x_2 = -x_1$, l'excentricité sera encore nulle, mais le mouvement sera rétrograde (il l'est toutes les fois que x_1 et x_2 ne sont pas de même signe); alors F et la situation du système ne dépendent plus que de l'angle:

$$-l + g - t = y_1 - y_2,$$

ce qui donne:

$$\frac{dF}{dy_1} + \frac{dF}{dy_2} = 0.$$

Je vais maintenant traiter la question suivante:

Trouver une variable ξ telle que si x_1, x_2, y_1, y_2 satisfont aux égalités et inégalités (2) et (3) (qui dans le cas qui nous occupe se réduisent à

$$F = C, \quad x_2^2 > x_1^2)$$

ces quatre quantités peuvent s'exprimer en fonctions uniformes de ξ, y_1 et y_2 .

Je traiterai d'abord la question dans le cas où $\mu = 0$ et où

$$F = F_0 = \frac{1}{2x_2^2} + x_1.$$

Envisageons un plan et dans ce plan un point dont les coordonnées sont:

$$X = x_1 - c, \quad Y = x_2.$$

Alors les égalités et inégalités (2) et (3) s'écrivent:

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0, \quad Y > X + c > -Y.$$

Construisons la courbe:

$$X + \frac{1}{2Y^2} = 0$$

et les deux droites:

$$X + c = \pm Y.$$

Ces droites et cette courbe peuvent être dans deux situations différentes, représentées par les figures 4 et 5.

Fig. 4.

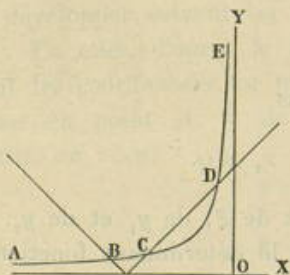
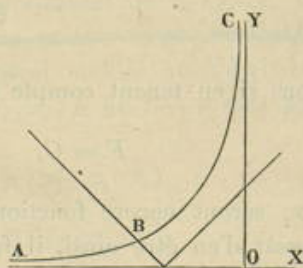


Fig. 5.



Chacune des deux figures devrait se composer de deux moitiés symétriques par rapport à l'axe des x , mais nous n'avons représenté que la moitié qui est au-dessus de cet axe. Dans le cas de la figure 4, la courbe nous offre deux arcs utiles BC et DE pendant que les arcs AB et CD doivent être rejetés à cause de l'inégalité $Y^2 > (X + c)^2$. Dans le cas de la figure 5, il n'y a qu'un arc utile BC et l'arc AB doit être rejeté.

Le passage de la figure 4 à la figure 5 se fait quand la droite CD devenant tangente à la courbe, les deux points C et D se confondent. Cela a lieu pour:

$$C = \frac{3}{2}, \quad X = -\frac{1}{2}, \quad Y = 1.$$

Nous nous supposons dans ce qui va suivre placés dans le cas de

la figure 4 et nous envisagerons seulement l'arc utile BC ; c'est en effet le cas le plus intéressant au point de vue des applications.

Posons:

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G};$$

on voit que ξ s'annule au point C et devient infini au point B et que quand on parcourt l'arc BC depuis C jusqu'en B , on voit ξ croître constamment depuis 0 jusqu'à $+\infty$. Si donc on se donne ξ , le point correspondant de l'arc BC sera entièrement déterminé, ce qui revient à dire que x_1 et x_2 sont fonctions uniformes de ξ .

Qu'arrivera-t-il maintenant si μ n'est plus nul, mais seulement très petit?

Faisons encore

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$$

et voyons si en tenant compte des relations

$$(7) \quad F = C, \quad \xi > 0, \quad x_2 > 0,^1$$

x_1 et x_2 seront encore fonctions uniformes de ξ , de y_1 et de y_2 . Pour qu'il cessât d'en être ainsi, il faudrait que le déterminant fonctionnel:

$$\frac{\partial(\xi, F)}{\partial(x_1, x_2)}$$

s'annulât pour un système de valeurs satisfaisant aux conditions (7). Or cela n'arrivera pas si μ est assez petit et si C est assez différent de $\frac{3}{2}$.

Dans la plupart des applications, ces conditions seront remplies; nous pourrons donc prendre ξ comme variable indépendante; cette variable sera essentiellement positive et x_1 et x_2 seront fonctions uniformes de ξ , y_1 et y_2 .

¹ On voit aisément pourquoi j'écris cette dernière relation; l'arc BC comme on le voit sur la figure est tout entier au-dessus de l'axe des X , ce qui entraîne l'inégalité $x_2 > 0$; il est clair que cette inégalité subsistera encore pour les valeurs suffisamment petites de μ .

Toutefois pour trouver le mode de représentation géométrique le plus convenable, il faut encore faire un changement de variables. Posons:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + x_2, & x'_2 &= x_1 - x_2, \\y'_1 &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2), & y'_2 &= \frac{1}{2}(y_1 - y_2).\end{aligned}$$

Après ce changement de variables, les équations conserveront la forme canonique:

$$\begin{aligned}\frac{dx'_1}{dt} &= \frac{dF}{dy'_1}, & \frac{dy'_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx'_1}, \\ \frac{dx'_2}{dt} &= \frac{dF}{dy'_2}, & \frac{dy'_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx'_2}.\end{aligned}$$

On voit que y'_1 et y'_2 sont encore des variables angulaires; quand en effet y'_1 ou y'_2 augmente d'un multiple 2π , y_1 et y_2 augmentent aussi d'un multiple de 2π et par conséquent la situation du système ne change pas.

Mais il y a plus; quand on change simultanément y'_1 et y'_2 en $y'_1 + \pi$ et $y'_2 + \pi$, y_2 ne change pas et y_1 augmente de 2π . La situation du système ne change donc pas.

Cela posé nous représenterons la situation du système par le point de l'espace qui a pour coordonnées rectangulaires:

$$X = \cos y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \quad Y = \sin y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \quad Z = \xi \sin y'_2.$$

Pour $\xi = 0$ la situation du système ne dépend pas de y'_2 et il en est de même du point représentatif qui est alors sur le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1, \quad Z = 0.$$

Pour $\xi = \infty$, la situation du système ne dépend pas de y'_1 et il en est de même du point représentatif qui est alors sur l'axe des Z si $\cos y'_2$ est négatif et à l'infini si $\cos y'_2$ est positif.

A chaque point de l'espace correspond donc une situation du système et une seule; réciproquement, à chaque situation du système correspondent, non pas un, mais deux points de l'espace et en effet aux deux systèmes de valeurs (x'_1, x'_2, y'_1, y'_2) et $(x'_1, x'_2, y'_1 + \pi, y'_2 + \pi)$ corres-

pondent deux points différents de l'espace, mais une seule situation du système.

Les équations (1) admettent les invariants intégraux:

$$\int (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2) = \int (dx'_1 dy'_1 + dx'_2 dy'_2)$$

et

$$\int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \int dx'_1 dy'_1 dx'_2 dy'_2.$$

Si nous transformons cet invariant par les règles exposées dans le § 3 (1^{ère} partie, chapitre II) nous verrons que:

$$\int \frac{x_1'^2 d\xi dy'_1 dy'_2}{x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'}} = \int \frac{x_1'^2 dX dY dZ}{\left(x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'}\right) \xi (X^2 + Y^2)}$$

est encore un invariant intégral.

Comme ξ est essentiellement positif, la quantité sous le signe $\int$ est de même signe que:

$$x_1' \frac{dF}{dx_1'} + x_2' \frac{dF}{dx_2'} = x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2}.$$

Or pour $\mu = 0$, on trouve:

$$x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2} = x_1 - \frac{1}{x_2}.$$

Si nous nous supposons placés dans le cas de la figure 4 et sur l'arc BC, nous devons supposer:

$$C > \frac{3}{2}, \quad x_1^2 < x_2^2, \quad 0 < x_2 < 1,$$

d'où l'on tire:

$$x_1 - \frac{1}{x_2} = 3x_1 - 2C > 3x_1 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 3(x_1 - 1) < 0.$$

Ainsi $x_1 \frac{dF}{dx_1} + x_2 \frac{dF}{dx_2}$ est toujours négatif quand μ est nul. Il en

sera encore de même quand μ cessera d'être nul, pourvu que C soit assez différent de $\frac{3}{2}$.

Dans ces conditions l'intégrale:

$$\int \frac{x_1^2 dX dY dZ}{\xi(X^2 + Y^2) \left(-x_1 \frac{dF}{dx_1} - x_2 \frac{dF}{dx_2} \right)}$$

est un invariant positif.

Pour $\mu = 0$, les équations (5) s'intègrent aisément comme on le sait et on trouve:

$$L = \text{const.}, \quad G = \text{const.}, \quad g = \text{const.}, \quad l = nt + \text{const.}$$

Les solutions ainsi obtenues sont représentées dans le mode de représentation géométrique adopté par certaines trajectoires. Ces trajectoires sont fermées toutes les fois que le moyen mouvement n est un nombre commensurable. Elles sont tracées sur des surfaces trajectoires qui ont pour équation générale

$$\xi = \text{const.}$$

et qui sont par conséquent des surfaces de révolution fermées analogues à des tores.

Nous verrons dans la suite comment ces résultats sont modifiés quand μ n'est plus nul.

Comme second exemple, je reprends l'équation dont j'ai déjà parlé à la fin du § ~~II~~ (~~1^{ère} partie, chapitre III~~)

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^3 = \mu R,$$

R étant une fonction de ρ et de t , holomorphe par rapport à ρ et s'annulant avec ρ et périodique par rapport à t . Cette équation peut s'écrire en reprenant les notations du paragraphe cité:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi}.$$

avec:

$$\xi = t, \quad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \quad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2 \rho^2}{2} + \frac{m \rho^4}{4} - \mu \int R(\rho, \xi) d\rho + \eta$$

Posons:

$$\sigma = \sqrt{n} \sqrt{2x_1} \cos y_1, \quad \rho = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{2x_1} \sin y_1.$$

Les équations conserveront la forme canonique des équations de la dynamique et la fonction F dépendra de deux variables linéaires x_1 et η de deux variables angulaires y_1 et ξ .

On voit aisément que quand on se donne la constante des forces vives C , x_1 , y_1 et ξ , la quatrième variable η est entièrement déterminée; on a en effet:

$$\eta = C - nx_1 - \frac{m}{n^2} x_1^2 \sin^2 y_1 + \mu \int R(\rho, \xi) d\rho.$$

Pour $x_1 = 0$, la situation du système ne dépend pas de y_1 . Nous pouvons donc adopter pour représenter cette situation le point dont les coordonnées sont:

$$X = \cos \xi e^{x_1 \cos y_1}, \quad Y = \sin \xi e^{x_1 \cos y_1}, \quad Z = x_1 \sin y_1.$$

A chaque situation du système correspond ainsi un point de l'espace et inversement. Il faut excepter les points à l'infini et les points de l'axe des Z qui nous donneraient $x_1 = \infty$ et par conséquent un résultat illusoire.

Comme troisième exemple, envisageons un point mobile pesant se mouvant sur une surface parfaitement polie et dans le voisinage d'une position d'équilibre stable.

Prenons pour origine le point le plus bas de la surface; pour plan des xy le plan tangent qui sera horizontal; pour axes des x et des y les axes de l'indicatrice de façon que l'équation de la surface s'écrive:

$$z = \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} + \mu \varphi(x, y),$$

$\varphi(x, y)$ étant un ensemble de termes du 3^{me} degré au moins en x et en y et μ un coefficient très petit.

Nous aurons alors en appelant x' et y' les projections de la vitesse sur les axes des x et des y

$$F = \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + gz,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dy'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{dF}{dx}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF}{dy}.$$

Changeons de variable en posant:

$$x = \frac{\sqrt{2x_1}}{\sqrt[4]{ga}} \cos y_1, \quad x' = \sqrt{2x_1} \sqrt[4]{ga} \sin y_1,$$

$$y = \frac{\sqrt{2x_2}}{\sqrt[4]{gb}} \cos y_2, \quad y' = \sqrt{2x_2} \sqrt[4]{gb} \sin y_2.$$

Les équations différentielles conserveront la forme canonique des équations de la dynamique. L'équation des forces vives s'écrit:

$$\sqrt{ga} x_1 + \sqrt{gb} x_2 + \mu g \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

φ désignant la même fonction que plus haut, mais transformée par le changement de variables. Comme x_1 et x_2 sont essentiellement positifs (ainsi d'ailleurs que les coefficients a et b), l'équation des forces vives montre que ces deux quantités restent toujours inférieures à une certaine limite. D'après la définition de la fonction φ cette fonction s'annule avec x_1 et x_2 , et il en est encore de même de ses dérivées partielles du 1^{er} ordre. Nous en concluons que μ étant très petit, la fonction $\mu\varphi$ et ses dérivées du 1^{er} ordre ne pourront jamais dépasser une certaine limite supérieure très petite. Nous pouvons donc écrire:

$$(8) \quad \left| \mu \frac{d\varphi}{dx_1} \right| < \sqrt{\frac{a}{g}}, \quad \left| \mu \frac{d\varphi}{dx_2} \right| < \sqrt{\frac{b}{g}}.$$

Faisons maintenant $x_2 = \xi x_1$; le rapport ξ sera essentiellement positif. L'équation des forces vives devient:

$$(9) \quad x_1(\sqrt{ga} + \sqrt{gb} \xi) + \mu g \varphi(x_1, \xi x_1, y_1, y_2) = C.$$

La dérivée du premier membre de (9) par rapport à x_1 s'écrit:

$$\sqrt{ga} + \sqrt{gb} \xi + \mu g \frac{d\varphi}{dx_1} + \mu \xi g \frac{d\varphi}{dx_2}.$$

En vertu des inégalités (8), cette expression est toujours positive, ce qui montre que l'on peut tirer de l'équation (9) x_1 en fonction uniforme de ξ , y_1 et y_2 , et par conséquent que la situation du système est complètement définie par les trois variables y_1 , y_2 et ξ .

Pour $\xi = 0$ la situation ne dépend pas de y_1 , pour $\xi = \infty$ elle ne dépend pas de y_2 .

Nous représenterons donc cette situation par le point:

$$X = \cos y_2 e^{\xi \cos y_1}, \quad Y = \sin y_2 e^{\xi \cos y_1}, \quad Z = \xi \sin y_1.$$

A chaque point de l'espace correspondra ainsi une situation du système et réciproquement.

Les exemples qui précèdent suffiront, je pense, pour faire comprendre l'importance du problème qui va nous occuper dans ce chapitre et la façon dont on peut varier les modes de représentation géométrique.

§ 2. Équation des surfaces asymptotiques.

Reprenons nos hypothèses ordinaires, à savoir: que quatre variables, deux linéaires x_1 et x_2 , deux angulaires y_1 et y_2 sont liées par les équations:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}. \end{aligned}$$

Que la constante C des forces vives étant regardée comme une des données de la question, ces quatre variables satisfont à l'équation:

$$(2) \quad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

de telle façon qu'il n'y en a que trois d'indépendantes.

Que l'on a adopté un mode de représentation géométrique tel qu'à toute situation du système correspond un point représentatif et réciproquement.

Note 16 bis

Chapitre II.

Etude des Surfaces Asymptotiques.

§ 16. Manière de Exposer le Problème.

Reprenons les équations habit de la Dynamique en supposant deux degrés de liberté seulement, c'est à dire et par conséquent quatre variables x_1, x_2, y_1 et y_2 . D'après ce que nous avons vu aux §§ 13 et 14 (Chapitre III, 1^{re} Partie) ces équations admettent certaines solutions particulières remarquables que nous avons appelées asymptotiques. Chacune de ces solutions asymptotiques est représentée, dans le système de représentation géométrique exposé au § précédent, par certaines courbes bijectives. L'ensemble de ces courbes engendrent certaines surfaces que nous pouvons appeler surfaces asymptotiques et que nous nous proposons d'étudier.

Ces solutions asymptotiques peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$(1) \quad x_1 = \varphi_1(t, w), \quad x_2 = \varphi_2(t, w), \quad y_1 = n_1 t + \varphi_3(t, w), \quad y_2 = n_2 t + \varphi_4(t, w)$$

w étant égal à $A e^{it}$, et A étant une constante arbitraire. De plus $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 sont (par rapport à t , w étant regardé un instant comme une constante) des fonctions périodiques de période T et $n_1 T$ et $n_2 T$ sont des multiples de 2π .

Si entre les équations (1) on élimine t et w , il vient de là:

$$(2) \quad x_1 = f_1(y_1, y_2) \quad x_2 = f_2(y_1, y_2)$$

et ces équations peuvent être regardées comme définissant nos surfaces asymptotiques. Nous avons vu ensuite que si l'on cherche à développer $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ et φ_4 suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, on arrive à des séries qui sont divergentes, mais que ces séries représentent néanmoins asymptotiquement des fonctions lorsque μ est très petit.

Je rappelle que je conviens de dire que la série

$$A_0 + A_1 x + \dots + A_p x^p + \dots$$

représente asymptotiquement la fonction $F(x)$ pour x très petit, quand on a:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - A_0 - A_1 x - \dots - A_p x^p}{x^{p+1}} = 0 \quad \text{pour } x = 0.$$

J'ai été dit dans les *Acta Mathematica* Tome VIII, les propriétés des séries divergentes qui représentent asymptotiquement certaines fonctions et j'ai reconnu que les règles ordinaires du calcul sont applicables à ces séries. Une égalité asymptotique, c'est à dire une égalité entre une série divergente et une fonction qu'elle représente asymptotiquement, peut être soumise toutes les opérations ordinaires du calcul, à l'exception de la

différentiation.

Soyent donc

$$\varepsilon_1(t, w, \sqrt{\mu}), \varepsilon_2(t, w, \sqrt{\mu}), \varepsilon_3(t, w, \sqrt{\mu}), \varepsilon_4(t, w, \sqrt{\mu})$$

des séries divergentes qui représentent asymptotiquement ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ qui représentent asymptotiquement y_1, y_2, y_3, y_4 .

Nous aurons alors les quatre égalités asymptotiques:

$$(3) \quad x_1 = \varepsilon_1(t, w, \sqrt{\mu}), \quad x_2 = \varepsilon_2(t, w, \sqrt{\mu}), \quad y_1 = \varepsilon_3(t, w, \sqrt{\mu}), \quad y_2 = \varepsilon_4(t, w, \sqrt{\mu})$$

Nous pourrions éliminer t et w entre ces égalités d'après les règles ordinaires du calcul et nous obtiendrions ainsi deux nouvelles égalités asymptotiques:

$$(4) \quad x_1 = s_1(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), \quad x_2 = s_2(y_1, y_2, \sqrt{\mu})$$

où s_1 et s_2 sont des séries divergentes ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et dont les coefficients sont des fonctions de y_1 et de y_2 .

En général, il n'est pas permis de différentier une égalité asymptotique; mais nous avons démontré à la fin du § 14 (1^{ère} partie, chapitre III) que dans le cas particulier qui nous occupe, on peut différentier autant de fois que l'on veut les égalités (3), tant par rapport à t que par rapport à w .

Nous pouvons en conclure qu'il est permis également de différentier les égalités (4) pas autant de fois qu'on veut par rapport à y_1 et à y_2 .

Nous nous proposons d'étudier les surfaces asymptotiques définies par les équations (2). Les fonctions $x_1 = f_1$, $x_2 = f_2$ qui entrent dans ces équations devront satisfaire aux équations

$$(5) \quad \frac{dF}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dy_1} = 0$$

$$\frac{dF}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} = 0$$

Nous allons procéder par approximation, nécessaire; dans une première approximation nous évaluerons pour nos équations des surfaces asymptotiques les équations (4) en nous arrêtant au second terme des séries (c'est à dire au terme en $\sqrt{\mu}$) inclusivement.

L'erreur commise sera alors du même ordre de grandeur que μ .

Dans une seconde approximation, nous prendrons encore pour équations des surfaces asymptotiques les équations (4), mais en prenant un plus grand nombre de termes dans les séries. Nous pourrions en prendre un assez grand nombre pour que l'erreur commise soit du même ordre de grandeur que μ^p , quelque grand que soit p .

Enfin dans une troisième approximation, nous chercherons à mettre en évidence les propriétés des équations exactes des surfaces asymptotiques, c'est à dire des équations

19552

S/6.

(2).

Nous ~~devons~~^{devons} donc d'abord chercher à former directement les séries s_1 et s_2 des équations (4). Les séries doivent satisfaire, substituées à la place de x_1 et de x_2 , doivent satisfaire formellement aux équations (5).

Nous sommes donc conduits à chercher des séries ou données suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, qui satisfont formellement aux équations (5). Les coefficients de ces séries ~~devront satis~~^{seront} seront des fonctions de y_1 et de y_2 qui ne devront pas changer quand y_1 et y_2 augmentent respectivement de $n_1 T$ et $n_2 T$.

Mais nous trouverons une infinité de séries qui satisfont à ces conditions. Comment distinguer parmi celles-là, celles qui ~~satis~~^{doivent} doivent entrer dans les égalités (4)?

Nous avons en plus haut qu'il ~~existe~~^{doit} notre mode de représentation géométrique, ~~et existe~~^{car il doit} toute solution périodique est représentée par une courbe fermée et que par cette courbe fermée, passe et deux surfaces asymptotiques. On passe de l'une à l'autre en changeant $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$.

Si donc dans les équations (2) on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$, on obtient une seconde surface asymptotique qui doit couper la première.

En d'autres termes, si on considère les deux surfaces asymptotiques ainsi obtenues comme deux nappes d'une même surface, on peut dire que cette surface a une courbe double.

Soit s_1^p et s_2^p la somme des p premiers termes des séries s_1 et s_2 , les équations:

$$(6) \quad \begin{aligned} x_1 &= s_1^p(y_1, y_2, \sqrt{\mu}), & x_2 &= s_2^p(y_1, y_2, \sqrt{\mu}) \\ x_1 &= s_1^p(y_1, y_2, -\sqrt{\mu}), & x_2 &= s_2^p(y_1, y_2, -\sqrt{\mu}) \end{aligned}$$

représenteront deux surfaces qui différeront peu des deux nappes dont je viens de parler et qui par conséquent devront se couper.

Si l'on considère ces deux surfaces comme deux nappes d'une surface unique, on peut dire que cette surface unique présente une courbe double.

Donc, verrons dans la suite que cette condition suffit pour faire distinguer les séries s_1 et s_2 parmi toutes les séries de même forme qui satisfont formellement aux équations (5).

§ 17.

196

En vertu des inégalités (8), cette expression est toujours positive, ce qui montre que l'on peut tirer de l'équation (9) x_1 en fonction uniforme de ξ , y_1 et y_2 , et par conséquent que la situation du système est complètement définie par les trois variables y_1 , y_2 et ξ .

Pour $\xi = 0$ la situation ne dépend pas de y_1 , pour $\xi = \infty$ elle ne dépend pas de y_2 .

Nous représenterons donc cette situation par le point:

$$X = \cos y_2 e^{\xi \cos y_1}, \quad Y = \sin y_2 e^{\xi \cos y_1}, \quad Z = \xi \sin y_1.$$

A chaque point de l'espace correspondra ainsi une situation du système et réciproquement.

Les exemples qui précèdent suffiront, je pense, pour faire comprendre l'importance du problème qui va nous occuper dans ce chapitre et la façon dont on peut varier les modes de représentation géométrique.

17. Première approximation.

§ 1. Équation des surfaces asymptotiques.

Reprenons nos hypothèses ordinaires, à savoir: que quatre variables, deux linéaires x_1 et x_2 , deux angulaires y_1 et y_2 sont liées par les équations:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}. \end{aligned}$$

Que la constante C des forces vives étant regardée comme une des données de la question, ces quatre variables satisfont à l'équation:

$$(2) \quad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

de telle façon qu'il n'y en a que trois d'indépendantes.

Que l'on a adopté un mode de représentation géométrique tel qu'à toute situation du système correspond un point représentatif et réciproquement.

Nous aurons alors en appelant x' et y' les projections de la vitesse sur les axes des x et des y

$$F = \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} + gz,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dy'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{dF}{dx}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{dF}{dy}.$$

Changeons de variable en posant:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2x_1}}{\sqrt{ga}} \cos y_1, & x' &= \sqrt{2x_1} \sqrt{ga} \sin y_1, \\ y &= \frac{\sqrt{2x_2}}{\sqrt{gb}} \cos y_2, & y' &= \sqrt{2x_2} \sqrt{gb} \sin y_2. \end{aligned}$$

Les équations différentielles conserveront la forme canonique des équations de la dynamique. L'équation des forces vives s'écrit:

$$\sqrt{ga} x_1 + \sqrt{gb} x_2 + \mu g \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

φ désignant la même fonction que plus haut, mais transformée par le changement de variables. Comme x_1 et x_2 sont essentiellement positifs (ainsi d'ailleurs que les coefficients a et b), l'équation des forces vives montre que ces deux quantités restent toujours inférieures à une certaine limite. D'après la définition de la fonction φ cette fonction s'annule avec x_1 et x_2 , et il en est encore de même de ses dérivées partielles du 1^{er} ordre. Nous en concluons que μ étant très petit, la fonction $\mu\varphi$ et ses dérivées du 1^{er} ordre ne pourront jamais dépasser une certaine limite supérieure très petite. Nous pouvons donc écrire:

$$(8) \quad \left| \mu \frac{d\varphi}{dx_1} \right| < \sqrt{\frac{a}{g}}, \quad \left| \mu \frac{d\varphi}{dx_2} \right| < \sqrt{\frac{b}{g}}.$$

Faisons maintenant $x_2 = \xi x_1$; le rapport ξ sera essentiellement positif. L'équation des forces vives devient:

$$(9) \quad x_1(\sqrt{ga} + \sqrt{gb} \xi) + \mu g \varphi(x_1, \xi x_1, y_1, y_2) = C.$$

La dérivée du premier membre de (9) par rapport à x_1 s'écrit:

$$\sqrt{ga} + \sqrt{gb} \xi + \mu g \frac{d\varphi}{dx_1} + \mu \xi g \frac{d\varphi}{dx_2}.$$

Que F dépend d'un paramètre très petit μ , de telle façon qu'on puisse développer F suivant les puissances de μ et écrire:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

Que F_0 ne dépend que de x_1 et x_2 et est indépendant de y_1 et de y_2 .

Ces conditions sont remplies dans le cas particulier du problème des trois corps qui nous a servi d'exemple au paragraphe précédent.

Supposons que pour certaines valeurs de x_1 et de x_2 , par exemple pour:

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0$$

les deux nombres

$$-\frac{dF_0}{dx_1} \quad \text{et} \quad -\frac{dF_0}{dx_2}$$

(que j'appellerai pour abrégé n_1 et n_2) sont commensurables entre eux.

D'après ce que nous avons vu dans le § 4 (~~1^{ère} partie, chapitre III~~) à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$ correspond une équation

$$\frac{d\phi}{d\omega_2} = 0,$$

qui portait le n° 15 dans le paragraphe cité, et à chaque racine de cette équation (15) correspond une solution périodique des équations (1).

Par conséquent les équations (1) ont une infinité de solutions périodiques si μ est suffisamment petit.

Nous avons vu ensuite dans le § 4 (~~1^{ère} partie, chapitre III~~) que le nombre des racines de l'équation (15) est toujours pair, que la moitié de ces racines correspond à des solutions périodiques stables et l'autre moitié à des solutions instables.

Les équations (1) ont donc une infinité de solutions périodiques instables.

Chacune de ces solutions périodiques sera représentée dans le mode de représentation adopté par une courbe trajectoire fermée.

Nous avons vu au § 3 (~~1^{ère} partie, chapitre III~~) que par chacune des courbes fermées qui représentent une solution périodique instable,

H si μ est assez petit
des

passent deux surfaces trajectoires dites *asymptotiques* sur lesquelles sont tracées en nombre infini des trajectoires qui vont en se rapprochant asymptotiquement de la courbe trajectoire fermée.

Les équations (1) nous conduisent donc à une infinité de surfaces trajectoires asymptotiques dont je me propose de trouver l'équation.

Voyons d'abord sous quelle forme se présente en général l'équation d'une surface trajectoire. Cette équation pourra s'écrire

$$x_1 = \phi_1(y_1, y_2), \quad x_2 = \phi_2(y_1, y_2),$$

ϕ_1 et ϕ_2 étant deux fonctions de y_1 et de y_2 qui doivent être choisies de telle sorte que l'on ait identiquement:

$$F(\phi_1, \phi_2, y_1, y_2) = C.$$

Ces deux fonctions ϕ_1 et ϕ_2 devront d'ailleurs satisfaire à deux équations aux dérivées partielles:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dy_1} &= 0, \\ \frac{dF}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} &= 0. \end{aligned}$$

Il pourrait d'ailleurs nous suffire d'envisager la première de ces équations, car on peut en faire disparaître x_2 , en remplaçant cette variable par sa valeur que l'on peut tirer de (2) en fonction de x_1 , de y_1 et de y_2 .

Voici comment nous procéderons pour intégrer les équations (3) en supposant que x_1 et x_2 sont très voisins de x_1^0 et de x_2^0 , et que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable.

Nous supposerons que x_1 et x_2 sont développés selon les puissances de $\sqrt{\mu}$ et nous écrirons:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + x_1^1 \sqrt{\mu} + x_1^2 \mu + x_1^3 \mu \sqrt{\mu} + \dots \\ x_2 &= x_2^0 + x_2^1 \sqrt{\mu} + x_2^2 \mu + x_2^3 \mu \sqrt{\mu} + \dots \end{aligned}$$

et nous chercherons à déterminer les fonctions x_i^k de telle façon qu'en

L'ensemble

substituant dans les équations (3) à la place de x_1 et de x_2 leurs valeurs (4), ces équations soient satisfaites¹

Si dans F nous substituons à la place de x_1 et de x_2 leurs valeurs (4), F deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et on pourra écrire

$$F = H_0 + \sqrt{\mu} H_1 + \mu H_2 + \mu\sqrt{\mu} H_3 + \dots$$

On voit d'ailleurs sans peine que:

$$H_0 = F_0(x_1^0, x_2^0),$$

$$H_1 = x_1^1 \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1 \frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_1 x_1^1 - n_2 x_2^1,$$

$$H_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[(x_1^1)^2 \frac{d^2 F_0}{(dx_1^0)^2} + 2x_1^1 x_2^1 \frac{d^2 F_0}{dx_1^0 dx_2^0} + (x_2^1)^2 \frac{d^2 F_0}{(dx_2^0)^2} \right] - n_1 x_1^2 - n_2 x_2^2,$$

.....

et plus généralement:

$$H_k = \theta_k - [Lx_1^1 x_1^{k-1} + M(x_1^1 x_2^{k-1} + x_2^1 x_1^{k-1}) + Nx_2^1 x_2^{k-1}] - n_1 x_1^k - n_2 x_2^k,$$

θ_k ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \dots, x_2^{k-2}$, et en posant pour abréger

$$L = -\frac{d^2 F_0}{(dx_1^0)^2}, \quad M = -\frac{d^2 F_0}{dx_1^0 dx_2^0}, \quad N = -\frac{d^2 F_0}{(dx_2^0)^2}.$$

La première des équations (3) nous donne alors, en égalant les puissances semblables de $\sqrt{\mu}$, une suite d'équations qui nous permettront de déterminer successivement $x_1^0, x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^k$.

¹ Si x_1^0 et x_2^0 étaient choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, on pourrait se contenter de développer x_1 et x_2 suivant les puissances de μ (et non de $\sqrt{\mu}$). On arriverait ainsi à des séries, qui à la vérité ne seraient pas convergentes au sens géométrique du mot, mais qui comme celles de M. LINDSTEDT pourraient rendre des services dans certains cas.

minor successivement $x_1^0, x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^k$; en effet, si nous posons pour abréger:

$$[i, k] = \frac{dH_i dx_1^k}{dx_1^0 dy_1} + \frac{dH_i dx_1^k}{dx_2^0 dy_2},$$

les équations s'écriront:

$$\begin{aligned} [0, 0] + \frac{dH_0}{dy_1} &= 0, \\ [0, 1] + [1, 0] + \frac{dH_1}{dy_1} &= 0, \\ (5) \quad [0, 2] + [1, 1] + [2, 0] + \frac{dH_2}{dy_1} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ [0, k] + [1, k-1] + \dots + [k-1, 1] + [k, 0] + \frac{dH_k}{dy_1} &= 0. \end{aligned}$$

Développons d'abord la première des équations (5); elle s'écrira:

$$-n_1 \frac{dx_1^0}{dy_1} - n_2 \frac{dx_1^0}{dy_2} = 0.$$

Cette première équation sera satisfaite d'elle-même, puisqu'on a supposé plus haut que

$$x_1^0 = \text{const.}$$

Dans ces conditions nous aurons:

$$[k, 0] = 0,$$

car les dérivées partielles de x_1^0 doivent être nulles.

On a d'autre part:

$$[0, k] = -n_1 \frac{dx_1^k}{dy_1} - n_2 \frac{dx_1^k}{dy_2}.$$

On trouve également:

$$[k-1, 1] = Z_k - Lx_1^{k-1} \frac{dx_1^1}{dy_1} - M \left(x_2^{k-1} \frac{dx_1^1}{dy_1} + x_1^{k-1} \frac{dx_1^1}{dy_2} \right) - Nx_2^{k-1} \frac{dx_1^1}{dy_2},$$

Z_k étant une fonction qui ne dépend que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \dots, x_2^{k-2}$, et enfin

$$[1, k-1] = -Lx_1^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_1} - M \left(x_2^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_1} + x_1^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_2} \right) - Nx_2^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_2}.$$

5/7

200

Quant aux expressions $[2, k-2], [3, k-3], \dots, [k-2, 2]$, il est clair qu'elles ne peuvent dépendre que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \dots, x_2^{k-2}$.

Nous pouvons donc écrire les équations (5) en mettant en évidence les termes qui dépendent de x_1^k , de x_2^k , de x_1^{k-1} ou de x_2^{k-1} , mais nous devons d'abord observer que ces équations sont susceptibles d'être mises sous une forme plus simple.

Nous pouvons toujours supposer ~~en effet~~ que $n_2 = 0$. Car si cela n'avait pas lieu nous poserions: H 2/3

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2, & y_1' &= dy_1 - cy_2, \\ x_2' &= cx_1 + dx_2, & y_2' &= -by_1 + ay_2, \end{aligned}$$

a, b, c, d étant quatre nombres entiers tels que

$$ad - bc = 1.$$

Après ce changement de variables les équations conservent la forme canonique.

La fonction F qui est périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2 , est encore périodique de période 2π par rapport à y_1' et à y_2' . Le changement de variables n'a donc pas altéré la forme des équations (1).

Les nombres n_1 et n_2 sont remplacés par deux nouveaux nombres n_1' et n_2' qui jouent par rapport aux équations transformées le même rôle que n_1 et n_2 par rapport aux équations primitives et l'on a:

$$\begin{aligned} n_1' &= dn_1 - cn_2, \\ n_2' &= -bn_1 + an_2. \end{aligned}$$

Mais le rapport de n_1 à n_2 étant commensurable par hypothèse, il est toujours possible de choisir les quatre entiers a, b, c, d de telle sorte que

$$n_2' = -bn_1 + an_2 = 0.$$

Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer que n_2 soit nul; c'est ce que nous ferons jusqu'à nouvel ordre. A

^ Nous rapporons en même temps $n_1 T = 2\pi$.

Grâce à cette simplification les équations (5) peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned}
 & -n_1 \frac{dx_1^1}{dy_1} = 0, \\
 & -n_1 \frac{dx_1^2}{dy_1} + [1, 1] + \frac{dH_2}{dy_1} = 0, \\
 & \dots \dots \dots \\
 & -n_1 \frac{dx_1^k}{dy_1} - L \left(x_1^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_1} + x_1^k \frac{dx_1^1}{dy_1} \right) \\
 & - M \left(x_2^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_1} + x_1^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_2} + x_2^{k-1} \frac{dx_1^1}{dy_1} + x_1^{k-1} \frac{dx_1^1}{dy_2} \right) - N \left(x_2^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_2} + x_2^{k-1} \frac{dx_1^1}{dy_2} \right) + T_k = 0,
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

T_k ne dépendant que de y_1, y_2 et des x_i^0, x_i^1, x_i^2 etc. jusqu'à x_i^{k-2} .

On a d'autre part:

$$[1, 1] = - (Lx_1^1 + Mx_2^1) \frac{dx_1^1}{dy_1} - (Mx_1^1 + Nx_2^1) \frac{dx_1^1}{dy_2}.$$

La première des équations (6) montre que x_1^1 ne dépend que de y_2 .
On trouverait de même:

$$-n_1 \frac{dx_2^1}{dy_1} = 0;$$

ce qui montre que x_2^1 ne dépend non plus que de y_2 .

En tenant compte de cette circonstance, la seconde équation (6) s'écrit

$$-n_1 \frac{dx_1^2}{dy_1} - (Mx_1^1 + Nx_2^1) \frac{dx_1^1}{dy_2} + \frac{dF_1}{dy_1} = 0.$$

Il y faut d'ailleurs adjoindre l'équation suivante qu'on obtiendrait de la même manière:

$$-n_1 \frac{dx_2^2}{dy_1} - (Mx_1^1 + Nx_2^1) \frac{dx_1^1}{dy_2} + \frac{dF_2}{dy_2} = 0.$$

Nous nous proposerons dans ce qui va suivre de déterminer les fonctions x_i^k de telle façon que ce soient des fonctions périodiques de y_1 , qui ne doivent pas être altérées quand, y_2 conservant la même valeur, y_1 augmentera de 2π .

Si après cette simplification, nous égalons les coefficients de $\sqrt{\mu}$ dans les deux membres des deux équations (3) il viendra

$$(5) \quad -n_1 \frac{dx'_1}{dy_1} = -n_1 \frac{dx'_2}{dy_1} = 0$$

ce qui montre que x'_1 et x'_2 ne dépendent ^{que} pas de y_2 .

Égalons maintenant les coefficients de μ dans les deux membres de la première des équations (3), il vient, en tenant compte des équations (5):

$$(6) \quad -n_1 \frac{dy_2^2}{dy_1} - (Mx'_1 + Nx'_2) \frac{dx'_1}{dy_2} + \frac{dF_1}{dy_2} = 0$$

Si après cette simplification, nous écrivons
les coefficients de τ dans les deux
membres des deux équations (2) et (3)

$$(2) \quad -n_1 \frac{dx_1}{dy_1} = -n_1 \frac{dx_1}{dy_1} = 0$$

ce qui montre que x_1 et x_2 ne sont
pas des fonctions de y_1 .

Écrivons maintenant les coefficients
de τ dans les deux membres de
la première des équations (2) et (3).

$$(3) \quad -n_1 \frac{dx_1}{dy_1} - (M_1 x_1 + N_1 x_2) \frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dx_1}{dy_1} = 0$$

ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 étant des séries ordonnées suivant les puissances de $t - \tau$,
 μ, x_2, y_2, z_2 .
Ces séries se réduiront respectivement à a, b, c pour

$$t - \tau = \mu = x_2 = y_2 = z_2 = 0.$$

Comme $\varphi(x, y)$ est développable suivant les puissances de $x - a$ et
 $y - b$, si $x - a$ et $y - b$ sont assez petits, nous aurons également:

$$\varphi(x, y) = \phi_4(t - \tau, \mu, x_2, y_2, z_2).$$

ϕ_4 étant une série de même forme que ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3 .
Ecrivons que le point x, y, z se trouve sur la surface S , nous aurons:

$$\phi_4 = \phi_5.$$

Nous nous proposerons dans ce qui va suivre de déterminer les fonctions x_i^1 de telle façon que ce soient des fonctions périodiques de y_1 , qui ne doivent pas être altérées quand, y_2 conservant la même valeur, y_1 augmentera de 2π .

Nos fonctions pourront alors être développées en séries trigonométriques suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 . Nous conviendrons de représenter par la notation

$$[U]$$

le terme tout connu dans le développement de la fonction périodique U , suivant les lignes trigonométriques de y_1 et de ses multiples. Dans ces conditions on aura:

$$\left[\frac{dU}{dy_1} \right] = 0,$$

et je puis écrire

$$\left[(Mx_1^1 + Nx_2^1) \frac{dx_1^1}{dy_2} \right] = 0,$$

$$\left[(Mx_1^1 + Nx_2^1) \frac{dx_2^1}{dy_2} \right] = \left[\frac{dF_1}{dy_2} \right].$$

Comme x_1^1 et x_2^1 ne dépendent pas de y_1 , je puis écrire plus simplement:

$$(7) \quad \frac{dx_1^1}{dy_2} = 0, \quad (Mx_1^1 + Nx_2^1) \frac{dx_2^1}{dy_2} = \left[\frac{dF_1}{dy_2} \right].$$

La première de ces équations montre que x_1^1 se réduit à une constante. Quant à la seconde, elle est facile à intégrer. On a en effet:

$$\left[\frac{dF_1}{dy_2} \right] = \frac{d[F_1]}{dy_2},$$

ce qui nous donne pour l'intégrale de l'équation (7)

$$(8) \quad Mx_1^1 x_2^1 + \frac{N}{2} (x_2^1)^2 = [F_1] + C_1,$$

C_1 désignant une constante d'intégration.

Mais si nous regardons la constante des forces vives C comme une des données de la question, nous ne pouvons plus considérer les deux constantes x_1^1 et C_1 comme arbitraires. On doit avoir en effet identiquement

$$F = H_0 + \sqrt{\mu} H_1 + \mu H_2 + \mu \sqrt{\mu} H_3 + \dots = C$$

203

203

57.

120

H. Poincaré.

ou

$$H_0 = C, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad \dots$$

ou:

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C, \quad -n_1 x_1^1 = 0, \quad \dots$$

Ainsi la constante x_1^1 est nulle, ce qui apporte de nouvelles simplifications dans nos équations.

La plus générale des équations (6) s'écrit alors:

$$-n_1 \frac{dx_1^k}{dy_1} - Mx_2^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_1} - Nx_2^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_2} + T_k = 0$$

ou bien:

$$n_1 \frac{dx_1^k}{dy_1} + Nx_2^1 \frac{dx_1^{k-1}}{dy_2} = Y_k,$$

Y_k ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \dots, x_2^{k-2}$ et $\frac{dx_1^{k-1}}{dy_1}$.

Nous avons obtenu l'équation (9) en partant des équations (6) et les équations (6) elles-mêmes sont des transformations de la première équation (3). En opérant de même sur la seconde équation (3) nous aurions trouvé:

$$(9') \quad n_1 \frac{dx_2^k}{dy_1} + Mx_1^{k-1} \frac{dx_2^1}{dy_2} + N(x_2^1 \frac{dx_2^{k-1}}{dy_2} + x_2^{k-1} \frac{dx_2^1}{dy_2}) = Y'_k,$$

Y'_k ne dépendant que de $y_1, y_2, x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^{k-2}, x_2^0, x_2^1, \dots, x_2^{k-2}$ et $\frac{dx_2^{k-1}}{dy_1}$.

Nous allons chercher à déterminer par récurrence les fonctions x_i^k et à cet effet, voici comment nous procéderons. Supposons qu'on ait déterminé par un calcul préalable, d'une part:

$$x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^{k-2},$$

$$x_2^0, x_2^1, \dots, x_2^{k-2}$$

d'une manière complète et d'autre part:

$$x_1^{k-1} \text{ et } x_2^{k-1}$$

L'équation (9)
devient en
effet

$$x_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N} [Y_1] + C_1} \quad (9)$$

§ 17.

§ 3. ~~Construction des surfaces asymptotiques.~~~~(Première approximation)~~

204

Nous nous contenterons dans ce paragraphe d'écrire et de discuter les équations de nos surfaces trajectoires en négligeant les termes en μ et ne tenant compte que des termes en $\sqrt{\mu}$.

Nous supposons donc que x_1 et x_2 sont définis en fonction de y_1 et de y_2 par les équations suivantes:

$$x_1 = x_1^0 + \sqrt{\mu} x_1^1 = x_1^0,$$

$$x_2 = x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 = x_2^0 + \sqrt{\frac{2\mu}{N}}([F_1] + C_1).$$

D'après cela, x_1 serait une constante et x_2 une fonction de y_2 seulement, indépendante de y_1 .

Revenons à notre premier exemple du § 1. Ce que nous dirons s'appliquerait également aux deux autres exemples, mais c'est sur le premier que je veux insister parce que c'est un cas particulier du problème des trois corps.

Nous avons vu que l'on pouvait représenter la situation du système par le point P qui a pour coordonnées rectangulaires:

$$\cos y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \sin y'_1 e^{\xi \cos y'_2}, \xi \sin y'_2,$$

où

$$y'_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad y'_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2), \quad \xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1} = \frac{L - G}{L + G} = \frac{-x'_2}{x'_1},$$

$$y_1 = g - t, \quad y_2 = l.$$

Nous avons observé de plus que les variables

$$x'_1 = x_1 + x_2, \quad x'_2 = x_1 - x_2$$

forment avec y'_1 et y'_2 un système de variables canoniques.

Nous pouvons donc regarder ξ , y'_1 et y'_2 comme un système particulier de coordonnées définissant la position du point P dans l'espace, de sorte que toute relation entre ξ , y'_1 , y'_2 est l'équation d'une surface.

Mais pour amener les équations à la forme que nous leur avons donnée dans le paragraphe précédent, nous avons dû faire un autre changement de variables.

Nous avons posé dans ce paragraphe:

$$x'_1'' = ax_1 + bx_2, \quad y'_1'' = dy_1 - cy_2,$$

$$x'_2'' = cx_1 + dx_2, \quad y'_2'' = -by_1 + ay_2,$$

H. ilg
H. en suite
H. ilg

en choisissant les nombres entiers a, b, c, d de façon à annuler le nombre que nous avons appelé n_2'' .

Après ce changement de variables, nous avons supprimé les accents devenus inutiles et nous avons restitué le nom de x_1, x_2, y_1, y_2 à nos nouvelles variables indépendantes x_1'', x_2'', y_1'' et y_2'' .

En conséquence, les variables que nous avons appelées x_1, x_2, y_1 et y_2 dans tout le calcul qui remplit le § 2, et auxquelles nous conserverons désormais ce nom, ne sont pas les mêmes que celles que nous avions désignées par les mêmes lettres dans le premier exemple du § 1, c'est à dire $G, L, g - t$ et l .

Il est clair que notre nouvel y_1 et notre nouvel y_2 sont des fonctions linéaires de:

$$y_1' = \frac{1}{2}(g - t + l) \quad \text{et de} \quad y_2' = \frac{1}{2}(g - t - l)$$

et que le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1 est une fonction linéaire et fractionnaire de ξ .

Nous devons conclure de là que l'on peut définir complètement la position du point P dans l'espace par le nouvel y_1 , le nouvel y_2 et le rapport du nouvel x_2 au nouvel x_1 de telle façon que toute relation entre y_1, y_2 et $\frac{x_2}{x_1}$ est l'équation d'une surface.

Que ce système particulier de coordonnées est tel que l'on peut augmenter y_1 ou y_2 d'un multiple de 2π sans que le point P change.

~~Dans ces conditions, il est clair que l'équation exacte de nos surfaces trajectoires sera~~

$$\left[\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + x_2^1 \sqrt{\mu} + x_2^2 \mu + \dots}{x_1^0 + x_1^1 \sqrt{\mu} + x_1^2 \mu + \dots} \right]$$

~~et que l'équation approximative~~ en négligeant les termes en μ sera:

$$(1) \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + x_2^1 \sqrt{\mu}}{x_1^0 + x_1^1 \sqrt{\mu}} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0} \sqrt{\frac{2}{N} ([F_1]_1 + C_1)}.$$

Nous nous proposons tout d'abord de construire les surfaces représentées par cette équation approximative (1).

H H H
H H L
L d nos surfaces
trajectoires

206

§ 17.

Observons d'abord que $y_1 = 0$ est l'équation d'une certaine surface S et que la portion de cette surface qui nous sera utile est une portion de surface sans contact.

En effet il suffit de montrer que l'on a:

$$\frac{dy_1}{dt} > 0.$$

Or il en est évidemment ainsi, car si l'on pose

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots$$

il vient:

$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 - \mu \frac{dF_1}{dx_1} - \mu^2 \frac{dF_2}{dx_1} + \dots$$

Le paramètre μ étant très petit, $\frac{dy_1}{dt}$ est de même signe que n_1 et n_1 est une constante qui est toujours de même signe.

Donc $\frac{dy_1}{dt}$ est toujours de même signe et ne peut s'annuler.

C. Q. F. D.

La position d'un point P sur la surface S sera définie par les deux autres coordonnées y_2 et $\frac{x_2}{x_1}$; ce système de coordonnées est tout à fait analogue aux coordonnées polaires, c'est à dire que les courbes:

$$\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$$

sont des courbes fermées concentriques et que le point P ne change pas quand l'autre coordonnée y_2 augmente de 2π .

Reprenons les surfaces définies par l'équation (1) et étudions leurs intersections avec la portion de surface S qui a pour équation $y_1 = 0$.

Je remarque d'abord que $\sqrt{\mu}$ étant très petit, ces intersections diffèrent fort peu des courbes $\frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$

Mais pour étudier plus complètement la forme de ces courbes d'intersection, il faut d'abord rechercher quelles sont les propriétés de la fonction

$$[F_1].$$

193. § 17

Revenons aux notations du § 3 (1^{ère} partie, chapitre III). Dans ce paragraphe nous avons posé:

$$F_1 = \sum A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + h),$$

A et h étant des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0 ; comme nous n'avons plus ici que deux degrés de liberté, j'écrirai simplement:

$$F_1 = \sum A \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + h).$$

En faisant ensuite:

$$y_1 = n_1 t, \quad y_2 = n_2 t + \bar{\omega}_2, \quad \omega = (n_1 m_1 + n_2 m_2) t + m_2 \bar{\omega}_2 + h,$$

nous trouvions:

$$F_1 = \sum A \sin \omega.$$

Je posais ensuite:

$$\phi = \sum A \sin \omega,$$

la sommation indiquée par le signe $\sum$ s'étendant à tous les termes tels que:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0;$$

d'où

$$\omega = m_2 \bar{\omega}_2 + h.$$

Dans le cas qui nous occupe, n_2 est nul; la condition $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$ se réduit à $m_1 = 0$ et on a $y_2 = \bar{\omega}_2$; il vient donc:

$$\phi = \sum A \sin(m_2 \bar{\omega}_2 + h) = \sum A \sin(m_2 y_2 + h).$$

D'après la définition de $[F_1]$, il suffit pour obtenir cette quantité de supprimer dans l'expression de F_1 tous les termes où m_1 n'est pas nul; il vient donc:

$$[F_1] = \sum A \sin(m_2 y_2 + h) = \phi.$$

Ainsi la fonction que nous appelons ici $[F_1]$ est la même que nous désignons par ϕ dans la 1^{ère} partie.

$[F_1]$ est par conséquent une fonction périodique de y_2 et cette fonction est finie; elle doit donc passer au moins par un maximum et par un minimum.

208

Nous supposons pour fixer les idées que $[F_1]$ varie de la façon suivante quand y_2 varie depuis 0 jusqu'à 2π .

Pour $y = 0$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à φ_1 .

Pour $y = \eta_1$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à φ_2 .

Pour $y = \eta_2$ $[F_1]$ passe par un maximum égal à φ_3 .

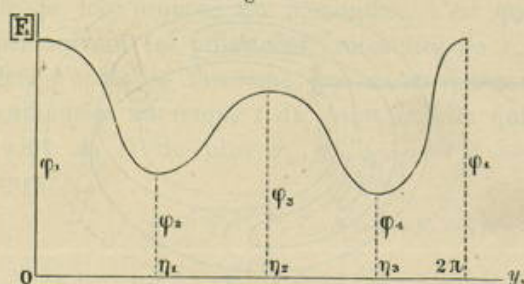
Pour $y = \eta_3$ $[F_1]$ passe par un minimum égal à φ_4 .

Pour $y = 2\pi$ $[F_1]$ reprend la valeur φ_1 .

$$\varphi_1 > \varphi_3 > \varphi_2 > \varphi_4.$$

Ces hypothèses peuvent être représentées par la courbe suivante dont l'abscisse est y_2 et l'ordonnée $[F_1]$:

Fig. 6.



Ayant ainsi fixé les idées, je puis construire les courbes

$$y_1 = 0, \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0} \sqrt{\frac{2}{N} ([F_1] + C_1)}.$$

Nous verrons que selon la valeur de la constante d'intégration C_1 , ces courbes affecteront des formes différentes.

Dans la figure (7), j'ai représenté par un trait plein — les deux courbes $C_1 = -\varphi_4$ et $C_1 = -\varphi_2$; ces deux courbes ont chacune un point double dont les coordonnées sont respectivement:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \quad y_2 = \eta_3$$

et:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \quad y_2 = \eta_1.$$

209

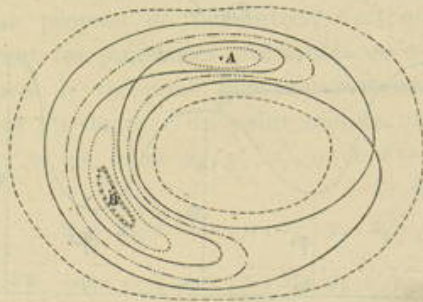
J'ai représenté par un trait pointillé ----- les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de $C_1 > -\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait mixte une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$.

J'ai représenté par le trait ponctué les deux branches d'une courbe correspondant à une valeur de C_1 comprise entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$.

Pour $C_1 = -\varphi_3$ l'une de ces deux branches se réduit à un point représenté sur la figure en A , $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}$, $y_2 = \eta_2$; l'autre branche est représentée sur la figure par le trait $\times \times \times \times \times \times$.

Fig. 7.



Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, cette seconde branche subsiste seule; pour $C_1 = -\varphi_1$, elle se réduit à son tour à un point représenté en B sur la figure et ayant pour coordonnées:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \quad y_2 = 0.$$

Enfin pour $C_1 < -\varphi_1$, la courbe devient toute entière imaginaire.

Les surfaces définies par l'équation (1) ont une forme générale qu'il est aisé de déduire de celle des courbes que nous venons de construire.

Considérons en effet une quelconque de ces courbes et par tous ses points faisons passer une des lignes dont l'équation générale est:

$$y_2 = \text{const.}; \quad \frac{x_2}{x_1} = \text{const.}$$

L'ensemble des lignes ainsi construites constituera une surface fermée qui sera précisément l'une des surfaces définies par l'équation (1).

On voit par là que ces surfaces seront en général des surfaces fermées triplement connexes (c'est à dire ayant mêmes connexions que le tore).

Pour $C_1 > -\varphi_4$ ou pour C_1 compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$ on trouve deux pareilles surfaces, intérieures l'une à l'autre dans le premier cas, extérieures l'une à l'autre dans le second.

Pour C_1 compris entre $-\varphi_3$ et $-\varphi_1$, ou entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$ on n'a plus qu'une seule surface triplement connexe; enfin pour $C_1 < -\varphi_1$ la surface cesse complètement d'exister.

Passons aux quatre surfaces remarquables:

$$C_1 = -\varphi_1, -\varphi_2, -\varphi_3 \text{ et } -\varphi_4.$$

Les surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $C_1 = -\varphi_4$ présentent une courbe double et ont mêmes connexions que la surface engendrée par la révolution d'un limaçon de PASCAL à point double, ou d'une lemniscate autour d'un axe qui ne rencontre pas la courbe.

La surface $C_1 = -\varphi_3$ se réduit à une seule surface fermée triplement connexe et à une courbe fermée isolée; enfin la surface $C_1 = -\varphi_1$ se réduit à une courbe fermée isolée.

Dans le § 3 (1^{ère} partie, chapitre III) nous avons envisagé l'équation:

$$\frac{d\phi}{d\omega_1} = 0$$

qui portait le n° 15 dans ce paragraphe; nous avons vu qu'à chacune des racines de cette équation correspond une solution périodique. Mais dans le cas qui nous occupe, et d'après une remarque que nous venons de faire, cette équation peut s'écrire:

$$\frac{[dF_1]}{dy_2} = 0,$$

de telle sorte que les solutions périodiques correspondront aux maxima et aux minima de $[F_1]$. Dans le cas actuel, ces maxima, de même que les minima, seront au nombre de deux.

Nous aurons donc deux solutions périodiques instables correspondant aux deux courbes doubles des surfaces $C_1 = -\varphi_2$ et $-\varphi_4$ et deux solu-

24

tions périodiques stables, correspondant aux deux courbes fermées isolées des surfaces $C_1 = -\varphi_3$ et $-\varphi_1$.

Mais voyons de plus près en quoi consiste cette correspondance.

Envisageons en particulier la solution périodique qui correspond à la courbe double de $C_1 = -\varphi_4$. Cette solution pourra d'après ce que nous avons vu dans le § 3 (1^{ère} partie, chapitre III) se mettre sous la forme suivante:

$$x_1 = \xi_0 + \mu \xi_1 + \mu^2 \xi_2 + \dots,$$

$$x_2 = \xi'_0 + \mu \xi'_1 + \mu^2 \xi'_2 + \dots,$$

$$y_1 = \zeta_0 + \mu \zeta_1 + \mu^2 \zeta_2 + \dots,$$

$$y_2 = \zeta'_0 + \mu \zeta'_1 + \mu^2 \zeta'_2 + \dots,$$

où l'on a:

$$\xi_0 = x_1^0, \quad \xi'_0 = x_2^0, \quad \zeta_0 = \eta_1 t, \quad \zeta'_0 = \eta_2,$$

et où $\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2, \zeta_1$ etc. sont des fonctions périodiques de t .

Cette solution périodique serait représentée géométriquement par une courbe trajectoire fermée qui aurait pour équations:

$$(3) \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \mu \theta_1, \quad y_2 = \eta_2 + \mu \theta_2,$$

θ_1 et θ_2 étant des fonctions de y_1 et de μ qui restent finies quand μ s'annule.

D'autre part la courbe double de $C_1 = -\varphi_4$ a pour équations:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0}, \quad y_2 = \eta_2.$$

Cela montre que ces deux courbes diffèrent infiniment peu l'une de l'autre si l'on regarde μ comme une quantité infiniment petite et on peut faire correspondre les deux courbes point par point de façon que la distance de deux points correspondants soit du même ordre de grandeur que μ .

Comme la solution périodique définie par les deux équations (2) est instable, on pourra faire passer par la courbe définie par les équations (3) deux surfaces trajectoires asymptotiques.

Quelles sont parmi ces surfaces, celles qui diffèrent peu des surfaces asymptotiques et les représentent en première approximation? D'après ce que nous avons vu au § 1, ce sont celles d'entre elles qui présentent une courbe double, c'est-à-dire les surfaces

$$C_1 = -\varphi_4 \text{ et } C_1 = -\varphi_2$$

montrer que ces surfaces sont fermées, je me suis appuyé sur les théorèmes du § 4 (1^{ère} partie, chapitre II). Ces théorèmes ont été présentés sous une forme géométrique qui avait à mes yeux l'avantage de mieux faire comprendre la genèse de mes idées et de se prêter plus facilement à une généralisation ultérieure. Il ne sera pas inutile toutefois, au point de vue de certaines applications possibles, de donner ici une démonstration analytique.

J'adopterai les mêmes notations que dans les paragraphes cités; j'écrirai donc les équations différentielles sous la forme suivante:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}, \end{aligned}$$

F étant une fonction de x_1, x_2, y_1 et y_2 , périodique de période 2π par rapport à y_1 et y_2 .

Ces équations admettent l'intégrale des forces vives

$$(2) \quad F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C.$$

Nous regarderons la constante C comme une donnée de la question.

Nous supposerons en outre que F dépend d'un paramètre très petit μ et peut se développer suivant les puissances de ce paramètre de la manière suivante:

$$F = F_0 + F_1\mu + F_2\mu^2 + \dots$$

Enfin F_0 ne dépendra que de x_1 et x_2 et sera indépendant de y_1 et de y_2 .

Écrivons:

$$x_1 = x_1^0 + x_1^1\sqrt{\mu} + x_1^2\mu + x_1^3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$

$$x_2 = x_2^0 + x_2^1\sqrt{\mu} + x_2^2\mu + x_2^3\mu\sqrt{\mu} + \dots;$$

imaginons que les coefficients de ces deux développements soient des fonctions de y_1 et de y_2 et cherchons à déterminer ces coefficients de façon que ces équations soient compatibles avec les équations différentielles (1), c'est à dire que l'on ait:

18/
3^e D^{en}cième app^{ro}xi-
mation

Reprenons les
équations (1) du
paragraphe pré-
cédent et les
hypothèses faites
au début de
ce paragraphe;

les ϕ étant des séries développées suivant les puissances de

$$K_{p+1}e^{\lambda_{p+1}t}, K_{p+2}e^{\lambda_{p+2}t}, \dots, K_n e^{\lambda_n t}$$

et suivant les sinus et cosinus des multiples de t .

Ces séries sont convergentes, pourvu qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, et le second aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine et qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme (26).

C'est donc là une nouvelle démonstration du théorème fondamental du § 5 (1^{ère} partie, chapitre III).

Cette démonstration fait ressortir l'analogie de ce théorème avec ceux que j'ai énoncés dans ma thèse et en particulier avec celui-ci :

Dans le voisinage d'un point singulier, les solutions d'une équation différentielle sont développables suivant les puissances de $t, t^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{2}{3}}, \dots, t^{\frac{1}{n}}$.

J'avais d'abord démontré ce théorème (que j'ai ensuite rattaché aux idées générales qui ont inspiré ma thèse) par une voie assez différente dans le 45^e Cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique et M. PRICARD y avait été conduit indépendamment par d'autres considérations (Comptes Rendus 1878).

Note F.

Sur les surfaces asymptotiques.

J'ai donné dans les § 2, 3 et 4 (2^{ème} partie, chapitre I) la manière de trouver l'équation des surfaces asymptotiques et de démontrer que ces surfaces sont fermées.

On peut apporter quelques simplifications dans les calculs par lesquels on arrive à l'équation des surfaces asymptotiques. D'autre part, pour dé-

213

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_1} + \frac{dF}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_1} + \frac{dF}{dy_1} &= 0, \\ \frac{dF}{dx_1} \frac{dx_1}{dy_2} + \frac{dF}{dx_2} \frac{dx_2}{dy_2} + \frac{dF}{dy_2} &= 0. \end{aligned}$$

H plus haut
Haly

C'est là le problème que nous nous sommes proposé dans le § 2 ~~2^{me}~~
partie, chapitre IV

Ce problème peut être présenté sous une autre forme (en se plaçant au point de vue des *Vorlesungen über Dynamik*).

Si x_1 et x_2 sont deux fonctions de y_1 et de y_2 satisfaisant aux équations (3), l'expression:

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2$$

devra être une différentielle exacte. Si donc nous posons:

$$dS = x_1 dy_1 + x_2 dy_2,$$

S sera une fonction de y_1 et de y_2 qui sera définie par l'équation aux dérivées partielles:

$$(4) \quad F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right) = C.$$

S pourra se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et l'on aura:

$$(5) \quad S = S_0 + S_1 \sqrt{\mu} + S_2 \mu + S_3 \mu \sqrt{\mu} + \dots$$

$S_0, S_1, \dots, S_k, \dots$ seront des fonctions de y_1 et de y_2 et on aura:

$$\frac{dS_k}{dy_1} = x_1^k, \quad \frac{dS_k}{dy_2} = x_2^k.$$

Je rappelle maintenant quelles conditions nous avons imposées dans le paragraphe cité, aux fonctions x_1^k et x_2^k ; nous avons supposé d'abord que x_1^0 et x_2^0 devaient être des constantes. On a alors

$$S_0 = x_1^0 y_1 + x_2^0 y_2.$$

Si nous appelons ensuite n_1 et n_2 les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$, ces quantités n_1 et n_2 seront encore des constantes.

L'analyse qui va suivre s'applique au cas où le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est commensurable. Dans ce cas on peut toujours, comme nous l'avons vu, supposer $n_2 = 0$; c'est ce que nous ferons désormais, comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité.

Nous avons supposé en outre dans ce paragraphe que x_1^k et x_2^k sont des fonctions périodiques de y_1 qui ne changent pas de valeur quand on change y_1 et y_2 en $y_1 + 2\pi$ et y_2 .

Il résulte de là que $\frac{dS_k}{dy_1}$ et $\frac{dS_k}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques par rapport à y_1 et qu'on peut écrire:

$$(6) \quad S_k = \frac{\lambda_k}{n_1} y_1 + S'_k,$$

λ_k étant une constante et S'_k une fonction périodique de y_1 .

Supposons que dans le premier membre de l'équation (4)

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right)$$

on remplace S par son développement (5); on verra que F deviendra développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et qu'on aura, ainsi qu'on l'a vu dans le paragraphe cité:

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + H_3\mu\sqrt{\mu} + \dots,$$

les H étant des fonctions de y_1 , de y_2 , et des dérivées partielles de S_0, S_1, S_2 , etc.

On voit d'ailleurs que H_0 dépendra seulement de S_0, H_1 de S_0 et S_1, H_2 de S_0, S_1 et S_2, H_3 de S_0, S_1, S_2, S_3 etc.

On trouve d'ailleurs:

$$H_0 = F_0(x_1^0, x_2^0) = C,$$

$$H_1 = -n_1 \frac{dS_1}{dy_1},$$

$$H_2 = -n_1 \frac{dS_2}{dy_1} + \Delta S_1 + K_2,$$

$$H_3 = -n_1 \frac{dS_3}{dy_1} + 2\Delta S_2 + K_3,$$

$$H_p = -n_1 \frac{dS_p}{dy_1} + 2\Delta S_{p-1} + K_p,$$

où l'on a posé pour abréger:

$$\Delta S_p = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 F_0}{(dx_1^0)^2} x_1^1 x_1^p + \frac{d^2 F_0}{dx_1^0 dx_2^0} (x_1^1 x_2^p + x_2^1 x_1^p) + \frac{d^2 F_0}{(dx_2^0)^2} x_2^1 x_2^p \right]$$

et où K_p ne dépend que de $S_0, S_1, \dots$, jusqu'à S_{p-2} .

Cela posé, pour déterminer par récurrence les fonctions S_p , nous aurons les équations suivantes:

$$H_0 = C, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad \dots, \quad H_p = 0.$$

Si l'on supposait que les fonctions $S_0, S_1, \dots, S_{p-1}$ fussent entièrement connues, l'équation

$$H_p = 0$$

ou

$$(7) \quad n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p$$

déterminerait la fonction S_p à une fonction arbitraire près de y_2 .

Mais ce n'est pas tout à fait ainsi que la question se présente.

Supposons que l'on connaisse complètement

$$S_0, S_1, \dots, S_{p-2}$$

et que l'on connaisse S_{p-1} à une fonction arbitraire près de y_2 .

Par hypothèse les dérivées de $S_0, S_1, \dots, S_{p-2}, S_{p-1}$ sont des fonctions périodiques de y_1 ; donc K_p et ΔS_{p-1} seront des fonctions périodiques de y_1 .

Désignons par $[U]$ comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité, la valeur moyenne de U , si U est une fonction périodique de y_1 .

S_p doit être de la forme (6); nous en concluons que:

$$\left[\frac{dS_p}{dy_1} \right]$$

doit être une constante $\frac{\lambda_p}{n_1}$ indépendante de y_2 , de sorte que l'équation

(7) nous donne:

$$(8) \quad 2[\Delta S_{p-1}] + [K_p] = \lambda_p$$

et cette équation déterminera complètement S_{p-1} (si l'on suppose que l'on se donne, soit arbitrairement, soit suivant une loi quelconque, la constante λ_p).

Nous trouvons d'abord l'équation:

$$H_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dS_1}{dy_1} = 0$$

qui nous montre que S_1 est une fonction arbitraire de y_2 .

Nous en déduisons:

$$2\Delta S_p = -M \frac{dS_1}{dy_2} \frac{dS_p}{dy_1} - N \frac{dS_1}{dy_2} \frac{dS_p}{dy_2}$$

(nous posons pour abréger:

$$-M = \frac{d^2 F_0}{dx_1^2 dx_2^2}, \quad -N = \frac{d^2 F_0}{(dx_2^2)^2}$$

comme nous l'avons fait dans le paragraphe cité).

L'équation que nous trouvons ensuite en égalant à 0 la valeur moyenne de H_2 est la suivante:

$$[\Delta S_1] + [K_2] = \lambda_2.$$

Or

$$\Delta S_1 = -\frac{N}{2} \left(\frac{dS_1}{dy_2} \right)^2 = [\Delta S_1].$$

D'autre part:

$$K_2 = F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2).$$

λ_2 est une constante qui, ainsi qu'il est aisé de le voir, est précisément celle que nous avons appelée $-C_1$ dans le paragraphe cité.

Il vient donc:

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}.$$

S_1 est ainsi entièrement déterminé à une constante près; mais nous pouvons laisser cette constante de côté, elle ne joue en effet aucun rôle puisque les fonctions S n'entrent que par leurs dérivées.

L'équation (8) devient ensuite:

$$(9) \quad \left[N \frac{dS_1}{dy_2} \frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right] = -\lambda_p - M \left[\frac{dS_1}{dy_2} \frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] + [K_p].$$

217

518

Dans le second membre tout est connu; K_p ne dépend que de $S_0, S_1, \dots, S_{p-2}$; $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est connu puisque S_{p-1} est supposée déterminée à une fonction arbitraire près de y_2 .

D'autre part $\frac{dS_1}{dy_2}$ est indépendant de y_1 ; le premier membre peut donc s'écrire:

$$N \frac{dS_1}{dy_1} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right],$$

de sorte que l'équation (9) nous donnera $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ en fonction de y_2 . Nous connaissons donc $[S_{p-1}]$ à une constante près et cette constante qui ne joue aucun rôle peut être laissée de côté.

Nous connaissons d'une part S_{p-1} à une fonction arbitraire près de y_2 ; d'autre part nous connaissons $[S_{p-1}]$ en fonction de y_2 ; donc S_{p-1} est entièrement déterminée.

La constante C_1 joue un rôle prépondérant. Supposons d'abord qu'elle soit supérieure à la valeur que nous avons appelée $-\varphi_1$ dans les paragraphes cités et par conséquent que $[F_1] + C_1$ soit toujours positif et $\frac{dS_1}{dy_2}$ toujours réel et je pourrai ajouter toujours positif parce que je suis libre de prendre le signe + devant le radical.

Je dis que dans ce cas, on peut choisir arbitrairement les constantes λ et que $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques non seulement de y_1 , mais encore de y_2 . (S_p est alors de la forme

$$S_p = \lambda_p y_1 + \mu_p y_2 + S_p'',$$

λ_p et μ_p étant des constantes pendant que S_p'' est périodique de période 2π tant par rapport à y_1 que par rapport à y_2 .)

En effet, supposons que cela soit vrai pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \dots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1};$$

je dis que cela sera vrai encore pour $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$.

En effet, nous avons par hypothèse:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \sum A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha),$$

les A et les α étant des constantes, m_1 et m_2 étant des entiers.

On aura ensuite par définition

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] = \sum_{m_2=0}^{m_2=\infty} A_{0, m_2} \cos(m_2 y_2 + \alpha).$$

Mais on doit avoir

$$2[\Delta S_{p-2}] + [K_{p-1}] = \lambda_{p-1}$$

et par conséquent:

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1},$$

λ_{p-1} étant une constante; on en conclut que:

$$A_{0, m_2} = 0 \quad \text{pour} \quad m_2 \neq 0, \quad A_{0, 0} = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1}.$$

Il vient ainsi

$$S_{p-1} = \frac{\lambda_{p-1}}{n_1} y_1 + \sum A_{m_1 m_2} \frac{\sin(m_1 y_1 + m_2 y_2 + \alpha)}{m_1} + [S_{p-1}],$$

m_1 et m_2 prenant toujours sous le signe Σ toutes les valeurs entières telles que $m_1 \geq 0$.

Ainsi, pour que S_{p-1} soit de la forme voulue, il suffit que:

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$$

soit une fonction périodique de y_2 . Or $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ est définie par l'équation:

$$N \frac{dS_1}{dy_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right] = -\lambda_p - M \frac{dS_1}{dy_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] + [K_p],$$

K_p ne dépendant que de $S_1, S_2, \dots, S_{p-2}$ sera périodique en y_2 .

$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1}\right]$ est une constante $\frac{\lambda_{p-1}}{n_1}$; de plus $\frac{dS_1}{dy_2}$ est une fonction périodique de y_2 qui ne s'annule jamais.

Il en résulte que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ peut être développé suivant les sinus et les cosinus des multiples de y_2 .

On a ensuite:

$$n_1 \frac{dS_p}{dy_1} = 2(\Delta S_{p-1}) + K_p,$$

ce qui montre que $\frac{dS_p}{dy_1}$ est périodique en y_1 et y_2 .

Ainsi en choisissant pour C_1 une valeur supérieure à $-\varphi_1$ et en choisissant ensuite les autres constantes $\lambda_3, \lambda_4, \dots$ d'une façon arbitraire, on trouve pour $\frac{dS}{dy_1}$ et $\frac{dS}{dy_2}$ des séries ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de y_1 et de y_2 . Ces séries, quoique divergentes, peuvent rendre des services dans certains cas, ainsi que je l'ai dit au § 4 (2^{me} partie, chapitre II).

Passons maintenant au cas de

$$C_1 = -\varphi_1.$$

L'expression

$$[F_1] + C_1$$

n'est jamais négative, mais elle devient nulle pour une certaine valeur de y_2 que nous avons appelée η_3 dans le paragraphe cité. Je supposerai dans ce qui va suivre que cette valeur est nulle; j'ai le droit de le faire, l'origine des y_2 étant restée jusqu'ici arbitraire.

Ecrivons donc $[F_1] + C_1$ sous forme de série trigonométrique:

$$[F_1] + C_1 = \sum A_m \sin my_2 + \sum B_m \cos my_2.$$

Pour $y_2 = 0$, cette fonction s'annule ainsi que sa dérivée, puisque la fonction étant toujours positive, zéro est pour elle un minimum. Il en résulte que l'expression suivante:

$$\frac{[F_1] + C_1}{\sin^2 \frac{y_2}{2}}$$

H_H reg
 qui ainsi que nous
 l'avons vu au § 47
 est celle qui
 correspond aux séries
 qui représentent
 asymptotiquement
 les surfaces asymptotiques

est développable suivant les sinus et cosinus des multiples de y_2 ; c'est une fonction périodique de y_2 qui ne s'annule jamais et ne devient jamais infinie.

Il suit de là que l'on peut écrire:

$$\frac{\sin \frac{y_2}{2}}{\sqrt{|F_1|} + C_1} = \sum A_m \cos my_2 + \sum B_m \sin my_2$$

et par conséquent:

$$\frac{dS_1}{dy_2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{N}} \sin \frac{y_2}{2}}{\sum A_m \cos my_2 + \sum B_m \sin my_2}.$$

Nous pourrions écrire maintenant l'équation (9) sous la forme suivante:

$$(9') \quad \frac{\sqrt{2N} \sin \frac{y_2}{2}}{\sum A_m \cos my_2 + \sum B_m \sin my_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right] = -\lambda_p + \phi_p(y_2),$$

ϕ_p étant une fonction connue de y_2 .

Cela posé, je me propose de démontrer que:

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

sont des fonctions périodiques de y_1 et de y_2 , dont la période est 2π par rapport à y_1 et 4π par rapport à y_2 .

Supposons en effet que cela soit démontré pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \dots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}.$$

$\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est une fonction périodique de y_1 et de y_2 ; d'autre part sa valeur moyenne

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] = \frac{1}{n_1} \lambda_{p-1}$$

est une constante indépendante de y_2 . Nous pourrions donc écrire:

$$S_{p-1} = \frac{1}{n_1} \lambda_{p-1} y_1 + \theta_{p-1}(y_1, y_2) + \zeta_{p-1}(y_2),$$

221

$\theta_{p-1}(y_1, y_2)$ étant une fonction périodique de y_1 et y_2 et ζ_{p-1} une fonction arbitraire de y_2 seulement. Il vient ensuite:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2},$$

d'où

$$\frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2} + \frac{d\zeta_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2} = \frac{d\theta_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[\theta_{p-1}]}{dy_2},$$

ce qui montre que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \frac{d[S_{p-1}]}{dy_2}$ est une fonction périodique de y_1 et de y_2 .

L'équation (9') montre que cela est vrai également de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ et par conséquent de $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ (quelle que soit d'ailleurs la constante λ_p) et l'équation (7) montre que cela est vrai de $\frac{dS_p}{dy_1}$.

Cela sera donc vrai des fonctions:

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

quel que soit l'indice p .

Il importe toutefois de remarquer que si ces fonctions sont périodiques, ce n'est pas une raison suffisante pour qu'elles puissent être développées suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et de $\frac{y_2}{2}$. En effet ces fonctions ne sont pas toujours finies, sauf pour un choix particulier des constantes λ_p ; il est aisé de s'en rendre compte, car l'équation (9') d'où l'on doit tirer la valeur de

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$$

a en facteur dans son premier membre $\sin \frac{y_2}{2}$. Donc l'expression de $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2}\right]$ contiendra $\sin \frac{y_2}{2}$ au dénominateur.

Les dérivées des fonctions S_p pourront donc devenir infinies, mais seulement pour

$$\sin \frac{y_2}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad y_2 = 2k\pi.$$

Si y_2 a une valeur différente de $2k\pi$, ces dérivées ne deviennent infinies pour aucune valeur de y_1 ; elles peuvent donc se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 .

Nous pouvons donc écrire par exemple:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1} \lambda_{p-1} + \sum A_m \cos my_2 + \sum B_m \sin my_1,$$

A_m et B_m étant des fonctions périodiques de y_2 qui peuvent devenir infinies.

Imaginons maintenant que les constantes λ_p d'indice impair soient toutes nulles; je dis que

$$\frac{dS_p}{dy_1} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_2}$$

ne changeront pas quand on changera y_2 en $y_2 + 2\pi$ toutes les fois que l'indice p sera pair et qu'au contraire ces deux fonctions changeront de signe, sans changer de valeur absolue quand on changera y_2 en $y_2 + 2\pi$, toutes les fois que l'indice p sera impair.

Je suppose que le théorème soit vrai pour:

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \frac{dS_2}{dy_1}, \frac{dS_2}{dy_2}, \dots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

et je me propose de démontrer qu'il est vrai également pour

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \quad \text{et} \quad \frac{dS_p}{dy_1}.$$

Si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est multiplié par $(-1)^{p-1}$ quand y_2 se change en $y_2 + 2\pi$, il en sera de même de:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right].$$

223

Nous avons trouvé en effet

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_1} = \frac{1}{n_1} \lambda_{p-1} + \sum A_m \cos my_1 + \sum B_m \sin my_1,$$

A_m et B_m étant des fonctions périodiques de y_2 .

Si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ est multiplié par $(-1)^{p-1}$ quand y_2 augmente de 2π , il en sera de même de A_m et B_m et des dérivées de ces fonctions par rapport à y_2 . Il en sera donc encore de même de :

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right] = \sum \frac{dA_m \sin my_1}{dy_2 m} - \sum \frac{dB_m \cos my_1}{dy_2 m}.$$

Nous avons maintenant à montrer que cela est vrai de

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right].$$

Pour cela il est nécessaire d'étudier de quelle manière K_p dépend des fonctions $S_0, S_1, S_2, \dots, S_{p-1}$. Je me propose d'établir que l'ordre de tous les termes de K_p par rapport aux dérivées des fonctions d'indice impair

$$S_1, S_3, S_5, \dots$$

sera de même parité que p .

En effet, en faisant dans

$$F\left(\frac{dS}{dy_1}, \frac{dS}{dy_2}, y_1, y_2\right),$$

$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + \dots,$$

nous avons trouvé :

$$F = H_0 + H_1\sqrt{\mu} + H_2\mu + \dots$$

Si je change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$ et qu'en même temps je change S_1, S_3, S_5 , etc. en $-S_1, -S_3, -S_5$ etc. sans toucher aux fonctions d'indice pair, l'expression de F ne devra pas changer.

Donc H_p devra se changer en $(-1)^p H_p$.

Cela montre que l'ordre de tous les termes de H_p par rapport aux dérivées de S_1, S_3, S_5 , etc., devra être de même parité que p . Il devra

209, § 18

224

donc, comme je l'ai annoncé, en être de même des termes de K_p puisqu'on obtient K_p en supprimant dans H_p les termes qui dépendent de S_{p-1} ou de S_p .

Cela posé, changeons y_2 en $y_2 + 2\pi$; les dérivées de S_q ne changeront pas si q est pair et au plus égal à $p-2$; elles changeront de signe si q est impair et au plus égal à $p-2$. Donc K_p se changera en $(-1)^p K_p$.

Reprenons maintenant l'équation (9)

$$(9) \quad N \frac{dS_1}{dy_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] = -\lambda_p - M \frac{dS_1}{dy_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] + [K_p].$$

Quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$,

$$[K_p] \text{ se change en } (-1)^p [K_p],$$

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] \text{ se change en } (-1)^p \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right],$$

et

$$\frac{dS_1}{dy_2} \text{ se change en } -\frac{dS_1}{dy_2}.$$

Nous pouvons même dire que

$$\lambda_p \text{ se change en } (-1)^p \lambda_p.$$

En effet cela est vrai pour p pair parce que λ_p est une constante indépendante de y_2 ; cela est vrai encore pour p impair parce que nous avons supposé que les λ_p d'indice impair sont tous nuls.

Il résulte de là que

$$\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right] \text{ se change en } (-1)^{p-1} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right]$$

et par conséquent

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \text{ en } (-1)^{p-1} \frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

C. Q. F. D.

Je dis maintenant que $\frac{dS_p}{dy_1}$ se changera en $(-1)^p \frac{dS_p}{dy_1}$.

Ecrivons en effet l'équation (7)

$$(7) \quad n \frac{dS_p}{dy_1} = 2\Delta S_{p-1} + K_p;$$

K_p et ΔS_{p-1} et par conséquent le second membre de l'équation (7) seront multipliées par $(-1)^p$ quand y_2 augmentera de 2π . Il devra donc en être de même du premier membre et de $\frac{dS_p}{dy_1}$.

C. Q. F. D.

Je vais maintenant démontrer que l'on peut choisir les constantes λ_p de façon que les dérivées des fonctions S_p ne deviennent pas infinies pour $y_2 = 2k\pi$.

Supposons que l'on ait choisi les constantes $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{p-1}$ de façon que

$$\frac{dS_1}{dy_1}, \frac{dS_1}{dy_2}, \dots, \frac{dS_{p-2}}{dy_1}, \frac{dS_{p-2}}{dy_2}, \frac{dS_{p-1}}{dy_1}$$

restent finies et que les constantes λ_q d'indice impair soient nulles; je me propose de choisir λ_p de façon que $\frac{dS_{p-1}}{dy_2}$ et $\frac{dS_p}{dy_1}$ ne deviennent pas non plus infinies. Nous verrons en même temps que λ_p devra être nulle si p est impair.

Il est clair d'abord que si $\frac{dS_{p-1}}{dy_1}$ reste finie, il en sera de même de:

$$\frac{dS_{p-1}}{dy_2} - \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$$

et de

$$\Phi_p(y_2) = [K_p] - M \frac{dS_1}{dy_2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_1} \right].$$

Reprenons maintenant l'équation (9'). Le coefficient de la quantité inconnue $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ s'annule pour $y_2 = 2k\pi$; pour que cette quantité inconnue demeure finie, il faut que le second membre s'annule également et que l'on ait:

$$\Phi_p(2k\pi) = \lambda_p.$$

228

Comme ϕ_p ne change pas quand y_2 augmente de 4π , il suffira de prendre $k = 0$ et $k = 1$ et d'écrire

$$(10) \quad \phi_p(0) = \phi_p(2\pi) = \lambda_p.$$

Si p est pair, il n'y a pas de difficulté, on a:

$$\phi_p(y_2) = \phi_p(y_2 + 2\pi)$$

et par conséquent:

$$\phi_p(0) = \phi_p(2\pi),$$

de sorte qu'il suffit de prendre:

$$\lambda_p = \phi_p(0).$$

Si au contraire p est impair, on a:

$$\phi_p(y_2) = -\phi_p(y_2 + 2\pi)$$

et

$$\phi_p(0) = -\phi_p(2\pi),$$

de sorte que les équations (10) ne peuvent être satisfaites que si l'on a:

$$\phi_p(0) = \phi_p(2\pi) = \lambda_p = 0.$$

Nous avons donc à démontrer que pour p impair, $\phi_p(0)$ est nul.

Soit en effet:

$$\phi_p(0) = \alpha$$

et par conséquent

$$\phi_p(2\pi) = -\alpha.$$

Je dis que α est nul.

Nous allons nous appuyer sur un lemme qui est presque évident.

Voici l'énoncé de ce lemme:

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions périodiques et de période 2π par rapport à y_1 et à y_2 . On sait que si φ est une fonction périodique de y_1 , par exemple, la valeur moyenne de $\frac{d\varphi}{dy_1}$ est nulle. On aura donc

$$\iint \frac{d\varphi_1}{dy_1} dy_1 dy_2 = \iint \frac{d\varphi_2}{dy_1} dy_1 dy_2 = 0$$

297

ou

$$\iint \left(\frac{d\varphi_1}{dy_2} - \frac{d\varphi_2}{dy_1} \right) dy_1 dy_2 = 0,$$

les intégrales étant étendues à toutes les valeurs de y_1 et de y_2 depuis 0 jusqu'à 2π .

Il est nécessaire pour que le lemme soit vrai que les fonctions φ_1 et φ_2 soient continues, mais leurs dérivées peuvent être discontinues. Ces dérivées doivent seulement rester finies.

Cela posé, nous achèverons de déterminer la fonction S_{p-1} non plus par l'équation (9'), mais par l'équation suivante:

$$(11) \quad \frac{\sqrt{2N} \sin \frac{y_2}{2} \left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]}{\Sigma A_m \cos my_2 + \Sigma B_m \sin my_2} = -\alpha \cos \frac{y_2}{2} + \Phi_p(y_2).$$

Elle ne diffère de l'équation (9') que par ce que λ_p a été remplacé par $\alpha \cos \frac{y_2}{2}$.

Cette équation montre d'abord que $\left[\frac{dS_{p-1}}{dy_2} \right]$ est une fonction périodique de y_2 et de période 2π , (je rappelle que p est supposé impair). De plus cette fonction ne devient pas infinie pour $y_2 = 2k\pi$, parce que le second membre de l'équation (11) s'annule pour $y_2 = 0$ et pour $y_2 = 2\pi$.

Posons ensuite

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{dS_0}{dy_1} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_1} + \mu \frac{dS_2}{dy_1} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_1} + \mu^{\frac{p}{2}} \eta, \\ \zeta_2 &= \frac{dS_0}{dy_2} + \mu^{\frac{1}{2}} \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2}; \end{aligned}$$

η sera une fonction de y_1 , de y_2 et de μ définie par l'équation:

$$(12) \quad F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C.$$

Il est aisé de voir que ζ_2 est entièrement déterminé puisque nous connaissons maintenant complètement $S_0, S_1, \dots, S_{p-1}$. On pourra donc tirer η de l'équation (12) sous la forme suivante:

$$\eta = \eta_0 + \mu^{\frac{1}{2}} \eta_1 + \mu \eta_2 + \dots,$$

228

les γ_i étant des fonctions périodiques de y_1 et de y_2 , de période 2π par rapport à y_1 et 4π par rapport à y_2 .

De plus on aura:

$$\frac{d\zeta_1}{dy_2} - \frac{d\zeta_2}{dy_1} = \mu^2 \frac{d\eta}{dy_2}.$$

Nous n'avons besoin que de γ_0 ; or on voit tout de suite que γ_0 est donnée par l'équation suivante:

$$(13) \quad n_1 \gamma_0 = 2\Delta S_{p-1} + K_p.$$

qui ne diffère de l'équation (7) que par ce que l'inconnue y est désignée par γ_0 .

Cette équation montre que γ_0 est une fonction périodique de y_1 ; il faut chercher la valeur moyenne de cette fonction. Si l'on se reporte à la signification de l'équation (11), on verra qu'elle exprime que la partie moyenne du second membre de (13) est $\alpha \cos \frac{y_2}{2}$. On a donc:

$$[\gamma_0] = \frac{\alpha}{n_1} \cos \frac{y_2}{2}.$$

ζ_2 est susceptible de deux valeurs différentes qui se permutent l'une dans l'autre, soit quand on change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$, soit quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$.

J'appellerai φ_2 la plus grande des deux valeurs de ζ_2 et ϕ_2 la plus petite.

De même ζ_1 est susceptible de deux valeurs; j'appellerai φ_1 celle qui correspond à φ_2 et ϕ_1 celle qui correspond à ϕ_2 .

Enfin η est susceptible de deux valeurs; j'appellerai η' celle qui correspond à φ_2 et η'' celle qui correspond à ϕ_2 ; γ_1 est susceptible de deux valeurs que j'appellerai de même γ'_1 et γ''_1 .

La fonction φ_2 est périodique de période 2π par rapport à y_2 ; en effet, quand on augmente y_2 de 2π , les deux valeurs de ζ_2 se permutent entre elles; donc φ_2 qui est toujours égale à la plus grande de ces deux valeurs ne change pas.

Pour la même raison, φ_1 , ϕ_1 , ϕ_2 , η' , η'' , γ'_1 , γ''_1 seront des fonctions de période 2π par rapport à y_2 .

Des définitions précédentes, il résulte que φ_1 , φ_2 , ϕ_1 et ϕ_2 sont des

fonctions continues, quoique les dérivées de ces fonctions, de même que η' et η'' puissent être discontinues.

Nous sommes donc dans les conditions où notre lemme est applicable et nous pourrions écrire:

$$\mu^{\frac{p}{2}} \iint \frac{d\eta'}{dy_1} dy_1 dy_2 = \iint \left(\frac{d\varphi_1}{dy_2} - \frac{d\varphi_2}{dy_1} \right) dy_1 dy_2 = 0,$$

$$\mu^{\frac{p}{2}} \iint \frac{d\eta''}{dy_2} dy_1 dy_2 = \iint \left(\frac{d\psi_1}{dy_2} - \frac{d\psi_2}{dy_1} \right) dy_1 dy_2 = 0,$$

ou encore

$$\iint \frac{d(\eta' - \eta'')}{dy_1} dy_1 dy_2 = 0,$$

ou enfin:

$$\iint \frac{d(\eta'_0 - \eta''_0)}{dy_2} dy_1 dy_2 + \iint \left[\frac{d(\eta' - \eta'_0)}{dy_2} - \frac{d(\eta'' - \eta''_0)}{dy_2} \right] dy_1 dy_2 = 0.$$

Cette relation devra avoir lieu quel que soit μ .

Mais quand μ tend vers 0, $\eta' - \eta'_0$ et $\eta'' - \eta''_0$ tendent vers 0.

Donc on aura:

$$(14) \quad \lim \iint \frac{d(\eta'_0 - \eta''_0)}{dy_2} dy_1 dy_2 = 0 \quad (\text{pour } \mu = 0).$$

Transformons le premier membre de l'égalité (14). Je remarque d'abord que p étant impair, η_0 est une fonction qui doit se changer en $-\eta_0$ quand y_2 se change en $y_2 + 2\pi$. Il suffit pour s'en convaincre de se reporter à l'équation (13). Nous avons donc:

$$\eta'_0 = -\eta''_0 = \pm \eta_0$$

d'où

$$\iint \frac{d(\eta'_0 - \eta''_0)}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2 \iint \frac{d\eta'_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2 \iint \frac{d(\pm \eta_0)}{dy_2} dy_1 dy_2.$$

Il reste à voir pour quelles valeurs des y nous devons faire $\eta'_0 = +\eta_0$ et pour quelles valeurs des y nous devons faire $\eta'_0 = -\eta_0$.

Si nous avons:

$$(15) \quad \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} + \mu^2 \frac{dS_3}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-2}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2} > 0,$$

nous devons prendre d'après notre convention:

$$\varphi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu} \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} + \mu \sqrt{\mu} \frac{dS_3}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\phi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu} \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} - \mu \sqrt{\mu} \frac{dS_3}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Si au contraire le premier membre de l'inégalité (15) est négatif, nous devons prendre:

$$\varphi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} - \sqrt{\mu} \frac{dS_1}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2}$$

et

$$\phi_2 = \frac{dS_0}{dy_2} + \sqrt{\mu} \frac{dS_1}{dy_2} + \dots + \mu^{\frac{p-1}{2}} \frac{dS_{p-1}}{dy_2}.$$

Tout dépend donc du signe du premier membre de l'inégalité (15). Egalons ce premier membre à 0, nous obtiendrons une équation:

$$(16) \quad \frac{dS_1}{dy_2} + \mu \frac{dS_2}{dy_2} + \dots = 0.$$

Cette équation peut être regardée comme définissant y_2 en fonction de y_1 et de μ .

On pourra résoudre cette équation et écrire:

$$y_2 = \theta(y_1, \mu).$$

Observons seulement que θ est une fonction périodique de période 2π par rapport à y_1 et que cette fonction θ s'annule identiquement quand on y fait $\mu = 0$.

Par conséquent quand y_2 variera de θ à $\theta + 2\pi$, on aura:

$$\eta'_0 = +\eta_0$$

et quand y_2 variera de $\theta + 2\pi$ à $\theta + 4\pi$, on aura

$$\gamma'_0 = -\gamma_0.$$

Nos intégrales doivent être étendues à toutes les valeurs de y_2 comprises entre 0 et 2π . Mais comme γ'_0 est une fonction de période 2π , on aura:

$$\int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\gamma'_0}{dy_2} = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_\theta^{\theta+2\pi} dy_2 \frac{d\gamma'_0}{dy_2}$$

ou

$$\iint \frac{d\gamma'_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_\theta^{\theta+2\pi} dy_2 \frac{d\gamma'_0}{dy_2}.$$

Quand μ tendra vers 0, le premier membre devra tendre vers 0 et d'ailleurs θ tendra vers 0, on aura donc:

$$\lim \iint \frac{d\gamma'_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = \int_0^{2\pi} dy_1 \int_0^{2\pi} dy_2 \frac{d\gamma'_0}{dy_2} = 0$$

d'où

$$0 = \iint \frac{d\gamma_0}{dy_2} dy_1 dy_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \frac{d[\gamma_0]}{dy_2} dy_2 = -\pi \frac{\alpha}{n_1} \int_0^{2\pi} \sin \frac{y_2}{2} dy_2 = -\frac{4\pi\alpha}{n_1}.$$

On a donc

$$\alpha = 0.$$

C. Q. F. D.

Il résulte de là que si l'on annule les constantes λ_p d'indice impair et si l'on donne des valeurs convenables aux constantes λ_p d'indice pair, les fonctions $\frac{dS_p}{dy_1}$ et $\frac{dS_p}{dy_2}$ resteront finies.

On pourra donc les développer suivant les sinus et cosinus des multiples de y_1 et de $\frac{y_2}{2}$; les multiples pairs de $\frac{y_2}{2}$ entreron seuls dans le développement si p est pair; si au contraire p est impair, les multiples impairs de $\frac{y_2}{2}$ entreron seuls.

217 § 18

932

58

⊂ approximative
|n |n

Nous aurons alors pour les équations de la surface asymptotique

$$(17) \quad x_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_1}, \quad x_2 = \sum_{p=0}^{\infty} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{dS_p}{dy_2}.$$

^ Ces séries ainsi que nous l'avons vu sont divergentes mais si on arrête comme nous le faisons dans les équations (17) au n^o terme, l'erreur commise peut être très petite, aussi que si μ est très petit ainsi que je l'ai exposé plus haut.

~~Je n'ai pas à revenir sur la convergence de ces séries; en effet au § 5 (1^{ère} partie, chapitre III) on a démontré l'existence de ces surfaces asymptotiques et on a montré que leur équation peut se mettre sous la forme suivante:~~

$$(18) \quad x_1 = f_1(y_1, y_2, \mu), \quad x_2 = f_2(y_1, y_2, \mu),$$

~~f_1 et f_2 étant des séries développées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$. On a vu que ces séries convergent pour des valeurs quelconques de y_1 et de y_2 pourvu que μ soit assez petit.~~

~~De plus ces séries f_1 et f_2 doivent satisfaire aux conditions suivantes:~~

- ~~I. Les divers termes de ces séries sont finis.~~
- ~~II. Ces divers termes sont des fonctions périodiques de y_1 .~~
- ~~III. Si l'on pose:~~

$$f_1 = f'_1 + \sqrt{\mu} f''_1, \quad f_2 = f'_2 + \sqrt{\mu} f''_2$$

~~(f'_1, f'_2, f''_1, f''_2 ne contenant plus que des puissances paires de $\sqrt{\mu}$) les deux équations:~~

$$f''_1 = 0, \quad f''_2 = 0$$

~~seront équivalentes et les trois équations:~~

$$x_1 = f'_1, \quad x_2 = f'_2, \quad f''_2 = 0$$

~~définiront une solution périodique du 1^{er} genre, qui pour $\mu = 0$ devra se réduire à~~

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad y_2 = 0.$$

~~Or l'analyse qui précède démontre que les séries (17) sont les seules qui satisfassent aux équations différentielles et aux conditions I, II et III.~~

~~Les séries (17) doivent donc être identiques aux séries (18) et par conséquent convergent.~~

~~D'autre part la forme des équations (17) montre immédiatement que les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées puisque les seconds membres sont des fonctions périodiques.~~

818 715

Nous avons vu que la quantité appelée plus haut α est toujours nulle. On peut donner de ce fait essentiel une autre démonstration.

Posons:

$$T = S_1 + \mu S_2 + \mu^2 S_3 + \dots + \mu^{\frac{p-3}{2}} S_{p-2},$$

$$\xi = \eta_0 + \mu \eta_2 + \mu^2 \eta_4 + \dots$$

Je dis d'abord que T est une fonction périodique de y_1 et de y_2 .

En effet ses dérivées $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ sont des fonctions périodiques; on a donc:

$$T = \beta y_1 + \gamma y_2 + T',$$

β et γ étant des constantes et T' étant une fonction périodique de y_1 et y_2 .

On en conclut que

$$\frac{dT}{dy_1} = \beta + \frac{dT'}{dy_1}, \quad \frac{dT}{dy_2} = \gamma + \frac{dT'}{dy_2},$$

$\frac{dT'}{dy_1}$ et $\frac{dT'}{dy_2}$ étant des séries trigonométriques dont le terme tout connu est nul.

Mais les fonctions $S_1, S_2, \dots, S_{p-2}$ étant d'indice impair, leurs dérivées changent de signe quand on change y_2 en $y_2 + 2\pi$. Donc $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ changent de signe quand y_2 augmente de 2π . Donc les termes tout connus β et γ sont nuls. Donc $T = T'$ est une fonction périodique qui ne change pas quand y_1 augmente de 2π et qui change de signe quand y_2 augmente de 2π .

Cela posé, nous savons que ζ_1 et ζ_2 sont liés par l'équation:

$$F(\zeta_1, \zeta_2, y_1, y_2) = C.$$

Il en résulte que, si les deux valeurs de ζ_2 se confondent, les deux valeurs de ζ_1 se confondent également.

Ecrivons que les deux valeurs de ζ_2 se confondent, il vient:

$$(19) \quad \frac{dT}{dy_2} = 0.$$

234

Cette équation (19) est d'ailleurs identique à l'équation (16). Ecrivons maintenant que les deux valeurs de ζ_1 se confondent, il viendra:

$$(20) \quad \frac{dT}{dy_1} + \mu^{\frac{p-1}{2}} \xi = 0.$$

Les équations (19) et (20) devront être équivalentes. De plus elles devront être équivalentes à la suivante:

$$y_2 = \theta(y_1, \mu),$$

θ ayant le même sens que plus haut. Supposons qu'on développe θ suivant les puissances croissantes de μ , il viendra:

$$(21) \quad y_2 = \mu\theta_1 + \mu^2\theta_2 + \mu^3\theta_3 + \dots,$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ étant des fonctions périodiques de y_1 .

Supposons y_2 lié à y_1 par l'équation (21); quand y_1 augmentera de 2π , y_2 ne changera pas et T qui est périodique ne changera pas non plus; on aura donc:

$$\int_{y_1=0}^{y_1=2\pi} dT = \int_0^{2\pi} \left(\frac{dT}{dy_1} dy_1 + \frac{dT}{dy_2} dy_2 \right) = 0,$$

ou en remplaçant $\frac{dT}{dy_1}$ et $\frac{dT}{dy_2}$ par leurs valeurs tirées des équations (19) et (20)

$$- \mu^{\frac{p-1}{2}} \int_0^{2\pi} \xi dy_1 = 0.$$

Si dans

$$\xi = \eta_0 + \mu\eta_1 + \mu^2\eta_2 + \dots$$

on remplace y_2 par sa valeur (21) il viendra:

$$\xi = \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \dots,$$

ξ_0, ξ_1, ξ_2 , etc. étant des fonctions périodiques de y_1 .

On devra avoir quel que soit μ :

$$\int_0^{2\pi} dy_1 (\xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \dots) = 0$$

235

et par conséquent:

$$\int_0^{2\pi} \xi_0 dy_1 = 2\pi[\xi_0] = 0.$$

Il est clair que pour obtenir ξ_0 , il suffit de faire $y_2 = 0$ dans η_0 , or on a

$$[\eta_0] = \frac{\alpha}{n_1} \cos \frac{y_2}{2}.$$

Il vient donc

$$\frac{2\pi\alpha}{n_1} = 0$$

ou

$$\alpha = 0.$$

C. Q. F. D.

Note G.

Sur la non-existence des intégrales uniformes.

Je crois devoir revenir avec plus de détails sur la démonstration par laquelle j'établis que les équations que je traite n'admettent aucune intégrale analytique et uniforme, en dehors de l'intégrale des forces vives.

Ces équations sont:

$$(i) \quad \frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}$$

avec l'intégrale

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = C,$$

F étant une fonction uniforme et analytique de x_1, x_2, y_1 et y_2 , périodique de période 2π en y_1 et y_2 .

Je dis qu'il ne peut pas exister une seconde intégrale

$$\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C_1,$$

φ étant une fonction analytique et uniforme et de plus périodique de période 2π en y_1 et y_2 .

Je ne veux pas me contenter de démontrer que cette fonction φ ne peut pas être uniforme pour toutes les valeurs réelles des x et des y .

D'un autre côté, il est clair que l'on peut toujours trouver un domaine assez petit pour qu'une intégrale φ du système (1) reste uniforme à l'intérieur de ce domaine.

Voici donc d'une façon plus précise ce que je me propose d'établir.

Je dis qu'une intégrale φ ne peut pas rester analytique, uniforme et périodique dans l'intérieur d'un domaine, si ce domaine est assez grand pour que le point mobile dont les coordonnées x_1, x_2, y_1, y_2 varient conformément aux équations (1) ne puisse jamais en sortir.

Cela posé, soit

$$x_1 = \theta_1(y_1, y_2), \quad x_2 = \theta_2(y_1, y_2)$$

l'équation d'une surface asymptotique quelconque. Nous savons que θ_1 et θ_2 sont des fonctions périodiques de période 2π en ce qui concerne y_1 et 4π en ce qui concerne y_2 .

Considérons maintenant les trois équations:

$$(2) \quad \varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = C_1, \quad x_1 = \theta_1(y_1, y_2), \quad x_2 = \theta_2(y_1, y_2).$$

Si ces trois équations sont distinctes et compatibles, elles définissent une trajectoire, et cette trajectoire est une courbe fermée. En effet nous pouvons partager la surface asymptotique en deux régions, celle où la fonction uniforme φ est plus grande que C_1 , et celle où elle est plus petite que C_1 . Ces deux régions seront séparées par la courbe définie par les équations (2) et cette courbe partageant la surface en deux régions sera une courbe fermée.

Comme la constante C_1 est arbitraire, il résulterait de là qu'on pourrait tracer sur la surface asymptotique une infinité de trajectoires fermées et nous savons qu'il n'en est pas ainsi.

Nous devons donc conclure que les équations (2) ne peuvent être distinctes et compatibles, ou en d'autres termes que la fonction φ doit avoir même valeur en tous les points de la surface asymptotique.

En d'autres termes, si les équations

$$F = C, \quad \varphi = C_1$$

5/9.

Note 17.

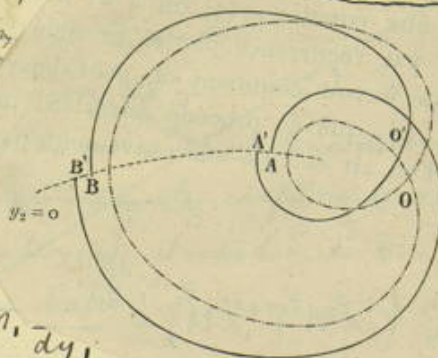
Si après cette simpli^c
des deux équations

(5)

ce qui montre

Egalons main.
première des eq.

$$(6) \quad -n_1 dy_1$$

Fig. 9. montrer lui redan

ients de $\sqrt{p}$ dans les deux membres

les deux membres des de^{le} de^{le}
de des équations (5):

$$\frac{\lambda F_1}{dy_2} = 0$$

Note 18

§ 17. Troisième approximation.

Nous nous proposons maintenant de construire exactement nos surfaces asymptotiques ou plutôt l'intersection de ces x avec la surface $y_1 = 0$ qui est comme nous l'avons vu plus haut une surface sans contact.

~~(voir figure ci-dessous) (voir la page 141)~~

Dans notre mode de représentation géométrique, la solution périodique que nous envisageons est représentée par une certaine courbe fermée trajectoire fermée. Cette courbe fermée vient couper la surface $y_1 = 0$ en un point que j'ai représenté sur la figure en O' .

Par cette courbe fermée passent deux surfaces asymptotiques; ces deux surfaces coupent la surface $y_1 = 0$ suivant deux courbes que j'ai représentées sur la figure en trait plein en $AO'B'$ et $A'O'B$.

J'ai représenté en trait pointillé ----- la courbe $y_1 = y_2 = 0$.

Reprenons les notations du § 16; considérons les séries s_1 et s_2 définies dans les équations (4) de ce ^{paragraphe} § 16; soient comme dans ce § 16 s_1^p et s_2^p la somme des p premiers termes des séries s_1 et s_2 . Nous avons vu que les équations:

$$x_1 = s_1^p(y_1, y_2), \quad x_2 = s_2^p(y_1, y_2)$$

représentent des surfaces qui diffèrent très peu des surfaces asymptotiques. Ces surfaces couperont la surface $y_1 = 0$ suivant des courbes qui ont pour équation:

$$y_1 = 0, \quad x_1 = s_1^p(0, y_2), \quad x_2 = s_2^p(0, y_2)$$

et qui sont représentées sur la figure en trait mixte - - - - -

Nous avons appris dans le ^{paragraphe} § 16 précédent à former les séries s_1 et s_2 ; nous avons vu que $s_1^p(y_1, y_2)$ et $s_2^p(y_1, y_2)$ sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport

à y_1 , et de période 4π par rapport à y_2 .

Il en résulte que la courbe en trait mixte doit être comme l'indique la figure une courbe fermée admettant un point double 0.

La première question à traiter est la suivante : les courbes en trait plein, intersections des surfaces asymptotiques avec $y_1 = 0$, sont-elles aussi des courbes fermées ? Il est clair qu'il en serait ainsi si les droites s_1 et s_2 étaient convergentes. Car les courbes en trait pointillé différeraient alors aussi peu qu'on voudrait des courbes en trait plein, donc la distance d'un point de la courbe pleine à la courbe pointillée tendrait vers 0 quand p croîtrait indéfiniment.

Je vais montrer par un exemple simple qu'il n'en est pas ainsi. Soit :

$$-F = p + q^2 - 2\mu \sin^2 \frac{y}{2} - \mu \varepsilon \cos x \varphi(y),$$

où $\varphi(y)$ représente une fonction périodique de y de période 2π , et où μ et ε sont deux constantes que je suppose très petites. Je forme les équations :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dF}{dp} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{dF}{dq} = 2q,$$

$$(1) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{dF}{dx} = -\mu \varepsilon \sin x \varphi(y), \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dF}{dy} = 2\mu \sin y + \mu \varepsilon \cos x \varphi'(y).$$

On voit que p et q joueront le même rôle que j'attribuais jusqu'ici à x , et à x_2 , pendant que x et y joueront le rôle que j'attribuais à y_1 et à y_2 , je n'ai changé les notations que pour supprimer les indices.

Supposons d'abord $\varepsilon = 0$. Nos équations admettent alors une solution périodique qui s'écrit :

$$x = t, \quad p = 0, \quad q = 0, \quad y = 0.$$

Les exposants caractéristiques (en laissant de côté les deux qui sont nuls, ainsi qu'il arrive toujours avec les équations de la Dynamique) sont égaux à $\pm \sqrt{2\mu}$.

Il existe alors deux ~~systèmes~~ ^{surfaces} de solutions ~~asymptotiques~~ qui ont pour équations :

$$p = \frac{dS_0}{dx}, \quad q = \frac{dS_0}{dy} \quad S_0 = \pm \sqrt{2\mu} x \cos \frac{y}{2} + 2\sqrt{2\mu} \cos \frac{y}{2}$$

d'où

$$p = 0 \quad q = \pm \sqrt{2\mu} \sin \frac{y}{2} \pm \sqrt{2\mu} \sin \frac{y}{2}$$

Les exposants caractéristiques n'étant pas nuls, mais égaux à $\pm \sqrt{2\mu}$ quand on fait $\varepsilon = 0$, il existe encore une solution périodique pour les petites valeurs de ε ; cette solution périodique correspondra deux surfaces asymptotiques dont l'équation pourra se mettre sous la forme

$$p = \frac{dS}{dx}, \quad q = \frac{dS}{dy}$$

S étant une fonction de x et de y satis faisant à l'équation

$$\frac{dS}{dx} + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2 = 2\mu \sin^2 \frac{y}{2} + \mu \varepsilon \cos x \varphi(y).$$

Les exposants caractéristiques ne s'annulant pas pour $\varepsilon = 0$, il résulte de ce que nous avons dit à la fin du § 13 (~~1ère Partie, Chapitre III~~) que p et q et par conséquent S doivent être développables suivant les puissances croissantes de ε . Posons donc:

$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \dots$$

Nous avons trouvé plus haut:

$$S_0 = -\sqrt{\mu} \cos y = -2\sqrt{\mu} \cos \frac{y}{2}$$

Quant à S_1 , S_1 devra satisfaire à l'équation:

$$\frac{dS_1}{dx} + 8\sqrt{\mu} \sin \frac{y}{2} \frac{dS_1}{dy} = \mu \cos x \varphi(y).$$

Si l'on pose Σ par Σ une fonction qui satisfasse à l'équation:

$$\frac{d\Sigma}{dx} + 8\sqrt{\mu} \sin \frac{y}{2} \frac{d\Sigma}{dy} = \mu e^{ix} \varphi(y) \quad (i = \sqrt{-1})$$

S_1 sera la partie réelle de Σ . Or on peut satisfaire à cette équation en faisant:

$$\Sigma = e^{ix} \psi(y)$$

il suffit pour cela que:

$$i\psi + 8\sqrt{\mu} \sin \frac{y}{2} \frac{d\psi}{dy} = \mu \varphi(y).$$

L'équation en ψ ainsi obtenue et qu'il s'agit d'intégrer est linéaire. Son intégrale générale s'écrit: si $\varphi(y) = 0$

$$\psi = \left(\tan \frac{y}{4}\right)^d \quad d = -i\sqrt{\frac{2}{\mu}}$$

et si $\varphi(y)$ est quelconque:

$$\psi = \left(\tan \frac{y}{4}\right)^d \int \sqrt{\frac{\mu}{2}} \varphi(y) \left(\sin \frac{y}{2}\right)^{-1} \left(\tan \frac{y}{4}\right)^{-d} dy$$

Comme ψ doit se pouvoir développer suivant les puissances entières de y pour les petites valeurs de y , il faudra intégrer et prendre l'intégrale entre les limites 0 et y .

Que faudrait-il maintenant pour que les courbes $BO'B'$ et $AO'A'$ fussent fermées? Il faudrait que la fonction S restât finie ~~uniforme ainsi que x , dirigée~~ pour toutes les valeurs de y et fût périodique de période 4π par rapport à y (c'est ce qui arriverait, rappelons-le pour les fonctions S_1^p et S_2^p dont nous nous sommes parlé un peu plus haut.) Comme cela devrait avoir lieu pour toutes les valeurs de ε , cela devrait avoir lieu de S_1 , et comme S_1 est égal à $\cos x$ multiplié par la partie réelle de ψ , plus $\sin x$ multiplié par la partie imaginaire de ψ , cela devrait avoir lieu de ψ .

Donc pour les valeurs de y voisines de 2π , ψ devrait être développable suivant les

239

56

819.

puissances ~~croissantes~~ entières de $y - 2\pi$. Mais il n'en est pas ainsi de $(\tan \frac{y}{4})^d$
 Donc l'intégrale:

$$J = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \varphi(y) \left(\sin \frac{y}{2}\right)^{-1} \left(\tan \frac{y}{4}\right)^{-d} dy$$

devrait être nulle. Calculons cette intégrale en supposant $\varphi(y) = \sin y$. Posons $\tan \frac{y}{4} = t$, il viendra:

$$J = 4\sqrt{2\mu} \int_0^\infty \frac{t^{-d}(1-t^2) dt}{(1+t^2)^2}$$

Intégrons par parties en remarquant que $\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ est la dérivée de $\frac{t}{1+t^2}$, il viendra:

$$J = 4\sqrt{2\mu} \int_0^\infty \frac{t^{-d} dt}{1+t^2}$$

Faisons $t^2 = u$, on aura:

$$J = 2\sqrt{2\mu} \int_0^\infty \frac{u^{-\frac{d+1}{2}} du}{1+u} = \frac{2\pi\sqrt{2\mu}}{\cos \frac{d\pi}{2}} = \frac{-8\pi i}{e^{\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}} + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{2\mu}}}}$$

Donc J n'est pas nul; donc les courbes $BO'B'$ et $AO'A'$ ne sont pas fermées; donc les séries s_1 et s_2 ne sont pas convergentes, non plus que les séries définies dans les ~~§ 14~~ (1^{re} Partie, Chapitre III) et ~~§ 18~~ (2^e Partie, Chapitre I) ainsi que je l'avais annoncé dans ces paragraphes.

La distance des deux points B et B' n'est donc pas nulle, mais elle jouit de la propriété suivante. Non seulement BB' tend vers 0, quand μ tend vers 0, mais le rapport $\frac{BB'}{\mu^{\frac{p}{2}}}$ tend également vers 0 quelque grand que soit p .

En effet la courbe pointillée a pour équation,

$$y_1 = 0 \quad x_1 = s_1^p(0, y_2), \quad x_2 = s_2^p(0, y_2)$$

et la courbe en trait plein a pour équation:

$$y_1 = 0 \quad x_1 = f_1(0, y_2), \quad x_2 = f_2(0, y_2)$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, les séries s_1 et s_2 représentent asymptotiquement les fonctions f_1 et f_2 , ce qui veut dire que l'on a:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{f_1 - s_1^p}{\mu^{\frac{p}{2}}} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{f_2 - s_2^p}{\mu^{\frac{p}{2}}} = 0 \quad (\text{pour } \mu = 0)$$

Donc le rapport à $\mu^{\frac{p}{2}}$ de la distance de B à la courbe pointillée tendra vers 0 et il en sera de même du rapport à $\mu^{\frac{p}{2}}$ de la distance de B' à cette courbe pointillée.

On a donc:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{BB'}{\mu^{\frac{p}{2}}} = 0$$

C. Z. F. D.

En d'autres termes, si on regarde μ comme un infiniment petit du premier ordre, la distance BB' , sans être nulle, est un infiniment petit d'ordre infini. C'est ainsi que la fonction $e^{-\frac{1}{\mu}}$ est un infiniment petit d'ordre infini sans être nulle.

Dans l'exemple particulier que nous avons traité plus haut, il est aisé de voir que la distance BB' est du même ordre de grandeur que l'intégrale J , c'est-à-dire que $e^{-\frac{1}{\sqrt{2}\mu}}$. 225. §19.

Une seconde question à traiter est celle de savoir si les deux courbes $O'B$ et $O'B'$ prolongées se coupent. S'il en est ainsi en effet, la trajectoire qui passera par le point d'intersection appartiendra à la fois aux deux nappes de la surface asymptotique. Ce sera une trajectoire doublement asymptotique. La trajectoire ^{qui passe} ^{fermée} par le point O' et qui représente la solution périodique. La trajectoire doublement asymptotique d'abord se différencie très peu de C , lorsque t est négatif et très grand, elle s'en éloigne asymptotiquement, s'en écarte beaucoup d'abord, puis s'en rapproche de nouveau asymptotiquement, de façon à différer très peu de C , lorsque t est positif et très grand.

Je me propose d'établir qu'il existe une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.

Je commence par observer que la courbe $O'B^*$ quelque loin qu'on la prolonge, ne pourra jamais se recouper elle-même, c'est-à-dire que cette courbe $O'B^*$ prolongée n'a pas de point double. En effet si $O'B^*$ soit $O'B$ d'après la définition de ^{cette} courbe $O'B$, les antécédents des divers points de $O'B$ sont eux-mêmes sur cette courbe $O'B$; de sorte que l'antécédente de la courbe $O'B$ est une portion de cette courbe. Et de même la seconde, la troisième etc., la n^{e} antécédente de $O'B$ sont des portions de plus en plus petites de cette courbe, ^{limitées par} ~~comprises entre~~ le point O' et des d'une part et ~~par~~ ^{un point} de plus en plus rapproché de O' d'autre part.

Si la courbe $O'B$ avait un point double, il en devrait être de même de toutes ses antécédentes, et par conséquent de toute ^{arc} ~~portion~~ de $O'B$ si si petit qu'il soit, faisant partie de $O'B$. Or les principes du §13 (^{1^{ère} Partie Chapitre III}) nous permettent de construire la portion de $O'B$ voisine de O' et de constater que cette portion de courbe n'a pas de point double. Il en est donc de même de la courbe entière quelque loin qu'on la prolonge.

D'après la définition ^{de deux nappes de la} surface asymptotique ^(et des courbes $BO'A$, $B'O'A$) ~~une des nappes de cette surface~~ ^{ce, courbes} (par exemple la ^{courbe} ~~nappe~~ $BO'A$) est telle que le n^{e} antécédent d'un point de cette ^{courbe} ~~nappe~~ se rapproche indéfiniment de O' , quand n augmente; pour blanchir

courbe $B'O'A$, c'est le n^{e} conséquent qui se rapproche indéfiniment de O' .
Ce que nous venons de dire s'applique donc également à la courbe $O'B'$, pourvu qu'on remplace partout le mot antécédent par le mot conséquent. Donc la courbe $O'B'$ quelque loin qu'on la prolonge ne se recoupera pas elle-même et il est clair qu'il en sera de même des courbes $O'A$ et $O'A'$.

Je dis maintenant que la courbure des courbes $O'B$ et $O'B'$ est finie, j'en veux dire qu'elle ne croît pas indéfiniment quand μ tend vers 0.

En effet si μ est regardé comme un infiniment petit μ nous avons vu que nous venons de dire que les séries s_1 et s_2 représentent asymptotiquement les deux fonctions f_1 et f_2 , mais que les séries $\frac{d^2 s_1}{dy_1^2}$ et $\frac{d^2 s_2}{dy_2^2}$ représentent asymptotiquement $\frac{d^2 f_1}{dy_1^2}$ et $\frac{d^2 f_2}{dy_2^2}$.

On en conclut que si μ est regardé comme un infiniment petit, la courbure de la courbe en trait plein au point B différera infiniment peu de la courbure de la courbe pointillée au point le plus rapproché; or cette dernière courbure est finie, donc il en est de même de la courbure de la courbe en trait plein.

Soit (B_1) ^{maintenant} le conséquent du point B et B' , celui du point B' . La distance BB_1 est du même ordre de grandeur que $\sqrt{\mu}$ et il en est de même de la distance $B'B'_1$; les arcs BB_1 et $B'B'_1$ sont donc très petits si μ est très petit et leur courbure est finie; d'autre part les distances BB'_1 , $B_1B'_1$ de même que les rapports $\frac{BB'_1}{BB_1}$, $\frac{BB'_1}{B'_1B'_1}$ tendent vers 0 quand μ tend vers 0; enfin il existe un invariant intégral positif.

du § 8.

Nous nous trouvons donc dans les conditions du Théorème III (~~1^{re} partie~~ chapitre II, § 4). Nous en concluons que les arcs BB_1 et $B'B'_1$ se coupent, c'est à dire que les deux courbes $O'B$ et $O'B'$ se prolongent et coupent la courbe $O'B$ prolongée et par conséquent qu'il existe au moins une trajectoire doublement asymptotique.

Je dis maintenant qu'il en existe au moins deux.

En effet ^{la figure a été construite de façon que} les points B et B' sont par définition ^{soient} sur la courbe

$$y_1 = y_2 = 0$$

Mais l'origine des y_2 est restée arbitraire; je puis supposer qu'on la choisisse de telle sorte qu'au point d'intersection des deux courbes $O'B$ et $O'B'$, on ait $y_2 = 0$. En ce cas les points B et B' coïncident. Il doit donc en être de même de leurs conséquents

B , et B' . Les deux arcs BB_1 et $B'B'_1$ ont alors mêmes extrémités, mais cela ne suffit pas pour satisfaire au Théorème III que je veux d'appliquer (il faut en effet pour satisfaire à ce théorème que l'aire limitée par ces deux arcs ne soit pas convexe) il faut encore qu'ils se coupent en un autre point N .

Par ce point passera une trajectoire doublement asymptotique qui ne se confondra pas avec celle qui passe en B . Il y a donc au moins deux trajectoires doublement asymptotiques.

Je vais maintenant établir qu'il y en a une infinité.

Je suppose toujours que les points B et B' se confondent. Soit BMN la portion de la courbe $O'B$ comprise entre les points B et N ; c'est de même BPN la portion de la courbe $O'B'$ comprise entre le point $B = B'$ et le point N . Ces deux arcs BMN et BPN limitent une certaine aire que j'appelle α .

Nous avons vu que dans le cas particulier du problème des trois corps qui nous occupe on peut appliquer le théorème 1^{er} ^{de 58} (~~1^{ère} Partie, Chapitre II, § 4~~). Il existe donc des trajectoires qui traverseront une infinité de fois l'aire α .

Donc parmi les conséquentes de l'aire α , il y en aura une infinité qui auront une partie commune avec α .

Si donc on considère la courbe fermée $BMNPB$ qui limite l'aire α , et les conséquentes de cette courbe, il y en aura une infinité de ces conséquentes qui couperont la courbe $BMNPB$ elle-même.

Comment cela peut-il se faire?

L'arc BMN ne peut couper aucun de ses conséquentes; car l'arc BMN et ses conséquentes appartiennent à la courbe $O'B$ et la courbe $O'B$ ne peut se recouper elle-même.

Pour la même raison l'arc BPN ne peut couper aucun de ses conséquentes.

Il faut donc, ou bien que l'arc BMN coupe un des conséquentes de BPN , ou que l'arc BPN coupe un des conséquentes de BMN (dans les hypothèses où nous nous sommes placés, c'est le second cas qui se présentera). Dans l'un comme dans l'autre cas la courbe $O'B$ ou son prolongement coupera la courbe $O'B'$ ou son prolongement.

Ces deux courbes se coupent donc en une infinité de points et une infinité de ces points d'intersection se trouveront sur l'arc BMN ou BPN . Par ces points d'intersection passeront une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.

On démontrerait de la même manière que la surface asymptotique qui coupe la surface $y_1 = 0$ suivant la courbe $O'A$ contient une infinité de trajectoires doublement asymptotiques.

243

520.

Malheureusement en choisissant C_1 comme nous venons de le faire, les séries auxquelles nous parvenons ne sont pas convergentes (c'est ce qui fait que j'insiste peu sur ce 1^{er} cas). Quoique divergentes elles peuvent cependant rendre des services au même titre que les séries de M. LINDSTEDT et dans des cas où les méthodes habituelles sont en défaut.

Observons que dans les intégrations successives qui donnent par récurrence les x_i^k , il ne s'introduit pas de *petits diviseurs*. Si donc nos séries divergent, ce n'est pas pour la même raison que les séries ordinaires de la mécanique céleste. C'est au contraire parce que les différentiations peuvent introduire de *grands multiplicateurs*. Cette circonstance peut plutôt être regardée comme facilitant l'emploi de ces séries; les termes qui doivent détruire la convergence se présenteront en effet moins vite que s'ils étaient dus à de petits diviseurs.

Supposons maintenant qu'on ait donné à C_1 une valeur $< -\varphi_4$. Alors

$$x_2^1 = \sqrt{\frac{2}{N}(|F_v| + C_1)}$$

n'est pas toujours réel. Supposons par exemple que, pour la valeur choisie de C_1 , x_2^1 reste réel quand y_2 varie depuis η_5 jusqu'à η_6 . Je vais considérer une valeur η_7 de y_2 comprise entre η_5 et η_6 :

$$\eta_5 < \eta_7 < \eta_6$$

et je vais chercher à définir les x_i^k pour toutes les valeurs de y_2 comprises entre η_5 et η_7 .

J'observe d'abord que x_2^1 est susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire, à cause du double signe du radical; donnons d'abord par exemple à ce radical le signe +.

Imaginons que l'on ait calculé successivement

$$x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^{k-2},$$

$$x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^{k-2}.$$

L'équation (11) du § 2 nous permet alors de calculer sans difficulté x_1^{k-1} et l'équation (12) du même paragraphe nous donne:

$$\frac{d(x_2^1 [x_2^{k-1}])}{dy_2}.$$

Chapitre III.
Résultats divers.
§ Solutions périodiques du 2^e genre.

Dans le chapitre précédent et en particulier dans les §§ 7 et 8 nous avons construit nos séries en supposant que l'on donne à C_1 une valeur tantôt supérieure tantôt égale à $-\varphi_4$.

H 4
H 4
V H 4
13

244

520.

Nous pouvons donc écrire:

$$x_2^1 [x_2^{k-1}] = \theta(y_2) + C_{k-1},$$

$\theta(y_2)$ étant une fonction entièrement connue de y_2 et C_{k-1} une constante d'intégration.

Nous déterminerons cette constante par la condition

$$\theta(\eta_5) + C_{k-1} = 0.$$

Alors bien que x_2^1 s'annule pour $y_2 = \eta_5$, la fonction

$$[x_2^{k-1}] = \frac{\theta(y_2) - \theta(\eta_5)}{x_2^1}$$

reste finie pour $y_2 = \eta_5$.

Nous avons donc complètement déterminé les fonctions x_i^k pour $\eta_5 < y_2 < \eta_7$ et nous appellerons $x_{5,i}^k$ les fonctions de y_2 ainsi déterminées.

Supposons que l'on recommence le calcul en donnant au radical le signe —. On trouvera pour les fonctions x_i^k de nouvelles valeurs que j'appelle $x_{1,i}^k$ et qui seront d'ailleurs la continuation analytique des premières.

Imaginons ensuite que l'on remplace C_1 par une constante nouvelle C_1' très voisine de C_1 .

Alors le radical:

$$\sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

sera réel toutes les fois que y_2 sera compris entre η_7 et une certaine valeur η_8 très voisine de η_6 .

Cela posé, nous allons par le procédé exposé ci-dessus calculer les fonctions x_i^k pour les valeurs de y_2 comprises entre η_7 et η_8 , d'abord en faisant:

$$x_2^1 = + \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

(nous appellerons $x_{2,i}^k$ les fonctions ainsi calculées), puis en faisant

$$x_2^1 = - \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1')}$$

(nous appellerons $x_{3,i}^k$ les fonctions ainsi calculées).

Nous allons ensuite construire les quatre branches de courbes;

$$1^{\circ}. \quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{0.1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{0.2}(y_2)$$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_5$ à $y_2 = \eta_7$.

$$2^{\circ}. \quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{1.1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{1.2}(y_2)$$

que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_5$ jusqu'à $y_2 = \eta_7$.

$$3^{\circ}. \quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{2.1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{2.2}(y_2)$$

que nous prolongerons depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

$$4^{\circ}. \quad y_1 = 0, \quad x_1 = \varphi_{3.1}(y_2), \quad x_2 = \varphi_{3.2}(y_2)$$

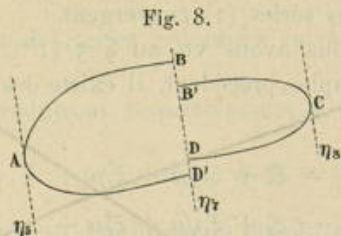
que nous prolongerons également depuis $y_2 = \eta_7$ jusqu'à $y_2 = \eta_8$.

Dans ces formules nous avons posé:

$$\varphi_{p,q}(y_2) = x_{p,q}^0 + x_{p,q}^1 \sqrt{\mu} + \dots + x_{p,q}^k \mu^{\frac{k}{2}}.$$

La première et la seconde de ces courbes se raccorderont et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_5$.

La troisième et la quatrième courbes se raccorderont également et seront tangentes en un même point à la courbe $y_2 = \eta_8$.



C'est ce qu'indique la figure 8 où les trois arcs pointillés représentent les trois courbes

$$y_2 = \eta_5, \eta_7, \eta_8,$$

où l'arc AB représente la 1^{ère} de nos quatre branches de courbe, l'arc AD' la seconde, l'arc $B'C$ la 3^{ème} et l'arc DC la quatrième.

246

Nous regarderons C_1 comme une donnée, mais C'_1 est resté jusqu'ici arbitraire. Nous déterminerons C'_1 par la condition que la 1^{ère} et la 3^{me} courbes se raccordent et que les points B et B' se confondent, ce qui s'exprime analytiquement par les conditions:

$$(3) \quad \varphi_{0,1}(\eta_1) = \varphi_{2,1}(\eta_1), \quad \varphi_{0,2}(\eta_1) = \varphi_{2,2}(\eta_1).$$

Ces deux équations ne sont d'ailleurs pas distinctes et se ramènent à une seule.

En nous appuyant ~~encore sur la deuxième extension du~~ théorème III ~~(1^{ère} partie, chapitre II, § 4)~~ nous pourrions démontrer que si C'_1 est déterminé par les équations (3), les équations

$$(3') \quad \varphi_{1,1}(\eta_1) = \varphi_{3,1}(\eta_1), \quad \varphi_{1,2}(\eta_1) = \varphi_{3,2}(\eta_1)$$

seront aussi satisfaites aux quantités près de l'ordre de $\mu^{\frac{k+1}{2}}$; c'est à dire que la 2^{de} et la 4^{me} courbes se raccorderont aux quantités près de cet ordre, ou que la distance DD' est un infiniment petit de même ordre que $\mu^{\frac{k+1}{2}}$.

Mais je dois faire ici la même observation que plus haut; les séries (1) auxquelles on parvient de la sorte ne sont pas convergentes bien qu'elles puissent rendre des services si on les manie avec précaution.

~~Aussi n'insisterai-je pas davantage sur tous ces points et ai-je hâte d'arriver aux cas où les séries (1) convergent.~~

D'après ce que nous avons vu au § 5 (1^{ère} partie, chapitre III) et rappelé dans le paragraphe précédent, il existe des surfaces asymptotiques ayant pour équations:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 &= \xi_1^0 + \xi_1^1 \sqrt{\mu} + \xi_1^2 \mu + \dots, \\ x_2 &= \xi_2^0 + \xi_2^1 \sqrt{\mu} + \xi_2^2 \mu + \dots \end{aligned}$$

Nous conserverons à ces équations le même numéro (4) que dans le paragraphe précédent.

Voyons d'abord quelles conséquences nous pouvons immédiatement déduire des principes posés dans les paragraphes cités.

- 1°. Les fonctions ξ_i^k sont périodiques par rapport à y_1 .
- 2°. Elles sont finies et réelles.

Il existe donc des régions, où, au moins pendant un certain temps, y_2 (dans le cas où l'on suppose $n_2 = 0$) ou $n_2 y_1 - n_1 y_2$ (dans le cas général) conservent des valeurs finies. C'est ce fait que les astronomes expriment d'ordinaire en disant qu'il y a libration. On peut se demander si ces régions de libration sont sillonnées de solutions périodiques.

De même en envisageant d'autres surfaces asymptotiques la région R'_1 et la région R'_3 se trouveront de nouveau subdivisées en trois régions partielles.

Occupons-nous maintenant des régions de libration et en particulier de R_2 et voyons si cette région peut comme R_3 être subdivisée en trois régions partielles. Il suffit pour cela de démontrer que dans la région R_2 on peut faire passer une infinité de courbes fermées représentant des solutions périodiques.

On peut y arriver par les considérations suivantes.

Ecrivons les équations:

$$x_1 = x_1^0 + \mu x_1^2,$$

$$x_2 = x_2^0 + \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{2}{N}(|F_1| + C_1)} + \mu u_2^2.$$

Ces équations sont à des quantités près de l'ordre μ celles de surfaces que nous avons construites (voir figure 8); elles satisfont donc approximativement aux équations (3) du § 2. Quant à u_2^2 c'est une fonction de y_1 et de y_2 qui ne diffère de x_2^2 que par une fonction de y_2 de telle sorte que

$$\frac{du_2^2}{dy_1} = \frac{dx_2^2}{dy_1}.$$

Cette fonction u_2^2 doit d'ailleurs rester toujours finie.

Je me propose de modifier la forme de la fonction F qui entre dans nos équations différentielles de façon que ces équations (4) satisfassent *exactement* aux équations (3) du § 17.

Je cherche donc une fonction F^* telle que les équations:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF^*}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF^*}{dy_2},$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF^*}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF^*}{dx_2},$$

admettent des surfaces trajectoires représentées précisément par ces équations (4).

Voici comment nous déterminerons cette fonction F^* .

248

§20.

Observons d'abord que x_1^0 et x_2^0 sont déterminés par les deux équations simultanées

$$F_0(x_1^0, x_2^0) = C, \quad \frac{dF_0}{dx_2^0} = 0.$$

On peut tirer de ces deux équations x_1^0 et x_2^0 en fonctions de C . Nous regarderons donc désormais x_1^0 et x_2^0 comme des fonctions connues de C .

D'autre part $[F_1]$ est une fonction de y_2 , de x_1^0 et de x_2^0 , ce qui nous permet de le regarder comme une fonction connue de y_2 et de C .

Les équations (4) nous donneront par conséquent x_1 et x_2 en fonctions de y_1 , de y_2 , de C et de C_1 .

Remarquons que si x_1 et x_2 sont définis par ces équations

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2 = dS$$

est une différentielle exacte, de sorte que:

$$\frac{dx_1^2}{dy_2} = \frac{du_2^2}{dy_1}.$$

Réolvons maintenant les équations (4) par rapport à C et C_1 , il viendra

$$C = F^*(x_1, x_2, y_1, y_2),$$

$$C_1 = \phi^*(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

La fonction F^* est ainsi définie et on aura en employant la notation de JACOBI:

$$[F^*, \phi^*] = 0,$$

233 §20. ce qui signifie que

$$\phi^* = \text{const.}$$

est une intégrale des équations (2).

La solution la plus générale de ces équations (2) s'écrit alors:

$$(a) \quad \frac{dS}{dy_1} = x_1, \quad \frac{dS}{dy_2} = x_2, \quad \frac{dS}{dC} = C + t, \quad \frac{dS}{dC_1} = C_1,$$

C et C_1 étant deux nouvelles constantes d'intégration.

249

Cherchons à former effectivement F^* ou du moins à nous rendre compte de l'ordre de grandeur de la différence:

$$F - F^*.$$

Or x_1^2 est défini par la condition suivante:

$$F(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1) = C$$

doit être une quantité de même ordre que $\mu\sqrt{\mu}$. (Cf. l'équation (11) du § 2).

Donc comme $\frac{dF}{dx_2^2}$ est nul, la fonction

$$F(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu u_2^2) = C$$

sera encore de même ordre que $\mu\sqrt{\mu}$, quelle que soit la fonction u_2^2 .

D'ailleurs on a identiquement:

$$F^*(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1 + \mu u_2^2) = C.$$

Donc la différence

$$F - F^*$$

regardée comme fonction de μ , de C , de C_1 , de y_1 et de y_2 est de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$.

Posons maintenant:

$$\xi_2\sqrt{\mu} = x_2 - x_2^0.$$

Des deux équations (1) on tirera facilement C_1 et C en fonctions de x_1 , ξ_2 , y_1 , y_2 et μ ; on voit alors sans peine que C et C_1 peuvent être développés suivant les puissances positives de $\sqrt{\mu}$, les coefficients étant des fonctions finies de x_1 , de ξ_2 , de y_1 et de y_2 .

Nous venons de voir que $F - F^*$ est une fonction de μ , de y_1 , de y_2 , de C et de C_1 dont le développement suivant les puissances de μ commence par un terme en $\mu\sqrt{\mu}$; si nous y remplaçons C et C_1 par leurs valeurs en fonctions de μ , de x_1 , de ξ_2 , de y_1 et de y_2 , nous verrons que cette différence $F - F^*$ est une fonction développée suivant les puissances de μ , dont les coefficients dépendent de x_1 , ξ_2 , y_1 et y_2 et qui commence par un terme en $\mu\sqrt{\mu}$.

Par conséquent la fonction:

$$\frac{F - F^*}{\mu\sqrt{\mu}} = F'(\mu, x_1, \xi_2, y_1, y_2)$$

ne devient pas infinie pour $\mu = 0$.

Par le changement de variable que nous venons de faire les équations (F) deviennent:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \check{F} \\ F' \end{array} \right) \quad \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF^*}{dy_1}, & \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF^*}{dx_1}, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{dF^*}{\sqrt{\mu}dy_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF^*}{\sqrt{\mu}d\xi_2}. \end{aligned}$$

De même les équations proposées:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

doivent se réduire à:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} 6 \\ F \end{array} \right) \quad \frac{dx_i}{dt} &= \frac{dF}{dy_i}, & \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{dF}{dx_i}, \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{dF}{\sqrt{\mu}dy_2}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{\sqrt{\mu}d\xi_2}. \end{aligned}$$

Nous formerons en outre les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} 7 \\ H \end{array} \right) \quad \frac{dx_i}{dt} &= \frac{d}{dy_i} (F^* + \varepsilon F'), & \frac{dy_i}{dt} &= -\frac{d}{dx_i} (F^* + \varepsilon F'), \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= \frac{d}{\sqrt{\mu}dy_2} (F^* + \varepsilon F'), & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{d}{\sqrt{\mu}d\xi_2} (F^* + \varepsilon F'), \end{aligned}$$

qui se réduisent à (F') pour $\varepsilon = 0$ et à (F) pour $\varepsilon = \mu\sqrt{\mu}$.

D'après ce que nous avons vu plus haut, les équations (F) et par conséquent les équations (F') peuvent s'intégrer exactement; nous en avons donné par les équations (α) la solution générale.

Si l'on discute cette solution générale et si on cherche à la construire en conservant le même mode de représentation géométrique que

dans les paragraphes précédents, on verra qu'il existe une infinité de surfaces trajectoires fermées.

Ces surfaces qui ont pour équation:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)} + \mu u_2^2}{x_1^0 + \mu u_1^2}$$

diffèrent peu des surfaces que nous avons construites dans le § 3 et dont l'équation s'écrivait:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0 + \sqrt{\mu} \sqrt{\frac{2}{N}([F_1] + C_1)}}{x_1^0}$$

Elles ont même forme générale que les surfaces définies par l'équation

(§). Si donc nous faisons les mêmes hypothèses que dans le § 3 au sujet des maxima et des minima de $[F_1]$, deux de nos surfaces (§) seront des surfaces fermées à courbe double; ce seront celles qui correspondent aux valeurs $-\varphi_2$ et $-\varphi_4$ de la constante C_1 . Les autres se composent de une ou deux nappes fermées.

La surface fermée à courbe double sera pour nos équations (§') une surface asymptotique et elle partagera l'espace en trois régions comme nous l'avons dit plus haut.

Parmi ces régions, je distingue la région R_2 comprise entre les deux nappes qui est une région dite de libration et je me propose de montrer que dans cette région, on peut tracer une infinité de trajectoires fermées correspondant à des solutions périodiques.

Revenons en effet aux équations (α) qui nous font connaître la solution générale des équations (§) et (§'). D'après la forme des équations (§), nous pouvons écrire:

$$S = ay_1 + by_2 + \theta(y_1, y_2) + \sqrt{\frac{2\mu}{N}} \int \sqrt{([F_1] + C_1)} dy_2,$$

a et b étant des fonctions de C et de C_1 seulement et $\theta(y_1, y_2)$ une fonction réelle et périodique de y_1 et de y_2 .

On en déduit:

$$C_1 = \frac{dS}{dC_1} = \frac{da}{dC_1} y_1 + \frac{db}{dC_1} y_2 + \frac{d\theta}{dC_1} + \sqrt{\frac{\mu}{2N}} \int \frac{dy_2}{\sqrt{([F_1] + C_1)}}.$$

Nous donnerons à C_1 une valeur déterminée qui devra être plus petite que $-\varphi_1$ puisque nous nous supposons placés dans la région R_2 .

La surface fermée qui correspond à cette valeur de C_1 présentant les mêmes connexions que le tore, nous pouvons en faire le tour de deux manières différentes: 1° en regardant y_2 comme constant; 2° en regardant y_1 comme constant.

Quand on aura fait le tour de la surface en regardant y_2 comme constant, y_1 aura augmenté de 2π et $\frac{dS}{dC_1}$ aura augmenté de

$$2\pi \frac{da}{dC_1}.$$

Quand on aura fait le tour de la surface en regardant y_1 comme constant, y_2 sera revenu à la même valeur, mais l'intégrale

$$\int \frac{dy_2}{\sqrt{([F_1] + C_1)}}$$

aura augmenté d'une certaine période v définie comme il suit:

Supposons que les valeurs de y_2 pour lesquelles le radical $\sqrt{([F_1] + C_1)}$ est réel soient les valeurs comprises entre η_5 et η_6 , on aura:

$$v = 2 \int_{\eta_5}^{\eta_6} \frac{dy_2}{\sqrt{([F_1] + C_1)}}.$$

Quand notre intégrale augmentera de v , $\frac{dS}{dC_1}$ augmentera de

$$v \sqrt{\frac{\mu}{2N}}.$$

Pour que la solution qui correspond à cette valeur de C_1 soit périodique, il faut donc et il suffit que ces deux quantités:

$$2\pi \frac{da}{dC_1} \quad \text{et} \quad v \sqrt{\frac{\mu}{2N}}$$

soient commensurables entre elles.

Cette condition sera évidemment satisfaite pour une infinité de va-

leurs de C_1 ; notre région R_2 contient donc une infinité de trajectoires fermées, représentant des solutions périodiques.

Ainsi si K est un nombre commensurable quelconque, l'équation:

$$(f) \quad 2\pi \frac{da}{dC_1} = Kv \sqrt{\frac{\mu}{2N}}$$

(qui contient C_1 parce que $\frac{da}{dC_1}$ et v sont des fonctions de C_1) nous donnera une valeur de C_1 correspondant à une solution périodique.

Pour discuter cette équation, il me faut chercher ce que c'est que $\frac{da}{dC_1}$.

Il me suffit pour cela de rappeler que:

$$a = x_1^0 + \mu[x_1^2]$$

et que:

$$F_0(x_1^0 + \mu x_1^2, x_2^0 + \sqrt{\mu} x_2^1) + \mu F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2)$$

doit se réduire à C aux quantités près de l'ordre de $\mu\sqrt{\mu}$. On en conclut:

$$-n_1 x_1^2 - \frac{N}{2} (x_2^1)^2 + F_1(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2) = 0$$

d'où

$$-n_1[x_1^2] - C_1 - [F_1] + [F_1] = 0$$

et:

$$\frac{da}{dC_1} = -\frac{\mu}{n_1}.$$

$\frac{da}{dC_1}$ est donc une constante, indépendante de C_1 , de sorte que l'équation (f) peut s'écrire

$$(f') \quad \frac{v}{\sqrt{\mu}} = \text{const.}$$

Pour discuter cette équation nouvelle, il convient de chercher comment varie v quand on fait varier C_1 depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_1$.

Pour $C_1 = -\varphi_4$, v est infini; C_1 variant depuis $-\varphi_4$ jusqu'à $-\varphi_2$, v décroît d'abord jusqu'à un certain minimum, pour croître ensuite de nouveau jusqu'à l'infini.

254

Pour $C_1 < -\varphi_2$, v peut admettre deux valeurs correspondant aux deux nappes de la surface et que l'on peut envisager séparément. (Cf. figure 7.)

La première nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_3$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-\varphi_2$ jusqu'à $-\varphi_3$.

La seconde nappe de la surface reste réelle quand C_1 est compris entre $-\varphi_2$ et $-\varphi_1$; la valeur correspondante de v décroît depuis l'infini jusqu'à un certain minimum quand C_1 décroît depuis $-\varphi_2$ jusqu'à $-\varphi_1$.

Ainsi v admet trois minima au moins et reste toujours supérieur à une certaine limite positive.

Si donc nous regardons l'équation (7') comme définissant C_1 en fonction de μ , C_1 sera fonction continue de μ , mais nous pourrions prendre μ assez petit pour que cette équation n'admette aucune racine.

Ainsi il est certain qu'il existe toujours une infinité de solutions périodiques; mais quand on fera décroître μ , toutes ces solutions disparaîtront l'une après l'autre.

Il résulte de ce qui précède que les équations (4) admettent pour $\varepsilon = 0$ une infinité de solutions périodiques; les principes du chapitre III (1^{ère} partie) nous permettent d'affirmer qu'il y en a encore une infinité pour les valeurs suffisamment petites de ε . Comme μ est très petit, nous ~~concluons~~ concluons qu'il existera une infinité de solutions périodiques pour $\varepsilon = \mu\sqrt{\mu}$, c'est à dire pour les équations (3) qui sont déduites par un changement de variable très simple des équations proposées.

H il semble
très probable.

Par conséquent, si nous revenons à ces équations proposées, nous voyons que dans la région de libration R_2 il y a une infinité de trajectoires fermées représentant des solutions périodiques.

Mais si faisant décroître μ d'une manière continue, on suit une de ces trajectoires fermées, on la verra se déformer aussi d'une façon continue et disparaître ensuite pour une certaine valeur de μ . Ainsi pour $\mu = 0$ toutes les solutions périodiques de la région R_2 auront disparu l'une après l'autre. Ce n'est pas ainsi que se comportaient les solutions périodiques étudiées dans le chapitre III (1^{ère} partie) et qui subsistaient encore pour $\mu = 0$.

On peut démontrer que dans le voisinage d'une trajectoire fermée représentant une solution périodique, soit stable, soit instable, il passe

Nous allons
d'ailleurs
l'étudier rigoureusement
par une voie toute
différente

une infinité d'autres trajectoires fermées. Cela ne suffit pas, en toute rigueur, pour conclure que toute région de l'espace, si petite qu'elle soit, est traversée par une infinité de trajectoires fermées,¹ mais cela suffit pour donner à cette hypothèse un haut caractère de vraisemblance.

~~Je regrette également de ne pouvoir montrer ici, comment le théorème IV du chapitre II (1^{re} partie) peut être utilisé pour l'étude de la distribution des trajectoires fermées dans l'espace.~~

CHAPITRE II.

Résumé général des résultats.

§ 1. Résultats positifs.

Nos résultats s'appliquent aux équations de la dynamique toutes les fois qu'il n'y a que deux degrés de liberté; ils s'appliquent donc spécialement à un cas particulier du problème des trois corps qui est celui

- 1° où la masse de la planète troublée étant nulle, le mouvement de la planète troublante reste Képlerien.
- 2° où l'excentricité de la planète troublante est nulle, celle de la planète troublée pouvant être quelconque.
- 3° où l'inclinaison des orbites est nulle.

Lorsqu'il n'y a que deux degrés de liberté, la situation du système peut être représentée par la position d'un point dans l'espace, ce qui permet d'énoncer les résultats obtenus sous une forme géométrique.

Toute solution peut être représentée par une courbe gauche appelée trajectoire; les trajectoires fermées correspondent aux solutions périodiques. Il y a toujours une infinité de trajectoires fermées, mais ces trajectoires fermées peuvent être réparties en deux classes:

¹ Les travaux récents de M. CANTOR nous ont appris en effet (pour employer le langage de ce savant géomètre) qu'un ensemble peut être parfait, sans être continu.

1°. Les trajectoires stables. Si la position initiale du point représentatif est très voisine d'une trajectoire stable, ce point restera éternellement très près de cette trajectoire.

2°. Les trajectoires instables qui ne jouissent pas de la même propriété.

Il y a une infinité de trajectoires fermées stables et une infinité de trajectoires fermées instables.

Dans le voisinage d'une trajectoire fermée instable, il y a une infinité de trajectoires dites asymptotiques qui jouissent de la propriété suivante:

Le point représentatif qui parcourt une trajectoire asymptotique est pour $t = -\infty$ infiniment rapproché de la trajectoire fermée correspondante; il s'en éloigne asymptotiquement, finit par en être très éloigné, puis s'en rapproche asymptotiquement de manière à en être de nouveau infiniment près pour $t = +\infty$.

On voit sans peine qu'il doit exister des trajectoires qui s'éloignent asymptotiquement d'une trajectoire fermée instable et d'autres qui s'en rapprochent asymptotiquement, mais le résultat difficile à établir et véritablement inattendu, c'est que ce sont *les mêmes* trajectoires asymptotiques, qui après s'être éloignées asymptotiquement d'une trajectoire fermée se rapprochent ensuite asymptotiquement de *la même* trajectoire fermée.

L'ensemble des trajectoires asymptotiques relatives à une même solution périodique instable, forme une surface dite asymptotique.

Les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées à courbe double présentant les mêmes connexions que la surface qu'engendrerait la révolution d'un limaçon à point double ou d'une lemniscate autour d'un axe ne rencontrant pas la courbe.

Chacune de ces surfaces partage donc l'espace en trois régions.

Dans chacune de ces trois régions, il y a encore une infinité de trajectoires fermées instables, et par conséquent une infinité de surfaces asymptotiques. Il en résulte que chacune de ces trois régions peut à son tour être subdivisée en trois autres et ainsi de suite.

Cette subdivision peut être continuée à l'infini et on peut la pousser assez loin pour que le volume de chaque région partielle soit aussi petit qu'on le veut.

§20.

Note 19

Ainsi que je vais de le dire, l'aperçu qui précède ne suffirait pas pour établir rigoureusement l'existence des solutions périodiques du 2^e genre. Voici comment nous y parviendrons.

Reprenons ^{différentielles} nos équations, nous éliminons d'abord le temps qui n'y entre que par sa différentielle dt ,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}$$

nous éliminons d'abord le temps qui n'y entre que par sa différentielle dt , que nous tirons ensuite x_2 en fonction de x_1, y_1 et y_2 de l'équation $F=C$.

Nos équations d-

et envisageons une solution périodique ^{du 1^{er} genre} de période T ; quand t augmentera de T , y_1 et y_2 augmenteront de $n_1 T$ et de $n_2 T$; je supposerai comme plus haut:

$$n_1 T = 2\pi \quad n_2 = 0.$$

Cela posé, ~~soit nous pouvons~~ de l'équation

$$F=C$$

nous pouvons tirer x_2 en fonction de x_1, y_1 et y_2 ; en substituant x_2 par la valeur ainsi obtenue, on trouve:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}$$

on éliminant dt ~~les~~ Les seconds membres pouvant être regardés comme des fonctions connues de x_1, y_1 et y_2 . Enfin en éliminant dt il viendra:

$$(H) \quad \frac{dx_1}{dy_1} = X, \quad \frac{dy_2}{dy_1} = Y$$

X et Y étant des fonctions connues de x_1, y_1 et y_2 , périodiques de période 2π par rapport à y_1 .

Soit:

$$x_1 = \varphi_1(y_1), \quad y_2 = \varphi_2(y_1)$$

la solution périodique considérée qui sera de période 2π par rapport à y_1 ; je suppose que cette solution périodique soit celle que nous avons définie plus haut au §2 (Chapitre II) ^{et} ~~qui était représentée~~ ^{représentée} sur la figure du §2 (Chapitre II) par la courbe fermée isolée de la surface $C_1 = -\varphi_2$. Ce sera donc une solution périodique stable, elle admettra deux exposants caractéristiques d et $-d$ réaux et de signe contraire et dont le carré sera réel négatif.

§20.

racines K^2 de l'unité. Donc nos deux intégrales se reproduisent quand y , augmenté de $2K\pi$. Comme l'équation linéaire, l'intégrale générale est une combinaison linéaire de ces deux intégrales remarquables, et elle ne change pas non plus quand y , augmenté de $2K\pi$.

Comme ψ_1 et ψ_2 sont précisément les accroissements que subissent ξ_1 et ξ_2 quand y , passe de la valeur 0 à la valeur $2K\pi$; ψ_1 et ψ_2 doivent être nuls; mais cela n'est vrai que quand ξ_1 et ξ_2 (ou β_1 et β_2) sont assez petits pour qu'on puisse en négliger les carrés; ce seront ^{donc} seulement les termes de ψ_1 et ψ_2 qui sont du 1^{er} degré en β_1 et β_2 qui seront nuls.

C. L. F. D.

On Soient:

$a\beta_1 + b\beta_2$ les termes du premier degré de ψ_1

$c\beta_1 + e\beta_2$ les termes du premier degré de ψ_2 .

Nous venons de voir que pour $\lambda = 0$

$$a = b = c = e = 0.$$

Soit encore pour $\lambda = 0$:

$$\frac{da}{d\lambda} = a', \quad \frac{db}{d\lambda} = b', \quad \frac{dc}{d\lambda} = c', \quad \frac{de}{d\lambda} = e'.$$

Je dis que

$$a' + e' = 0. \quad a' + e' = 0.$$

En effet l'équation en S

$$(a-S)(e-S) - bc = 0$$

admet pour racines: (cf. ~~Chapitre III, 1^{re} Partie~~)

$$S = 1 - e^{2K\pi}, \quad S = 1 - e^{-2K\pi}$$

pour $\lambda = 0$, ces deux racines sont nulles; si λ est assez petit pour qu'on puisse en négliger le carré, elles seront égales à:

$$\pm 2K\pi \frac{d\lambda}{d\lambda}$$

L'équation en S :

$$(a'-S)(e'-S) - b'c' = 0$$

aura donc pour racines

$$S = \pm 2K\pi \frac{d\lambda}{d\lambda}$$

et comme ces deux racines sont égales, et de signe contraire on aura:

$$a' + e' = 0$$

De plus, a' , e' , b' et c' ne seront pas nuls à la fois en général. En effet cela ne pourrait avoir lieu que si $\frac{d\lambda}{d\lambda} = \frac{d\mu}{d\mu}$ était nul. Or μ est une quantité choisie de

63 259

telle sorte que α (qui est une fonction de μ) soit commensurable avec 2π . Or $\frac{d\alpha}{d\mu}$ ne pourrait s'annuler ~~toutes~~ le pour toutes les valeurs commensurables de $\frac{\alpha}{2\pi}$ qu'en s'annulant identiquement; alors α serait une constante (qui devrait d'ailleurs être nulle ~~?~~ puisque $\alpha=0$ pour $\mu=0$) ce qui n'a pas lieu en général.

Nous avons vu que pour $\lambda=0$ les termes du 1^{er} degré de ψ_1 et de ψ_2 s'annulent identiquement. Supposons qu'il en soit de même des termes du 2^d degré, du 3^e degré, etc., du $m-1$ ^e degré, mais que les termes du m ^e degré ne s'annulent pas identiquement dans ψ_1 et dans ψ_2 pour $\lambda=0$. Soit θ_1 l'ensemble des termes du m ^e degré de ψ_1 pour $\lambda=0$; soit θ_2 l'ensemble des termes du m ^e degré de ψ_2 pour $\lambda=0$. Ainsi θ_1 et θ_2 sont deux polynômes homogènes du m ^e degré en β_1 et β_2 et de ces deux polynômes l'un au moins ne s'annule pas identiquement.

Posons:

$$\psi_1 = a'\lambda\beta_1 + b'\lambda\beta_2 + \theta_1 + \omega_1,$$

$$\psi_2 = c'\lambda\beta_1 - a'\lambda\beta_2 + \theta_2 + \omega_2.$$

Alors ω_1 et ω_2 seront des termes du second un ensemble de termes qui seront ou bien du $(m+1)$ ^e degré au moins par rapport aux β , ou bien du second degré au moins par rapport aux β et du 1^{er} degré au moins par rapport à λ , ou bien du 1^{er} degré au moins par rapport aux β et du 2^d degré au moins par rapport à λ .

Je me propose de démontrer que l'on peut tirer des équations (b) β_1 et β_2 ^{en série} ordonnées suivant les puissances $\beta_1 = \beta_2 = 0$ de $\lambda^{\frac{1}{m-1}}$ et dont tous les termes ne sont pas nuls.

Mais il faut d'abord que je démontre que l'on a identiquement

$$\frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2} = 0.$$

En effet il existe un invariant intégral positif. Nous en concluons qu'il existe une intégrale

$$\iint \Phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

qui a la même valeur pour une aire quelconque appartenant à la portion de surface sans contact $y_1=0$ et pour toutes ses consécutives.

De plus la fonction Φ est positive. Donc $\Phi(0,0)$ n'est pas nul; en multipliant la fonction Φ par un facteur convenable, nous pourrions donc toujours supposer:

$$\Phi(0,0) = 1.$$

Mais le point:

$$\xi_1 = \beta_1 + \psi_1, \quad \xi_2 = \beta_2 + \psi_2, \quad y_1 = 2K\pi$$

est le K^{e} conséquent du point:

$$\xi_1 = \beta_1, \quad \xi_2 = \beta_2, \quad y_1 = 0.$$

On aura donc pour une aire quelconque:

$$\iint \Phi(\psi_1, \psi_2) (d\beta_1 + d\psi_1) (d\beta_2 + d\psi_2) = \iint \Phi(\beta_1, \beta_2) d\beta_1 d\beta_2.$$

d'où l'identité:

$$(x) \quad \Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2) \left[\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1} \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} + \frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2} \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1} \right] = \Phi(\beta_1, \beta_2)$$

Nous supposons $\lambda = 0$, nous aurons donc:

$$\psi_1 = \theta_1 + \omega_1, \quad \psi_2 = \theta_2 + \omega_2.$$

Les θ ne contiennent ^{alors} que des termes du m^{e} degré et les ω que des termes du $(m+1)^{\text{e}}$ degré ou de degré supérieur.

Si alors on tire l'identité de là que la différence:

$$\Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2) - \Phi(\beta_1, \beta_2)$$

ne contient que des termes du m^{e} degré au moins par rapport aux β_1 et β_2 .

Si l'on convient de négliger les termes du m^{e} degré et de degré supérieur, on pourra écrire:

$$\Phi(\beta_1 + \psi_1, \beta_2 + \psi_2) = \Phi(\beta_1, \beta_2)$$

On aura, en négligeant toujours les termes du m^{e} degré:

$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1} = \frac{d\theta_1}{d\beta_1} + 1 + \frac{d\omega_1}{d\beta_1}, \quad \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} = 1 + \frac{d\theta_2}{d\beta_2}$$

$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2} = \frac{d\theta_1}{d\beta_2}, \quad \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1} = \frac{d\theta_2}{d\beta_1}$$

et

$$\frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_1} \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_2} - \frac{d(\beta_1 + \psi_1)}{d\beta_2} \frac{d(\beta_2 + \psi_2)}{d\beta_1} = 1 + \frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2}$$

de sorte qu'en ^{identifiant} dans l'identité (x) tous les termes de degré inférieur à m , on arrive à la relation:

$$\Phi(\beta_1, \beta_2) \left(\frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2} \right) = 0.$$

Dans cette relation, nous ne devons conserver que les termes de degré $m-1$ au plus, de sorte qu'il reste:

$$\frac{d\theta_1}{d\beta_1} + \frac{d\theta_2}{d\beta_2} = 0$$

C. 2. F. D.

Posons:

$$\lambda = \pm \eta^{m-1}, \quad \beta_1 = \gamma_1 \eta, \quad \beta_2 = \gamma_2 \eta$$

on voit que θ_1 et θ_2 devraient être divisibles par η^m ; de sorte et ω_1 et ω_2 par η^{m+1} de sorte qu'on peut poser:

$$\theta_1 = \eta^m \theta'_1, \quad \theta_2 = \eta^m \theta'_2, \quad \omega_1 = \eta^{m+1} \omega'_1, \quad \omega_2 = \eta^{m+1} \omega'_2.$$

d'où:

$$\psi_1 = \pm \eta^m (a' \gamma_1 + b' \gamma_2^*) + \eta^m \theta'_1 + \eta^{m+1} \omega'_1$$

$$\psi_2 = \pm \eta^m (c' \gamma_1 - a' \gamma_2) + \eta^m \theta'_2 + \eta^{m+1} \omega'_2.$$

de sorte que nos équations (1) peuvent être remplacées par les suivantes:

$$(14) \quad \pm (a' \gamma_1 + b' \gamma_2) + \theta'_1 + \eta \omega'_1 = 0$$

$$(15) \quad \pm (c' \gamma_1 - a' \gamma_2) + \theta'_2 + \eta \omega'_2 = 0.$$

Il est clair qu'on peut tirer de ces équations γ_1 et γ_2 en séries ordonnées suivant les puissances de η et sans que ces séries soient identiquement nulles.

Pour cela, En vertu du Théorème IV § 2, ~~(d'après la 1^{re} partie)~~ ^(1^{re} partie) il nous suffit pour cela d'établir:

1° Que les deux équations (15) ⁽¹⁴⁾ admettent, quand on y fait $\eta = 0$ admettent au moins une système de solutions réelles:

$$\gamma_1 = \gamma_1^0, \quad \gamma_2 = \gamma_2^0.$$

2° Que si l'on fait:

$$\eta = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_1^0, \quad \gamma_2 = \gamma_2^0$$

le déterminant fonctionnel des premiers membres des deux équations (15) par rapport à γ_1 et à γ_2 n'est pas nul.

Cela revient à dire que, pour les équations (15) réduites par la supposition de $\eta = 0$, la solution

$$\gamma_1 = \gamma_1^0, \quad \gamma_2 = \gamma_2^0.$$

doit être une solution simple.

Mais en vertu des théorèmes ~~d'ordre~~ ^{des} V et VI (§ 2 ~~d'après la 1^{re} partie~~ ^{1^{re} partie}) et de leurs corollaires, on peut en core développer γ_1 et γ_2 suivant les puissances de η , ~~pour~~ ^{et} même cette solution serait multiple, pourvu que l'ordre de multiplicité soit impair.

Nous sommes donc conduits à envisager les équations.

$$(15) \quad \pm (a' \gamma_1 + b' \gamma_2) + \theta'_1 = 0$$

$$(16) \quad \pm (c' \gamma_1 - a' \gamma_2) + \theta'_2 = 0$$

et nous devons chercher et démontrer que ces équations admettent au moins une solution

réelle d'ordre impair.

De ces équations nous pouvons tirer la suivante:

$$(1) \quad (a'y_1 + b'y_2) \theta'_2 - (c'y_1 - a'y_2) \theta'_1 = 0.$$

Il est clair que θ'_1 et θ'_2 seront qui est homogène et dont on pourra par conséquent tirer le rapport $\frac{\theta'_1}{\theta'_2}$.

Il est clair que θ'_1 et θ'_2 sont formés avec y_1 et y_2 comme θ_1 et θ_2 avec β_1 et β_2 ; on aura donc:

$$\frac{d\theta'_1}{dy_1} + \frac{d\theta'_2}{dy_2} = 0$$

Cela prouve qu'il existe une polynôme f homogène et de degré $m+1$ en y_1 et y_2 et qui est tel que:

$$\theta'_1 = \frac{df}{dy_2}, \quad \theta'_2 = -\frac{df}{dy_1}$$

De même si nous posons:

$$f_1 = \frac{1}{2} (b'y_2^2 + 2a'y_1y_2 - c'y_1^2)$$

il vient:

$$a'y_1 + b'y_2 = \frac{df_1}{dy_2}, \quad c'y_1 - a'y_2 = -\frac{df_1}{dy_1}$$

de sorte que l'équation (1) peut s'écrire:

$$\frac{df_1}{dy_2} \frac{df}{dy_1} - \frac{df_1}{dy_1} \frac{df}{dy_2} = 0$$

Considérons l'expression:

$$H = \frac{f_1^2}{f^{m+1}}$$

Elle est homogène et de degré 0 par rapport à y_1 et y_2 ; elle ne dépend donc que du rapport $\frac{y_1}{y_2}$. Je dis que le dénominateur f_1 ne peut jamais s'annuler.

En effet l'équation:

$$(a'-s)(c'-s) - b'^2 = 0$$

doit avoir ses deux racines imaginaires, d'où:

$$a'e' - b'c' = -a'^2 - b'c' < 0.$$

d'où:

$$a'^2 + b'c' > 0$$

ce qui prouve que la forme quadratique f_1 est définie. L'expression H ne peut donc jamais devenir infinie. Elle admettra donc au moins un maximum. Pour ce maximum on devra avoir:

$$\frac{df_1}{dy_2} \frac{df}{dy_1} - \frac{df_1}{dy_1} \frac{df}{dy_2} = 0.$$

Ainsi l'équation (1) admet au moins une racine réelle. Elle sera en général simple.

en tout cas, elle sera toujours d'ordre impair, car un maximum ne peut correspondre qu'à une racine d'ordre impair.

Nous avons ~~tiré~~ tiré de l'équation (5) le rapport $\frac{y_1}{y_2}$; ~~soit~~ nous pouvons donc poser:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1}{y_2} \quad y_1 = s_1 u, \quad y_2 = s_2 u$$

s_1 et s_2 étant des quantités que nous regarderons de comme.

Il nous reste maintenant à déterminer u . Pour cela dans la première des équations (5) je remplace y_1 et y_2 par $s_1 u$ et $s_2 u$, il vient:

$$\theta_1' = u^m \theta_1'', \quad \theta_2' = u^m \theta_2'', \quad \theta_2' = u^m \theta_2''.$$

θ_1'' étant formé avec s_1 et s_2 comme θ_1' avec y_1 et y_2 ; d'où:

$$(6) \quad \pm (a's_1 + b's_2) + \theta_1'' u^{m-1} = 0.$$

Cette équation doit déterminer u ; si m est pair elle aura une racine réelle; si m est impair (et c'est d'ailleurs ce qui arrivera en général) elle aura deux racines réelles, ou pas de racine réelle; elle aura deux racines réelles si θ_1'' et $\pm (a's_1 + b's_2)$ ont de signe contraire; mais on peut toujours grâce au double signe $\pm$, s'arranger pour qu'il en soit ainsi.

L'équation (6) admet donc au moins une racine réelle. De plus cette racine est simple.

Il n'y aurait d'exception que si

$$a's_1 + b's_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_1'' = 0.$$

Mais dans ce cas on remplacerait l'équation (6) par la suivante:

$$(7) \quad \pm (c's_1 - a's_2) + \theta_2'' u^{m-1} = 0$$

ou par une combinaison. Il n'y aurait donc plus de difficulté que si on avait à la fois:

$$a's_1 + b's_2 = c's_1 - a's_2 = 0$$

ou bien

$$\theta_1'' = \theta_2'' = 0.$$

La première circonstance ne peut pas se produire, à cause de l'inégalité:

$$a'^2 + b'c' > 0.$$

La seconde circonstance pourrait au contraire se présenter. Il peut se faire que l'équation (6) admette une racine telle que $\theta_1' = \theta_2' = 0$. Mais je dis que dans ce cas l'équation (6) admettra encore au moins une racine pour laquelle cette circonstance ne se produira pas.

En effet on a, identiquement:

$$mf = y_2 \theta_1' - y_1 \theta_2' \quad 249, §20.$$

Si donc:

$$\theta_1' = \theta_2' = 0$$

on aura $f = 0$ et puisque f_1 n'est jamais nul
 $H = 0$.

Il peut se faire en effet que l'expression H admette 0 comme maximum ou comme minimum. Mais cette expression n'est pas identiquement nulle puisque θ_1' et θ_2' ne sont pas tous deux identiquement nuls; de plus elle reste toujours finie; elle devient donc soit positive, soit négative; si elle devient positive, elle aura un maximum positif et différent de 0; si elle devient négative, elle aura un minimum négatif et différent de 0.

Ainsi l'équation (15) admet toujours au moins une racine réelle d'ordre impair telle que θ_1'' et θ_2'' ne s'annulent pas à la fois.

Donc les équations (15) ont au moins une solution réelle d'ordre impair.

Donc on peut trouver des séries qui ne sont pas identiquement nulles, qui sont développables suivant les puissances fractionnaires positives de $\mu - \mu_0$ et qui satisfont aux équations (15) quand on les substitue à β_1 et β_2 .

Donc il existe un système de solutions périodiques de période $2k\pi$ qui pour $\mu = \mu_0$ se confondent avec la solution

$$x_1 = \varphi_1(y_1), \quad y_2 = \varphi_2(y_1).$$

Ce sont les solutions périodiques du 2^e genre.

Comme aucune trajectoire ne peut passer d'une région dans l'autre, on doit conclure que la stabilité est rigoureusement démontrée; qu'il est possible, étant donnée la position initiale du point représentatif de la situation du système, de trouver une région d'où ce point ne pourra sortir et d'assigner à cette région, sinon *ses limites précises*, du moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises.

Il y a donc trois sortes de trajectoires:

1°. Les trajectoires fermées correspondant aux solutions périodiques et dont il est aisé par les principes du chapitre III (1^{ère} partie) de trouver les équations sous forme d'égalités où entrent des séries convergentes.

2°. Les trajectoires asymptotiques dont nous venons de parler en détail. En ce qui les concerne, nous avons donné dans le chapitre précédent le moyen de former l'équation des surfaces asymptotiques; quand on possèdera cette équation, on pourra en déduire l'équation des trajectoires asymptotiques elles-mêmes par une application convenable des principes des *Vorlesungen über Dynamik*.

3°. Les trajectoires les plus générales qui ne rentrent dans aucune des deux premières catégories.

Nous pouvons affirmer (théorème I, chapitre II, 1^{ère} partie) que si l'on envisage une portion de l'espace quelconque, si petite qu'elle soit, il y aura toujours des trajectoires qui la traverseront une infinité de fois.

Il est même hautement vraisemblable que toute portion de l'espace est traversée par une infinité de trajectoires fermées. S'il en est ainsi, et si nous considérons une trajectoire quelconque de la 3^{ème} catégorie, nous pouvons toujours trouver une trajectoire de l'une des deux premières catégories qui pendant un temps aussi long qu'on veut, s'en écarte aussi peu qu'on veut, ce qui permettrait de trouver l'équation avec telle approximation qu'on voudrait.

Divergence des séries de
§ 21. *Résultats négatifs.* *M. Lindstedt*

Je voudrais terminer l'exposé des résultats généraux de ce mémoire en appelant particulièrement l'attention sur les conclusions négatives qui en découlent. Ces conclusions sont pleines d'intérêt, non seulement parce qu'elles font mieux ressortir l'étrangeté des résultats obtenus, mais parce qu'elles peuvent, en vertu précisément de leur nature négative, s'étendre

immédiatement aux cas plus généraux, tandis que les conclusions positives ne peuvent se généraliser sans une démonstration spéciale.

~~La plus importante de ces conclusions négatives peut s'énoncer aussi:~~

~~*En dehors de l'intégrale des forces vives, les équations de la dynamique n'admettent en général aucune intégrale qui soit à la fois une fonction analytique et uniforme.*~~

~~Si en effet une pareille intégrale existait et si l'on avait:~~

$$\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = \text{const.},$$

~~Φ étant une fonction uniforme, l'équation $\Phi = \text{const.}$ devrait être l'équation générale des surfaces trajectoires fermées et en donnant à la constante différentes valeurs, on devrait retrouver les équations des diverses surfaces asymptotiques. Mais chaque surface asymptotique a une courbe double et en tous les points de cette courbe double les quatre dérivées partielles de Φ devraient s'annuler.~~

~~Mais dans le voisinage d'une de ces courbes doubles passe une infinité d'autres courbes doubles de sorte que l'on devrait trouver dans le voisinage d'un point donné une infinité de courbes le long desquelles les quatre dérivées de Φ s'annulent à la fois. Cette fonction Φ ne saurait donc être analytique.¹~~

~~C. Q. F. D.~~

~~Ce résultat ne cesserait d'être vrai que dans le cas exceptionnel où les deux nappes d'une infinité de surfaces asymptotiques viendraient à se confondre en une seule.~~

~~En effet le raisonnement qui précède est en défaut si l'on peut admettre que dans une région déterminée, il n'y a pas de surface asymptotique à courbe double; pour cela il faut que quand la constante varie, entre certaines limites, l'équation:~~

$$\Phi = \text{const.}$$

~~représente une série de surfaces sans courbe double s'enveloppant mutuellement. On peut alors intégrer complètement les équations différentielles et on reconnaît sans peine que, parmi ces surfaces sans courbe double,~~

~~¹ Cf. Note C.~~

267

~~Note A~~*de*~~Sur la divergence des séries de M. Lindstedt.~~

~~J'ai annoncé plus haut sans démonstration~~ que les séries proposées par M. LINDSTEDT ne sont pas convergentes. Je crois nécessaire de revenir sur ce sujet avec plus de détails, mais je veux auparavant rappeler en quoi consiste la méthode de M. LINDSTEDT. Je l'exposerai, il est vrai, avec des notations différentes de celles qu'avait adoptées ce savant astronome, car je désire, pour plus de clarté, conserver celles dont j'ai fait usage plus haut.

H je me propose d'abord de démontrer.

Mettons les équations de la dynamique sous la même forme que dans la seconde partie du présent mémoire et écrivons:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{dF}{dy_2}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF}{dx_2}.$$

F sera une fonction donnée des quatre variables x_1, x_2, y_1 et y_2 et nous aurons:

$$F = F_0 + \mu F_1.$$

F_0 sera une fonction de x_1 et de x_2 , indépendante de y_1 et de y_2 ; μ sera un coefficient très petit, de sorte que μF_1 sera la *fonction perturbatrice*.

C'est en effet sous cette forme que se présentent les problèmes de la dynamique et en particulier les problèmes de la mécanique céleste.

Si μ était nul, x_1 et x_2 seraient des constantes. Si μ n'est pas nul mais très petit, et qu'on appelle ξ_1 et ξ_2 les valeurs initiales de x_1 et de x_2 , les différences $x_1 - \xi_1$ et $x_2 - \xi_2$ seront du même ordre de grandeur que μ .

268

Si donc nous appelons n_1 et n_2 les valeurs de $-\frac{dF_0}{dx_1}$ et de $-\frac{dF_0}{dx_2}$ pour $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, les différences:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1 \quad \text{et} \quad -\frac{dF_0}{dx_2} - n_2$$

seront du même ordre de grandeur que μ , ce qui nous permettra de poser:

$$-\frac{dF_0}{dx_1} - n_1 = \mu \varphi_1(x_1, x_2),$$

$$-\frac{dF_0}{dx_2} - n_2 = \mu \varphi_2(x_1, x_2),$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions de x_1 et de x_2 qui ne sont pas très grandes.

Les équations du mouvement s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \mu \frac{dF_1}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \mu \frac{dF_1}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= n_1 + \mu \left(\varphi_1 - \frac{dF_1}{dx_1} \right), & \frac{dy_2}{dt} &= n_2 + \mu \left(\varphi_2 - \frac{dF_1}{dx_2} \right). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que x_1, x_2, y_1, y_2 au lieu d'être regardés *directement* comme des fonctions de t soient regardés comme des fonctions de deux variables:

$$w_1 \quad \text{et} \quad w_2$$

et que l'on pose:

$$w_1 = \lambda_1 t + \bar{w}_1, \quad w_2 = \lambda_2 t + \bar{w}_2.$$

$\bar{w}_1$ et $\bar{w}_2$ seront des constantes d'intégration arbitraires; λ_1 et λ_2 seront des constantes que la suite du calcul déterminera complètement.

Les équations du mouvement deviennent alors:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{dx_1}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dx_1}{dw_2} - \mu \frac{dF_1}{dy_1} &= 0, \\ \lambda_1 \frac{dx_2}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{dw_2} - \mu \frac{dF_1}{dy_2} &= 0, \\ \lambda_1 \frac{dy_1}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dy_1}{dw_2} - n_1 - \mu \left(\varphi_1 - \frac{dF_1}{dx_1} \right) &= 0, \\ \lambda_1 \frac{dy_2}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dy_2}{dw_2} - n_2 - \mu \left(\varphi_2 - \frac{dF_1}{dx_2} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{I}$$

269

Posons maintenant:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \mu^3 x_1^3 + \dots, \\
 x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \mu^3 x_2^3 + \dots, \\
 y_1 - w_1 &= \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \dots, \\
 y_1 - w_2 &= \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \dots, \\
 \lambda_1 &= \lambda_1^0 + \mu \lambda_1^1 + \mu^2 \lambda_1^2 + \dots, \\
 \lambda_2 &= \lambda_2^0 + \mu \lambda_2^1 + \mu^2 \lambda_2^2 + \dots
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Je suppose que les coefficients λ_i^k sont des constantes et que les coefficients y_i^k et x_i^k sont des séries trigonométriques ordonnées suivant les sinus et les cosinus des multiples de w_1 et de w_2 .

Je supposerai d'ailleurs comme je l'ai toujours fait jusqu'ici que F_1 est une série trigonométrique dépendant des sinus et cosinus des multiples de y_1 et de y_2 et que les coefficients de cette série sont des fonctions holomorphes de x_1 et de x_2 .

Dans ces conditions, si dans les premiers membres des équations (1) je substitue à la place de $\lambda_1, \lambda_2, y_1, y_2, x_1$ et x_2 leurs valeurs (2), j'aurai quatre fonctions développées suivant les puissances croissantes de μ et il est clair que les coefficients des diverses puissances de μ seront des séries ordonnées suivant les lignes trigonométriques des multiples de w_1 et w_2 .

J'appelle:

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi'_1 \text{ et } \Phi'_2$$

ces quatre fonctions.

Cela posé, le théorème de M. LINDSTEDT consiste en ceci:

Il est possible de déterminer les $2q + 2$ constantes

$$\begin{aligned}
 \lambda_1^0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_1^q, \\
 \lambda_2^0, \lambda_2^1, \dots, \lambda_2^q,
 \end{aligned}$$

et les $4q$ séries trigonométriques:

$$\begin{aligned}
 x_1^1, \dots, x_1^q, \\
 x_2^1, \dots, x_2^q, \\
 y_1^1, \dots, y_1^q, \\
 y_2^1, \dots, y_2^q,
 \end{aligned}$$

de façon à annuler dans

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi'_1 \text{ et } \Phi'_2$$

les termes indépendants de μ et les coefficients des q premières puissances de μ , de façon, en d'autres termes, à satisfaire aux équations du mouvement aux quantités près de l'ordre de μ^{q+1} .

On trouve d'abord:

$$\lambda_1^0 = n_1, \quad \lambda_2^0 = n_2, \quad x_1^0 = \xi_1 + \omega_1, \quad x_2^0 = \xi_2 + \omega_2,$$

ω_1 et ω_2 étant des constantes d'intégration que nous supposons de l'ordre de μ .

Supposons que l'on ait déterminé par un calcul préalable:

$$\lambda_i^0, \lambda_i^1, \dots, \lambda_i^{q-1},$$

$$x_i^1, \dots, x_i^{q-1},$$

$$y_i^1, \dots, y_i^{q-1},$$

et que l'on se propose de déterminer

$$\lambda_1^q, \lambda_2^q, x_1^q, x_2^q, y_1^q, y_2^q.$$

Pour cela, écrivons que le coefficient de μ^q est nul dans Φ_1, Φ_2 et Φ'_1, Φ'_2 .

Il vient:

$$n_1 \frac{dx_1^q}{dw_1} + n_2 \frac{dx_1^q}{dw_2} = X_1,$$

$$n_1 \frac{dx_2^q}{dw_1} + n_2 \frac{dx_2^q}{dw_2} = X_2,$$

$$n_1 \frac{dy_1^q}{dw_1} + n_2 \frac{dy_1^q}{dw_2} + \lambda_1^q = Y_1,$$

$$n_1 \frac{dy_2^q}{dw_1} + n_2 \frac{dy_2^q}{dw_2} + \lambda_2^q = Y_2,$$

X_1, X_2, Y_1 et Y_2 étant des fonctions connues.

X_1, X_2, Y_1 et Y_2 sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2 .

Pour que l'intégration des équations (3) soit possible, il faut:

1° que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, ce qu'il est toujours permis de supposer.

2° que dans les séries trigonométriques X_1 et X_2 , les termes tout connus soient nuls. Il en est effectivement ainsi, mais la démonstration de ce fait important est délicate et ne saurait trouver place ici; je me borne à dire qu'elle doit être fondée sur l'emploi des invariants intégraux.

3° que dans les séries trigonométriques Y_1 et Y_2 , les termes tout connus se réduisent à λ_1^i et λ_2^i ; comme λ_1^i et λ_2^i sont deux inconnues, nous déterminerons ces inconnues par cette condition.

L'intégration des équations (3) est alors possible. Leur intégration introduira quatre constantes arbitraires. A chaque approximation nouvelle, nous aurons ainsi quatre constantes d'intégration de plus; nous leur donnerons des valeurs quelconques et nous ne conserverons d'autres constantes arbitraires que ω_1 , ω_2 , $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$.

Ainsi les séries de M. LINDSTEDT sont des séries trigonométriques en w_1 et w_2 ; elles sont développées suivant les puissances de μ et aussi suivant les puissances des deux constantes ω_1 et ω_2 .

Ces séries d'après le théorème de M. LINDSTEDT, satisfont *formellement* aux équations du mouvement. Si donc elles étaient uniformément convergentes, elles nous donneraient l'intégrale générale de ces équations.

Je dis que cela n'est pas possible.

En effet supposons qu'il en soit ainsi et que nos séries convergent uniformément pour toutes les valeurs du temps et pour les valeurs suffisamment petites de μ , de ω_1 et de ω_2 .

Il est clair que λ_1 et λ_2 sont aussi des séries ordonnées suivant les puissances de μ , ω_1 et ω_2 . Pour certaines valeurs de ω_1 et ω_2 le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ est commensurable. Les solutions particulières qui répondent à ces valeurs des constantes d'intégration sont alors des solutions périodiques.

Nous avons vu plus haut que toute solution périodique admet un certain nombre d'exposants caractéristiques. Voyons comment on peut calculer ces exposants quand on possède l'intégrale générale des équations données.

272

Soit:

$$x_1 = \phi_1(t, \omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2), \quad x_2 = \phi_2(t, \omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2),$$

$$y_1 = \phi'_1(t, \omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2), \quad y_2 = \phi'_2(t, \omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$$

cette intégrale générale.

Supposons qu'en donnant à $\omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ des valeurs déterminées $\omega_1^0, \omega_2^0, \bar{\omega}_1^0, \bar{\omega}_2^0$, les fonctions $\phi_1, \phi_2, \phi'_1, \phi'_2$ deviennent périodiques en t . Pour avoir les exposants caractéristiques de la solution périodique ainsi obtenue, nous formerons les seize dérivées partielles:

$$\frac{dx_1}{d\omega_1}, \frac{dx_2}{d\omega_1}, \frac{dy_1}{d\omega_1}, \frac{dy_2}{d\omega_1},$$

$$\frac{dx_1}{d\bar{\omega}_1}, \frac{dx_2}{d\bar{\omega}_1}, \frac{dy_1}{d\bar{\omega}_1}, \frac{dy_2}{d\bar{\omega}_1},$$

$$\frac{dx_1}{d\omega_2}, \frac{dx_2}{d\omega_2}, \frac{dy_1}{d\omega_2}, \frac{dy_2}{d\omega_2},$$

$$\frac{dx_1}{d\bar{\omega}_2}, \frac{dx_2}{d\bar{\omega}_2}, \frac{dy_1}{d\bar{\omega}_2}, \frac{dy_2}{d\bar{\omega}_2}$$

et nous y ferons ensuite

$$\omega_1 = \omega_1^0, \quad \omega_2 = \omega_2^0, \quad \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1^0, \quad \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_2^0.$$

Alors $\frac{dx_1}{d\omega_1}$ par exemple prendra la forme suivante:

$$\frac{dx_1}{d\omega_1} = e^{\alpha_1 t} \theta_1(t) + e^{\alpha_2 t} \theta_2(t) + e^{\alpha_3 t} \theta_3(t) + e^{\alpha_4 t} \theta_4(t),$$

les α étant des constantes et les θ des fonctions périodiques.

Les α sont alors les exposants caractéristiques cherchés.

Appliquons cette règle au cas qui nous occupe. Nous avons:

$$x_1 = \varphi_1(\omega_1, \omega_2, w_1, w_2),$$

φ_1 étant périodique en w_1 et en w_2 .

Il vient alors:

$$\frac{dx_1}{d\bar{\omega}_1} = \frac{d\varphi_1}{dw_1}, \quad \frac{dx_1}{d\omega_1} = \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} + \left(\frac{d\lambda_1}{d\omega_1} \frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1} \frac{d\varphi_1}{dw_2} \right) t.$$

Les trois fonctions:

$$\frac{d\varphi_1}{dw_1}, \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} \quad \text{et} \quad \frac{d\lambda_1}{d\omega_1} \frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1} \frac{d\varphi_1}{dw_2}$$

sont périodiques en w_1 et w_2 et par conséquent en t .

On trouverait pour $\frac{dx_1}{d\omega_1}$ et $\frac{dx_1}{d\omega_2}$ des expressions analogues.

Cela prouve que les exposants caractéristiques sont nuls.

Donc, si les séries de M. Lindstedt étaient convergentes, tous les exposants caractéristiques seraient nuls.

Dans quel cas en est-il ainsi?

Nous avons vu plus haut la manière de calculer les exposants caractéristiques (1^{ère} partie, chapitre III, §§ 2 et 4).

Dans ce dernier paragraphe nous avons vu que les exposants caractéristiques relatifs aux équations:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF_0}{dy_i} + \mu \frac{dF_1}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_i} - \mu \frac{dF_1}{dx_i}$$

pouvaient se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; nous avons appris à former l'équation qui donne le coefficient α_1 de $\sqrt{\mu}$.

Rappelons comment se forme cette équation:

Nous avons posé dans le paragraphe cité

$$C_{ik}^0 = -\frac{d^2 F_0}{dx_i dx_k}, \quad B_{ik}^2 = \frac{d^2 F_1}{dy_i dy_k}.$$

Dans ces dérivées secondes on suppose x_1 et x_2 remplacés par x_1^0 et x_2^0 , pendant que y_1 et y_2 sont remplacés par $n_1 t + \bar{\omega}_1$, $n_2 t + \bar{\omega}_2$.¹ C_{ik}^0 est donc une constante et B_{ik}^2 une fonction périodique de t . J'appelle b_{ik} le terme tout connu de cette fonction périodique.

Posons ensuite:

$$\begin{aligned} e_{11} &= b_{11} C_{11}^0 + b_{12} C_{21}^0, & e_{21} &= b_{21} C_{11}^0 + b_{22} C_{21}^0, \\ e_{12} &= b_{11} C_{12}^0 + b_{12} C_{22}^0, & e_{22} &= b_{21} C_{12}^0 + b_{22} C_{22}^0. \end{aligned}$$

¹ Inutile de rappeler ici que ces valeurs de x_1^0 , x_2^0 , n_1 , n_2 sont celles qui correspondent à la solution périodique étudiée; ce ne sont pas celles dont nous avons fait usage plus haut dans l'exposé de la méthode de M. LINDSTEDT. Le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est donc commensurable.

L'équation qui nous donne α_1 s'écrira alors:

$$\begin{vmatrix} e_{11} - \alpha_1^2 & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que cette équation ait toutes ses racines nulles, il faudrait que l'on eût:

$$e_{11} + e_{22} = 0$$

257, 82, ou

$$(4) \quad b_{11}C_{11}^0 + 2b_{12}C_{12}^0 + b_{22}C_{22}^0 = 0.$$

Or on a comme je l'ai démontré dans le paragraphe cité

$$n_1b_{11} + n_2b_{12} = n_1b_{21} + n_2b_{22} = 0.$$

Il faut donc pour que l'identité (4) ait lieu ou bien que:

$$(5) \quad b_{11} = 0$$

ou bien que:

$$(6) \quad n_2^2C_{11}^0 - 2n_1n_2C_{12}^0 + n_1^2C_{22}^0 = 0.$$

Occupons-nous d'abord de la relation (5). Si nous faisons dans la fonction perturbatrice F_1

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad y_1 = n_1t + \bar{\omega}_1, \quad y_2 = n_2t + \bar{\omega}_2$$

F_1 deviendra une fonction périodique de t . Supposons cette fonction périodique développée en série trigonométrique, et soit ϕ le terme tout connu; ϕ sera une fonction périodique de $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ et il viendra:

$$b_{ik} = \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_i d\bar{\omega}_k}.$$

Nous devons donc avoir:

$$(7) \quad \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_1^2} = 0.$$

Nous pourrions toujours supposer que l'origine du temps a été choisi

de telle sorte que $\bar{\omega}_2$ soit nul et que ϕ soit fonction périodique de $\bar{\omega}_1$ seulement.

De plus la relation (7) devrait être (si les séries de M. LINDSTEDT convergeaient) satisfaite identiquement. Et en effet si l'on admettait la convergence de ces séries, il y aurait une infinité de solutions périodiques correspondant à chaque valeur commensurable du rapport $\frac{n_1}{n_2}$.

Si la relation (7) est une identité et si ϕ est une fonction périodique, cette fonction devra se réduire à une constante.

Voyons ce que cela veut dire:

La fonction perturbatrice F_1 étant périodique par rapport à y_1 et à y_2 pourra s'écrire:

$$F_1 = \sum A_{m_1 m_2} \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2) + \sum B_{m_1 m_2} \sin(m_1 y_1 + m_2 y_2),$$

les m_1 et les m_2 étant des entiers, pendant que $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ sont des fonctions données de x_1 et de x_2 .

On aura alors

$$\phi = S A_{m_1 m_2}^0 \cos(m_1 \bar{\omega}_1 + m_2 \bar{\omega}_2) + S B_{m_1 m_2}^0 \sin(m_1 \bar{\omega}_1 + m_2 \bar{\omega}_2),$$

la sommation représentée par le signe S s'étendant à tous les termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0,$$

et $A_{m_1 m_2}^0$ et $B_{m_1 m_2}^0$ représentant ce que deviennent $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ quand on y remplace x_1 et x_2 par x_1^0 et x_2^0 .

Comme les termes périodiques doivent disparaître de ϕ , on aura

$$A_{m_1 m_2}^0 = B_{m_1 m_2}^0 = 0.$$

Ainsi les coefficients $A_{m_1 m_2}$ et $B_{m_1 m_2}$ du développement de la fonction perturbatrice doivent s'annuler quand on y donne à x_1 et à x_2 des valeurs telles que:

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 = 0.$$

Ou bien encore on doit pouvoir donner au rapport $\frac{n_1}{n_2}$ des valeurs commensurables sans introduire dans la fonction perturbatrice F_1 des termes séculaires.

276

Il est clair qu'il n'en est pas ainsi dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons examiné et qu'on n'y peut donner au rapport des moyens mouvements une valeur commensurable sans introduire dans la fonction perturbatrice des termes séculaires.

Passons maintenant à la condition (6) qui peut s'écrire

$$\left(\frac{dF_0}{dx_2}\right)^2 \frac{d^2 F_0}{dx_1^2} - 2 \frac{dF_0}{dx_1} \frac{dF_0}{dx_2} \frac{d^2 F_0}{dx_1 dx_2} + \left(\frac{dF_0}{dx_1}\right)^2 \frac{d^2 F_0}{dx_2^2} = 0.$$

Elle exprime que la courbe

$$F_0(x_1, x_2) = \text{const.}$$

a un point d'inflexion au point $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0$.

Comme cette condition doit être remplie pour toutes les valeurs de x_1^0 et de x_2^0 qui correspondent à un rapport $\frac{n_1}{n_2}$ commensurable, la courbe $F_0(x_1, x_2) = \text{const.}$ devra se réduire à un système de droites.

C'est un cas particulier que nous laisserons de côté; car il est évident que rien de pareil n'arrive dans le problème des trois corps.

Ainsi, dans le cas particulier du problème des trois corps que nous avons étudié et par conséquent aussi dans le cas général, les séries de M. Lindstedt ne convergent pas uniformément pour toutes les valeurs des constantes arbitraires d'intégration qu'elles contiennent.

On peut présenter cette démonstration sous une autre forme.

Soit:

$$(8) \quad \begin{aligned} x &= \theta_1(\mu, \omega_1, \omega_2, w_1, w_2), & x_2 &= \theta_2(\mu, \omega_1, \omega_2, w_1, w_2), \\ y_1 - w_1 &= \mu \theta'_1(\mu, \omega_1, \omega_2, w_1, w_2), & y_2 - w_2 &= \mu \theta'_2(\mu, \omega_1, \omega_2, w_1, w_2) \end{aligned}$$

les séries de M. LINDSTEDT. Nous avons vu que les fonctions θ et θ' sont ordonnées suivant les puissances de μ, ω_1 et ω_2 et qu'elles sont périodiques en w_1 et w_2 .

Des équations:

$$y_1 - w_1 = \mu \theta'_1, \quad y_2 - w_2 = \mu \theta'_2$$

nous pouvons par la formule de LAGRANGE tirer $y_1 - w_1$ et $y_2 - w_2$

$$\theta_1' = \theta_2' = 0$$

on aura $f=0$ et puisque f_1 n'est jamais nul

$$H=0.$$

Il peut se faire en effet que l'expression H admette ^{0 comme} maximum ou comme minimum. Mais cette expression n'est pas identiquement nulle puisque θ_1' et θ_2' ne sont pas toujours deux identiquement nuls; de plus elle reste toujours finie; elle devient donc soit positive, soit négative; si elle devient positive, elle aura un maximum positif et différent de 0; si elle devient négative, elle aura un minimum négatif et différent de 0.

Ainsi l'équation (3) admet toujours au moins une racine réelle d'ordre impair telle que θ_1'' et θ_2'' ne s'annulent pas à la fois.

Donc les équations (3) ont au moins une solution réelle d'ordre impair.

Donc on peut trouver des séries qui ne sont pas identiquement nulles, qui sont développables suivant les puissances fractionnaires ^{positives} de $\mu - \mu_0$ et qui ^{satisfont} aux équations (3) quand on les substitue à f_1 et f_2 .

Donc il existe un système de solutions ^{périodiques} de période $2K\pi$ qui pour $\mu = \mu_0$ se confondent avec la solution

$$x_1 = \varphi_1(y_1) \quad , \quad x_2 = \varphi_2(y_2)$$

Ce sont les solutions périodiques du 2^e genre.

69 § 22. Non-existence des intégrales uniformes.Note 20.

Reprenons nos équations de la Dynamique avec deux degrés de liberté.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (i = 1, 2)$$

Les équations admettent une intégrale:

$$F = \text{const.}$$

où est Cette intégrale F est une fonction analytique et uniforme de x_1, x_2, y_1, y_2 et μ ; périodique de période 2π par rapport à y_1 et à y_2 .

Je me propose de démontrer qu'il n'existe pas d'autre ~~seule~~ intégrale jouissant des mêmes propriétés.

Soit en effet:

$$\Phi = \text{const.}$$

une autre intégrale analytique et uniforme par rapport aux x , aux y et ~~aux~~ μ et périodique par rapport aux y .

Soit:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad y_1 = \varphi_3(t), \quad y_2 = \varphi_4(t)$$

une solution périodique quelconque (de période T) de nos équations différentielles.

Soit:

$$x_1 = \varphi_1(t) + \xi_1, \quad x_2 = \varphi_2(t) + \xi_2, \quad y_1 = \varphi_3(t) + \xi_3, \quad y_2 = \varphi_4(t) + \xi_4$$

Soit β_i la valeur de ξ_i pour $t=0$; soit $\beta_i + \psi_i$ la valeur de ξ_i pour $t=T$; nous savons que ψ_i sont développables suivant les puissances croissantes des β . Considérons

l'équation en S :

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} - S & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \frac{d\psi_1}{d\beta_3} & \frac{d\psi_1}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} - S & \frac{d\psi_2}{d\beta_3} & \frac{d\psi_2}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_3}{d\beta_1} & \frac{d\psi_3}{d\beta_2} & \frac{d\psi_3}{d\beta_3} - S & \frac{d\psi_3}{d\beta_4} \\ \frac{d\psi_4}{d\beta_1} & \frac{d\psi_4}{d\beta_2} & \frac{d\psi_4}{d\beta_3} & \frac{d\psi_4}{d\beta_4} - S \end{vmatrix} = 0$$

Les racines de cette équation sont égales à

$$e^{dT} - 1$$

Les 4 étant les exposants caractéristiques; deux de ces racines sont donc nulles, et dans le cas particulier du problème des Trois Corps que nous traitons, les deux autres racines doivent être différentes de 0. Si

on remarque d'abord que nous avons:

$$(Y) \quad \begin{aligned} \frac{dF}{dx_1} \frac{d\psi_1}{d\beta_i} + \frac{dF}{dx_2} \frac{d\psi_2}{d\beta_i} + \frac{dF}{dy_1} \frac{d\psi_3}{d\beta_i} + \frac{dF}{dy_2} \frac{d\psi_4}{d\beta_i} &= 0 \\ \frac{d\Phi}{dx_1} \frac{d\psi_1}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dx_2} \frac{d\psi_2}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dy_1} \frac{d\psi_3}{d\beta_i} + \frac{d\Phi}{dy_2} \frac{d\psi_4}{d\beta_i} &= 0. \end{aligned} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

On conclut que

Dans les dérivées de F et de Φ ; x_1, x_2, y_1 et y_2 doivent être remplacés par $\varphi_1(T), \varphi_2(T), \varphi_3(T), \varphi_4(T)$.

On peut en conclure ou bien que l'on a:

$$(a) \quad \frac{\frac{dF}{dx_1}}{\frac{d\Phi}{dx_1}} = \frac{\frac{dF}{dx_2}}{\frac{d\Phi}{dx_2}} = \frac{\frac{dF}{dy_1}}{\frac{d\Phi}{dy_1}} = \frac{\frac{dF}{dy_2}}{\frac{d\Phi}{dy_2}}$$

ou bien que le déterminant fonctionnel des φ par rapport aux β est nul ainsi que tous ses mineurs du 1^{er} ordre.

D'autre part on a, en désignant par $\varphi'_i(t)$ la dérivée de $\varphi_i(t)$:

$$(g) \quad \frac{d\varphi_i}{d\beta_1} \varphi'_1(0) + \frac{d\varphi_i}{d\beta_2} \varphi'_2(0) + \frac{d\varphi_i}{d\beta_3} \varphi'_3(0) + \frac{d\varphi_i}{d\beta_4} \varphi'_4(0) = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$(z) \quad \frac{dF}{dx_1} \varphi'_1(0) + \frac{dF}{dx_2} \varphi'_2(0) + \frac{dF}{dy_1} \varphi'_3(0) + \frac{dF}{dy_2} \varphi'_4(0) = 0$$

$$(z) \quad \frac{d\Phi}{dx_1} \varphi'_1(0) + \frac{d\Phi}{dx_2} \varphi'_2(0) + \frac{d\Phi}{dy_1} \varphi'_3(0) + \frac{d\Phi}{dy_2} \varphi'_4(0) = 0.$$

De ces équations, on peut conclure ^{par un calcul très simple dont on trouvera plus loin le détail} que si ~~si tous les mineurs du déterminant fonctionnel~~ ^{ne sont nuls} les équations (a) ne sont pas satisfaites.

On bien, on aura:

$$(b) \quad \varphi'_1(0) = \varphi'_2(0) = \varphi'_3(0) = \varphi'_4(0) = 0$$

On voit, l'équation en S aura trois racines nulles, (les quatre racines devraient même être nulles, puisque les exposants caractéristiques sont deux à deux égaux et de signe contraire)

Or nous savons que l'équation en S n'a que deux racines nulles; d'autre part les équations (b) ne peuvent être satisfaites que pour certaines solutions périodiques très particulières (je veux dire pour celles qui sont étudiées dans la Mécanique céleste de Lyapunov Chapitre) et on le troisième corps décrit comme les deux premiers une circonférence.

Les équations (a) devront donc être satisfaites. Elles devront l'être pour:

$$x_1 = \varphi_1(T), \quad x_2 = \varphi_2(T), \quad y_1 = \varphi_3(T), \quad y_2 = \varphi_4(T)$$

Mais comme l'origine du temps est restée arbitraire, elles devront l'être également quel que soit t pour:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad y_1 = \varphi_3(t), \quad y_2 = \varphi_4(t).$$

En d'autres termes, elles le seront pour tous les points de toutes les solutions périodiques. Je dis maintenant que ces équations sont satisfaites, identiquement. Posons par exemple.

$$f = \frac{d\Phi}{dx_2} \frac{dF}{dx_1} - \frac{d\Phi}{dx_1} \frac{dF}{dx_2}$$

Il est clair que f sera encore une fonction analytique et uniforme; on aura $f = 0$ pour tous les points de toutes les solutions périodiques. Je veux établir que f est identiquement nul; pour cela je vais montrer que l'on a identiquement pour $\mu = 0$:

$$0 = f = \frac{df}{d\mu} = \frac{d^2 f}{d\mu^2} = \dots$$

En effet considérons une solution périodique quelconque du 1^{er} genre, soit:

$$x_1 = \varphi_1(t, \mu), \quad x_2 = \varphi_2(t, \mu), \quad y_1 = \varphi_3(t, \mu), \quad y_2 = \varphi_4(t, \mu)$$

cette solution; les fonctions φ seront développables suivant les puissances de μ et quand μ tendra vers 0, elles tendront respectivement vers:

$$x_1^0, \quad x_2^0, \quad n_1 t + \omega_1, \quad n_2 t + \omega_2.$$

(x_1^0 et x_2^0 étant des constantes telles que $\frac{n_1}{n_2}$ soit commensurable et ω_1 et ω_2 deux quantités définies dans le § 3 (1^{re} Partie, Chapitre III)). Tant que μ n'est pas nul on aura:

$$f[\varphi_1(t, \mu), \varphi_2(t, \mu), \varphi_3(t, \mu), \varphi_4(t, \mu)] = 0.$$

Mais la fonction f étant analytique et par conséquent continue, on aura en core pour $\mu = 0$ (bien que pour $\mu = 0$ les exposants caractéristiques s'annulent):

$$f(x_1^0, x_2^0, n_1 t + \omega_1, n_2 t + \omega_2) = 0$$

Mais si l'on considère un système quelconque de valeurs de x_1 et de x_2 on pourra toujours trouver un système x_1^0 et x_2^0 qui en différera aussi peu que l'on voudra et qui correspondra à une valeur commensurable $\frac{n_1}{n_2}$. Soit alors:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

λ_1 et λ_2 étant deux entiers premiers entre eux. Nous choisissons t de façon que:

$$n_1 t + \omega_1 = y_1 + 2K\pi \quad (K \text{ entier})$$

On aura alors:

$$n_2 t + \omega_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (y_1 + 2K\pi - \omega_1) + \omega_2$$

Si nous posons:

$$n_2 t + \omega_2 = y_2^0 + 2K'\pi \quad (K' \text{ entier})$$

on devra avoir:

$$f(x_1^0, x_2^0, y_1, y_2^0) = 0.$$

En effet. Etant donnée une valeur quelconque de y_2 , on peut choisir les entiers K et K' de telle façon que la différence $y_2 - y_2^0$ soit plus petite en valeur absolue que $\frac{2\pi}{\lambda_1}$. Mais nous pouvons toujours choisir x_1^0 et x_2^0 de façon que ce système de valeurs diffère aussi peu que l'on veut de x_1 et de x_2 , et que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ tout en étant commensurable soit tel que le nombre entier λ_1 soit aussi grand que possible l'on veut.

Par conséquent, étant donné un système quelconque de valeurs de x_1, x_2, y_1 et y_2 , on pourra trouver un système de valeurs qui en différera aussi peu qu'on voudra et pour lequel f sera nul. Comme la fonction f est analytique elle devra donc être identiquement nulle pour $\mu = 0$.

Cela posé, comme f est identiquement

$$f[\varphi_i(t, \mu)] = 0$$

quel que soient t et μ ; il vient, quand on remplace pour tous les points de la solution périodique:

$$\frac{df}{d\mu} + \frac{df}{dx_1} \frac{dy_1}{d\mu} + \frac{df}{dx_2} \frac{dy_2}{d\mu} + \frac{df}{dy_1} \frac{d\varphi_1}{d\mu} + \frac{df}{dy_2} \frac{d\varphi_2}{d\mu} = 0$$

Cette relation sera vraie en particulier pour

$$\mu = 0, \quad x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad y_1 = n_1 t + \omega_1, \quad y_2 = n_2 t + \omega_2.$$

Mais, quand μ est nul, f est identiquement nulle, par conséquent ses dérivées par rapport aux x et aux y sont nulles. On a donc:

$$\frac{df}{d\mu} = 0$$

pour $\mu = 0, x_i = x_i^0, y_i = n_i t + \omega_i$; et on en conclurait comme plus haut que $\frac{df}{d\mu}$ est identiquement nul pour $\mu = 0$.

On démontrerait de la même manière que $\frac{d^2 f}{d\mu^2}$, ~~est nul~~ et les autres dérivées de f par rapport à μ sont nulles pour $\mu = 0$.

Donc la fonction f est identiquement nulle et les équations (2) sont des identités.

Mais, s'il en est ainsi, cela veut dire que Φ est une fonction de F' , et que les deux intégrales, Φ et F' ne sont pas distinctes.

Nos équations ne comportent donc pas d'autre intégrale analytique et uniforme que $F' = \text{const.}$

Quand je dis que ces équations n'admettent pas d'intégrale uniforme, je ne veux pas dire seulement qu'elles n'ont pas d'intégrale qui ~~reste~~ analytique et uniforme pour toutes les valeurs des x , des y et de μ .

Je veux dire qu'en dehors de l'éq. intégrale F' , ces équations n'admettent pas d'intégrale qui ~~reste~~ analytique, uniforme (et périodique en y_1 et y_2) pour toutes les valeurs de y_1 et de y_2 et pour les valeurs suffisamment petits de μ , quand x_1 et x_2 parcourent un domaine quelconque, si petit d'ailleurs que soit ce domaine.

On sait que Bruns a démontré qu'en dehors des intégrales connues, le problème des trois corps n'admet pas d'intégrale algébrique. Ce résultat se trouve donc confirmé par une voie entièrement différente.

J'ai annoncé plus haut que les équations (f), (g) et (e) entraînent forcément une des trois conséquences suivantes; ou bien les équations (a) sont satisfaites, ou bien ce sont les équations (b), ou bien l'équation en S a au moins trois racines nulles.

En effet formons la matrice suivante à 4 lignes et 5 colonnes,

$$(5) \quad \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \frac{d\psi_1}{d\beta_3} & \frac{d\psi_1}{d\beta_4} & \frac{d\psi_1}{d\beta_5} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \frac{d\psi_2}{d\beta_3} & \frac{d\psi_2}{d\beta_4} & \frac{d\psi_2}{d\beta_5} \\ \frac{d\psi_3}{d\beta_1} & \frac{d\psi_3}{d\beta_2} & \frac{d\psi_3}{d\beta_3} & \frac{d\psi_3}{d\beta_4} & \frac{d\psi_3}{d\beta_5} \\ \frac{d\psi_4}{d\beta_1} & \frac{d\psi_4}{d\beta_2} & \frac{d\psi_4}{d\beta_3} & \frac{d\psi_4}{d\beta_4} & \frac{d\psi_4}{d\beta_5} \end{array} \right\| \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

Si l'équation

Si les équations (f) et (e) sont satisfaites, sans que les équations (a) le soient, nous devons conclure que tous les déterminants obtenus en supprimant dans cette matrice deux colonnes et une ligne sont nuls.

Si maintenant l'on fait subir aux x et aux y à x_1, x_2, y_1 et y_2 un changement linéaire de variables, les ψ et les β subiront le même changement linéaire et la matrice (5) pourra être simplifiée.

On peut toujours supposer qu'on a choisi ce changement linéaire de telle sorte que

$$\frac{d\psi_i}{d\beta_k} = 0 \quad \text{pour } i < k.$$

Alors les produits trois à trois de quatre quantités

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1}, \frac{d\psi_2}{d\beta_2}, \frac{d\psi_3}{d\beta_3}, \frac{d\psi_4}{d\beta_4}$$

sont tous nuls, d'où il suit que deux au moins de ces quantités sont nulles. On peut toujours supposer que le changement linéaire a été choisi de telle sorte que ce soient $\frac{d\psi_3}{d\beta_3}$ et $\frac{d\psi_4}{d\beta_4}$ qui soient nuls.

Si $\frac{d\psi_1}{d\beta_1}$ ou $\frac{d\psi_2}{d\beta_2}$ est autre que l'une des deux quantités $\frac{d\psi_3}{d\beta_3}$ et $\frac{d\psi_4}{d\beta_4}$ est encore nulle, l'équation en S aura trois racines nulles.

Si au contraire aucune de ces deux quantités n'est nulle, les équations (g) permettent de conclure que

$$\psi'_1(0) = \psi'_2(0) = 0.$$

En supprimant dans la matrice (5) la 3^e et la 4^e colonne et la 3^e ligne, ou bien la 3^e et la 4^e colonne et la 4^e ligne, il vient:

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} \frac{d\psi_2}{d\beta_2} \psi'_3(0) = \frac{d\psi_1}{d\beta_1} \frac{d\psi_2}{d\beta_2} \psi'_4(0) = 0.$$

d'où on voit ce qui ne peut avoir lieu que si

$$\psi'_1(0) = \psi'_2(0) = \psi'_3(0) = \psi'_4(0) = 0$$

c'est à dire si les équations (b) sont satisfaites; ou bien si

$$\frac{d\psi_1}{d\beta_1} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\psi_2}{d\beta_2} = 0$$

c'est à dire si l'équation en S a trois racines nulles.

C.R.P.D.

IV.

CHAPITRE ~~III~~.

Tentatives de généralisation.

§23. *Problème des n corps.*

Est-il permis d'espérer qu'on puisse étendre les résultats précédents aux cas où les équations de la dynamique comportent plus de deux degrés de liberté et par conséquent au cas général du problème des n corps?

C'est possible, mais ce ne sera pas sans un nouvel effort.

Je croyais, en commençant ce travail, que la solution du problème, une fois trouvée pour le cas particulier que j'ai traité, se généraliserait immédiatement sans qu'on ait à vaincre aucune difficulté nouvelle en dehors de celles qui sont dues au nombre plus grand des variables et à l'impossibilité d'une représentation géométrique. Je me trompais.

Aussi crois-je devoir insister un peu ici sur la nature des obstacles qui s'opposent à cette généralisation.

S'il y a p degrés de liberté, la situation du système peut être représentée par la position d'un point dans l'espace à $2p - 1$ dimensions. La plupart des conclusions de la première partie sont encore vraies et n'ont à subir aucun changement. Il existe donc une infinité de solutions périodiques représentées par des trajectoires fermées et se classant en stables et en instables, ou même en catégories plus nombreuses, d'après la nature de leurs exposants caractéristiques. Il existe aussi une infinité de solutions asymptotiques.

~~L'ensemble des trajectoires asymptotiques relatives à une même trajectoire fermée instable forme une multiplicité à p dimensions; il me semble très probable, quoique je n'aie pas achevé le calcul, que cette multiplicité est fermée (comme le sont les surfaces asymptotiques envisagées dans les chapitres qui précèdent); mais comme elle n'a que p dimensions, elle ne partage pas en deux ou plusieurs régions l'espace à $2p - 1$ dimensions, car du moment que $p > 2$, on a $2p - 1 > p + 1$.~~

~~Nous ne pouvons donc conclure à la stabilité.~~

il y en a une infinité qui sont sillonnées par une infinité de trajectoires fermées représentant des solutions périodiques. Ces surfaces ainsi sillonnées par des trajectoires fermées doivent être regardées comme des surfaces asymptotiques dont les deux nappes se sont confondues.

Il existe donc certainement des équations différentielles de la forme des équations de la dynamique qui admettent une intégrale analytique et uniforme, mais cela n'arrivera qu'exceptionnellement et l'on peut dire que l'on ne rencontrera de pareilles équations que si on les fabrique tout exprès.

Il est aisé de voir que ce cas exceptionnel ne se rencontrera pas dans le problème des trois corps. Pour qu'il se produisît, il faudrait en effet que la condition suivante fût remplie:

Soit

$$A \cos(m_1 y_1 + m_2 y_2)$$

un terme quelconque de la fonction perturbatrice (A étant fonction de x_1 et de x_2 et m_1 et m_2 étant des entiers).

Il faudrait que A s'annulât toutes les fois que l'on aurait:

$$m_1 \frac{dF_0}{dx_1} + m_2 \frac{dF_0}{dx_2} = 0$$

ou du moins que cela arrivât pour une infinité de ces termes, à savoir pour tous ceux où le rapport $\frac{m_1}{m_2}$ serait compris entre certaines limites.

Il faudrait que tous les termes de la fonction perturbatrice disparaissent au moment où ils deviennent séculaires.

Or il n'en est pas ainsi; donc en dehors de l'intégrale des forces vives et dans le cas particulier qui nous occupe, le problème des trois corps n'admet pas d'intégrale analytique et uniforme.

Cela montre en même temps que les séries habituellement employées en mécanique céleste, et en particulier les séries de M. LINDSTEDT ne sont pas convergentes, car leur convergence entraînerait l'existence d'une intégrale analytique et uniforme.

Ainsi se trouve confirmé un résultat que M. BRUNS avait obtenu par une voie entièrement différente.

283

§ 23.

Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique.

159

Les difficultés que l'on rencontrait autrefois en mécanique céleste et qui s'opposaient à la convergence des séries tenaient, comme on le sait, à la présence de certains petits diviseurs; j'ai trouvé le moyen de tourner ces difficultés et c'est ce qui m'a permis d'arriver pour le cas de $p = 2$ aux résultats que j'ai exposés dans ce travail; mais un obstacle analogue se dresse devant nous dès que $p > 2$. Si en effet les anciens petits diviseurs ont disparu, nous rencontrons de nouveaux petits diviseurs qui sont ceux que j'ai appelés (5) dans le § 5 (1^{ère} partie, chapitre III). La difficulté étant de même nature que celle qui a déjà été vaincue, on peut espérer que des moyens analogues permettront d'en venir à bout, mais malgré mes efforts, je n'ai pu encore les trouver.

J'ai cherché également à étendre au cas général le calcul du § 17 (2^{ème} partie, chapitre I) en laissant de côté la question de convergence qui ne peut être regardée comme résolue que dans le cas des multiplicités asymptotiques à p dimensions que nous venons de définir. Les séries qu'on obtient de la sorte peuvent en effet, même lorsqu'elles divergent, être utiles dans certains cas aux astronomes et peut-être guider les géomètres vers la solution définitive.

Supposons trois degrés de liberté et reprenons les équations (1) du § 17 (1^{ère} partie, chapitre III) en faisant les mêmes hypothèses que dans ce paragraphe.

Cherchons ensuite trois fonctions de y_1, y_2, y_3 :

$$x_1 = \phi_1(y_1, y_2, y_3),$$

$$x_2 = \phi_2(y_1, y_2, y_3),$$

$$x_3 = \phi_3(y_1, y_2, y_3),$$

satisfaisant aux équations:

$$\frac{dx_1}{dy_1} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_1}{dy_2} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_1}{dy_3} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{dy_1} = 0,$$

$$\frac{dx_2}{dy_1} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_2}{dy_2} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_2}{dy_3} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{dy_2} = 0,$$

$$\frac{dx_3}{dy_1} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_3}{dy_2} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dx_3}{dy_3} \frac{dF}{dx_1} + \frac{dF}{dy_3} = 0,$$

284

ou, ce qui revient au même, aux équations:

$$F = C, \quad \frac{dx_1}{dy_2} = \frac{dx_2}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dy_3} = \frac{dx_3}{dy_2}, \quad \frac{dx_3}{dy_1} = \frac{dx_1}{dy_3}.$$

Nous supposons que x_1, x_2, x_3 peuvent se développer suivant les puissances de μ ou de $\sqrt{\mu}$ et que pour $\mu = 0$, elles se réduisent à des constantes x_1^0, x_2^0, x_3^0 .

Nous poserons ensuite comme plus haut:

$$\frac{dF_0}{dx_1^0} = -n_1, \quad \frac{dF_0}{dx_2^0} = -n_2, \quad \frac{dF_0}{dx_3^0} = -n_3.$$

Si entre n_1, n_2, n_3 il n'y a aucune relation linéaire à coefficients entiers, on peut développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de μ ; chaque terme est périodique à la fois par rapport à y_1 , à y_2 et à y_3 . Mais il s'introduit de petits diviseurs.

Si entre n_1, n_2 et n_3 il y a une relation linéaire et une seule à coefficients entiers:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$

les calculs peuvent se poursuivre absolument comme dans le § 2 du chapitre I. Les trois fonctions x_1, x_2 et x_3 se développent suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et elles sont au moins doublement périodiques, je veux dire qu'elles ne changent pas quand y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π de telle façon que $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ ne change pas; il y a encore de petits diviseurs.

Il reste un troisième cas, le plus intéressant de tous, qui est celui où il y a entre n_1, n_2, n_3 deux relations linéaires à coefficients entiers:

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0,$$

$$m'_1 n_1 + m'_2 n_2 + m'_3 n_3 = 0.$$

On peut alors développer x_1, x_2 et x_3 suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et de façon que ces fonctions soient périodiques, je veux dire qu'elles ne changent pas quand y_1, y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π et de telle sorte que $m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$ et $m'_1 y_1 + m'_2 y_2 + m'_3 y_3$ ne changent pas. Il n'y a plus de petits diviseurs, mais le calcul de ces fonctions n'est pas sans certaines difficultés.

En première approximation, la détermination de ces fonctions dépend de l'intégration d'un système d'équations différentielles qui ont la forme canonique des équations de la dynamique, *mais avec deux degrés de liberté seulement*. Dans presque toutes les applications, ces équations dépendront d'un paramètre très petit par rapport auquel on pourra développer, de manière qu'on pourra leur appliquer les conclusions des chapitres I et II (1^{ère} partie).

Dans les approximations suivantes, on n'aura plus à effectuer que des quadratures.

Ce n'est pas tout; le problème des n corps présente des difficultés spéciales qu'on ne rencontre pas dans le cas général. Sans doute ces difficultés ne sont pas aussi essentielles que celles dont j'ai signalé plus haut l'existence, et un peu d'attention doit permettre d'en triompher.

Mais j'en dois dire ici quelques mots.

Dans le problème des n corps, F_0 ne dépend pas de toutes les variables linéaires x_i ; par conséquent, non seulement le hessien de F_0 par rapport aux variables x_i est nul, mais le hessien d'une fonction arbitraire de F_0 est encore nul. (Cf. la note au bas de la page 103.) Cela vient du fait suivant: si $\mu = 0$, c'est à dire dans le mouvement Képlerien, les périhélie sont fixes.

Cette difficulté n'existait pas dans le cas que nous avons traité (1^{er} exemple, § 1, chapitre I, deuxième partie) parce que nous avons pris pour variable, non pas g longitude du périhélie, mais $g - t$. Elle n'existerait pas non plus avec une loi d'attraction autre que la newtonienne.

Voici quelles en sont les étranges conséquences:

Nous avons vu qu'il y a deux sortes de solutions périodiques: les solutions du 1^{er} genre, dont nous avons parlé dans le chapitre III (1^{ère} partie) et qui subsistent quelque petit que soit μ , et les solutions du 2^d genre dont nous avons parlé dans le § 5 (chapitre I, 2^{me} partie) et qui disparaissent l'une après l'autre quand on fait décroître μ .

Dans le cas du problème des trois corps, si l'on fait $\mu = 0$, les orbites des deux petits corps se réduisent à deux ellipses Képlériennes. Que deviennent alors les solutions périodiques du 1^{er} genre quand on fait $\mu = 0$? En d'autres termes quelles sont les solutions périodiques des équations du mouvement Képlerien? les unes correspondent au cas

où les deux moyens mouvements sont commensurables. Mais il en est d'autres qu'il est plus malaisé d'apercevoir et sur lesquelles je dois insister.

Si $\mu = 0$, c'est que les masses des deux planètes sont infiniment petites et qu'elles ne peuvent agir l'une sur l'autre d'une manière sensible, à moins d'être à une distance infiniment petite l'une de l'autre. Mais si ces planètes passent infiniment près l'une de l'autre, leurs orbites vont être brusquement modifiées comme si elles s'étaient choquées. On peut disposer des conditions initiales de telle façon que ces chocs se produisent périodiquement et on obtient ainsi des solutions discontinues qui sont de véritables solutions périodiques du problème du mouvement képlérien et que nous n'avons pas le droit de laisser de côté.

Telles sont les raisons pour lesquelles j'ai renoncé, au moins momentanément, à étendre au cas général les résultats obtenus. Non seulement le temps me fait défaut, mais je crois qu'une pareille tentative serait prématurée.

En effet, je n'ai pu faire encore du cas particulier même auquel je me suis restreint une étude suffisamment approfondie. Ce n'est qu'après bien des recherches et des efforts que les géomètres connaîtront complètement ce domaine, où je n'ai pu faire qu'une simple reconnaissance, et qu'ils y trouveront un terrain solide d'où ils puissent s'élancer à de nouvelles conquêtes.

Mai 1888.

(2)

Table des matières.

Introduction

Première partie.

Généralités.

~~Chap. I. Notations et définitions.~~

Chap. I. Propriétés générales des équations différentielles.

✓ §1. Notations et définitions.

§2. Calcul des limites.

§3. Applications du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles.

§4. Intégration des équations linéaires à coefficients périodiques

Chap. II. Théorie des invariants intégraux.

5 ✓ §1. Propriétés diverses des équations de la dynamique.

6 ✓ §2. Définition des invariants intégraux.

7 ✓ §3. Transformation des invariants intégraux.

8 ✓ §4. Usage des invariants intégraux.

Chap. III. Théorie des solutions périodiques.

9 ✓ §1. Existence des solutions périodiques.

10 ✓ §2. Représentants caractéristiques.

11 ✓ §3. Solutions périodiques des équations de la dynamique.

12 ✓ §4. Calcul des représentants caractéristiques.

13 ✓ §5. Solutions asymptotiques.

14 §6. Solutions asymptotiques des équations de la dynamique.

(2)

Deuxième partie.
Equations de la dynamique et problème
des n corps

~~Capitule I.~~

Chap. I. Etude des cas où il n'y a que deux
degrés de liberté.

15 ✓ § 1. Représentations géométriques diverses.

Chap. II. Etude des surfaces asymptotiques.

16 ✓ § 1. Exposé du problème.

17 ✓ § 2. Première approximation.

18 ✓ § 3. Deuxième approximation.

19 ✓ § 4. Troisième approximation.

Chap. III. Résultats divers.

20 ✓ § 1. Solutions périodiques du 2^e genre.

21 ✓ § 2. Divergence des séries de M. Lindstedt.

22 ✓ § 3. Non-existence des intégrales uniformes.

Chap. IV. Tentatives de généralisation.

23

Table.

Introduction	pages	1 et 2
Note 1	pages	1 bis, 2 bis, 3 et 4
Note 2	—	5, 6, 7.
Note 3	—	8
Note 4	—	9, 10
— 5	—	11, 12, 13, 14, 15
— 6	—	16
— 7	—	16, 17, 18
— 8	—	19, 20, 21
— 9	—	22. et 23
— 10	—	23
— 11	—	24 et 25.
— 12	—	26 à 30 incl.
— 13	—	31, à 32.
— 14	—	33 à 35.
— 15	—	36 à 37.
— 16	—	38 à 49.
— 16 bis	—	50 à 52.
— 17	—	53.
— 18	—	53 à 59
— 19	—	60 à 68
— 20	—	69 à 73.
Plan Général	—	74 à 79.

Plan Général.

P.

Introduction — D'après le texte manuscrit.

Première partie

Généralités.

Chapitre 1^{er}

Propriétés Générales des équations différentielles.

§1 Notation et Définitions.

Reproduire en entier ce § d'après le texte imprimé

§2 Calcul des Limites.

Reproduire d'après le texte imprimé des la note E depuis le commencement de cette note jusqu'à la page 199 ligne 9 inclusivement, c'est à dire jusqu'à ces mots « un pareil choc ne peut se produire. » inclusivement.

Reproduire ensuite d'après le texte manuscrit la Note 1

Copier ~~la~~ ensuite le texte imprimé depuis la page 202 ligne 22, jusqu'à la page 203 ligne 14 c'est à dire depuis ces mots « Voici quel est ce théorème. » jusqu'à ceux-ci. « développable suivant les puissances de x . ».

Intercaler ensuite la Note 2 du texte manuscrit.

§3 Applications du Calcul des Limites
aux Equations aux Dérivées Partielles.

Reproduire le texte imprimé depuis la page 205 ligne 9 c'est à dire depuis ces mots « Cauchy avait déjà appliqué. » jusqu'à ceux la fin de la Note E.

§4 Intégration des Equations Linéaires
à Coefficients périodiques

Reproduire en entier la note D du texte imprimé.

Chapitre II

Théorie des Invariants Intégraux

§1 Propriétés Diverses des Equations de la Dynamique.

Reproduire en entier ce § d'après le texte imprimé.

§ 2 Définition des Invariants intégraux.

Reproduire ce § en entier d'après le texte imprimé avec les corrections indiquées en marge; ajouter ensuite ce qui suit:

Il me reste à démontrer les divers résultats que je viens d'énoncer; cette démonstration peut se faire par un calcul très simple.

Reproduire ensuite la Note C du texte imprimé.

§ 3 Transformation des invariants intégraux

Reproduire en entier ce § d'après le texte imprimé.

§ 4 Usage des Invariants intégraux.

Reproduire d'abord les 8 premières lignes de ce § d'après le texte imprimé en s'arrêtant à ces mots « cette position initiale. »

Intercaler ensuite la Note 3 du texte manuscrit:

Reprendre ensuite le texte imprimé depuis ces mots « Je dis que s'il y a un invariant positif, » page 31 ligne ²⁴ jusqu'à ceux-ci « une infinité de fois la région σ_0 , C. L. F. D. » page 33 ligne 26 inclusivement.

Intercaler ensuite la Note 4 du texte manuscrit.

Reprendre ensuite le texte imprimé depuis ces mots « Extension du théorème I; » page 33 ligne 27 jusqu'à ceux-ci « quelque petite que soit cette région » page 35 ligne 15.

Intercaler ensuite la Note 5 du texte manuscrit.

Reprendre ensuite le texte imprimé depuis ces mots « Théorème II » page 35 ligne 16, jusqu'à ceux-ci « celle des courbes invariantes, » page 37 ligne 2. « qui coïncidera avec sa n^e conséquente. » page 37 ligne 22 inclusivement.

Intercaler ensuite la Note 6 du texte manuscrit.

Reproduire ensuite le texte imprimé depuis ces mots « Dans la plupart des questions, » page 38 ligne 9 jusqu'à ceux-ci « que je est très petit, » page 38 ligne 17.

Intercaler ensuite la Note 6 du texte manuscrit.

Reproduire le texte imprimé depuis ces mots « Par l'origine O passe » page 199 ligne 30 jusqu'à ceux-ci « C. L. F. D. » page 201 ligne 26.

Texte imprimé - depuis ^{Note} ces mots « Lemme » page 40 ligne 13, jusqu'à ceux-ci.

Note 7 du texte manuscrit.

la fin de la page 40

Note 7 du texte manuscrit.

Chapitre III

Théorie des solutions périodiques

§1 Existence des solutions périodiques.

Reproduire ce § d'après le texte imprimé jusqu'à ces mots « les équations (1) admettent une solution périodique » page 51 ligne 28.

Note 8 du texte manuscrit.

Reprendre le texte imprimé depuis ces mots « Dans ce qui précède, nous avons supposé. » page 56 ligne 23 jusqu'à la fin du §.

§2 Exposants caractéristiques.

Reproduire ce § d'après le texte imprimé.

§3 Solutions Périodiques des Equations de la Dynamique

Reproduire le texte imprimé depuis le commencement du § jusqu'à ces mots « lorsque μ n'est plus égal à 0 » page 67 ligne 15.

Pour le ~~+~~ Ajouter ensuite ce qui suit « Pour le prouver, je vais employer un raisonnement analogue à celui du § 1. »

Reprendre ensuite le texte imprimé depuis ces mots « Supposons, sans loss que μ » page 75 ligne 13 jusqu'à ceux-ci « (13) — — — $\Delta \omega_3 = 0$ » page 76 ligne 19.

Intercaler la note 9 du texte manuscrit.

Reprendre le texte imprimé depuis ces mots « Quand on aura choisi de la sorte » page 76 ligne 24 jusqu'à ceux-ci « des saies, d'ordre impair. » page 78 ligne 28 en ajoutant l'addition qui se trouve en marge.

Note 10 du texte manuscrit.

Texte imprimé depuis ces mots « Pour cela, je vais chercher » page 67 ligne 16 jusqu'à ceux-ci « à ω_2 et ω_3 était nul » page 74 ligne 19.

Note 11 du texte manuscrit.

Texte imprimé depuis ces mots « ce que nous venons de dire » page 78 ligne 29 jusqu'à la fin du §.

Note 12 du texte manuscrit.

§4 Calcul des exposants caractéristiques.

Texte imprimé depuis le commencement du § jusqu'à ces mots «

$$T_i = T_i^0 + T_i^1 \sqrt{\mu} + T_i^2 \mu + T_i^3 \mu \sqrt{\mu} + \dots$$

page 82 ligne 8.

Intercale ensuite la Note 12 du texte ~~imprimé~~ manuscrit
 Texte imprimé depuis ces mots

$$S_i^0 = 0, T_i^0 = 0 \gg$$

page 82 ligne 10 jusqu'à la fin du §.

Note 13 du texte manuscrit.

§ 5 Solutions asymptotiques.

Texte imprimé depuis le commencement du § jusqu'à ces mots

$$k = \frac{n}{2} \gg$$

page 93 ligne 13.

~~Note 14 du texte manuscrit.~~

Reprendre ensuite le texte imprimé depuis ces mots « Nous allons, nous placer maintenant, »

page 93 ligne 27, jusqu'à ceux-ci « iront passer par la courbe fermée C. »

page 95 ligne 24.

Note 14 du texte manuscrit.

§ 6 Solutions asymptotiques
 des équations de la Dynamique.

Note 15 du texte manuscrit.

Texte imprimé depuis ces mots, « Voyons, par quel mécanisme » page 253 ligne 23

jusqu'à la fin de la Note I

Note 16 du texte manuscrit.

Deuxième Partie

Equations de la Dynamique et Problème des n corps

Chapitre 1^{er}

Etude des cas où il n'y a que deux degrés de liberté.

§ 1 Représentations géométriques Diverses.

Reproduire en entier le paragraphe d'à page le texte imprimé

Chapitre II

§ 2

Etude

des surfaces asymptotiques.

§ 1

Exposé

du problème — (Note 16 bis du texte manuscrit)

§ 2

Première approximation

Reproduire le texte imprimé depuis le début du § 2 page 112 jusqu'à ces mots
 « successivement $x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^k$ » page 116 ligne 1.

Reprendre le texte imprimé depuis ces mots « Nous pouvons toujours supposer »
 page 117 ligne 3 jusqu'à la fin de la page 117.

Note 17 du texte manuscrit

Texte imprimé depuis ces mots « Nous nous proposerons dans ce qui va suivre » page 118
 ligne 19 jusqu'à ceux-ci « de nouvelles simplifications dans nos équations » page 120, ligne
 ligne 6.

Grate du plan général.

Ajouter ensuite ces mots:

« En égalant en effet l'équation (8) devient en effet

$$x_2' = \sqrt{\frac{2}{N}} ([F_1] + C_1)$$

Reprendre ensuite le texte imprimé de puis le commencement de § 3 page 122-
jusqu'à ces mots « $C_1 = -\varphi_3$ et $-\varphi_4$ » page 130 ligne 2, en ajoutant l'addition
qui se trouve en marge de la page 130.

§ 3 Etude des Surfaces Anisotropiques

Deuxième approximation.

Débuter par ces mots

« Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent et les hypothèses faites au
début de ce paragraphe, et ajouter

repandre ensuite le texte imprimé depuis ces mots « Ecrivons » page 220 ligne
23 jusqu'à ceux-ci « la fin de la Note F en tenant compte de l'importance
correction de la page 240.

§ 4 Troisième approximation.

Note 18 du texte manuscrit.

Chapitre III

Résultats Divers.

§ 1 Solutions Périodiques du 2^e Genre.

Dans le chapitre précédent Commencer par ces mots »

« Dans le chapitre précédent et dans les § 2 et 3, nous avons construit ^{en partie au lieu} 300 séries
en supposant que l'on donne à C_1 une valeur tantôt nulle tantôt
égale à $-\varphi_4$ ».

Reprendre le texte imprimé depuis ces mots « Supposons même tenant qu'on ait »
page 137 ligne 14 jusqu'à ceux-ci « si on les mane avec précaution » page 140
ligne 18.

Ajouter ensuite ces mots. « Il existe donc des régions, où, au moins pendant un certain
temps, y_2 ~~est nul~~ le cas où l'on suppose $n_2 = 0$ » (et, plus généralement $n_2 y_1 - n_1 y_2$
(dans le cas général) conservent des valeurs finies. C'est ce fait que les astronomes
expriment d'ordinaire en disant qu'il y a libration. On peut se demander si ces
régions de libration sont sillonnées de solutions périodiques »

Reprendre le texte imprimé depuis ces mots « On peut parvenir par les considérations
suivantes » page 145 ligne 9 jusqu'à la fin du § 5 page 153.

Terminer par la Note 19 du texte manuscrit.

Divergence des séries de
§ 2 ~~Résultats négatifs~~ M. Lindström

Texte imprimé, depuis le commencement du § 2 page 155 jusqu'à ces mots:
« sans une démonstration spéciale » page 156 ligne 2.

Texte imprimé, depuis le commencement de la Note A page 163 jusqu'à ces
mots « constantes arbitraires d'intégration qu'elles contiennent » page 172 ligne
18.

§ 3 Non existence des intégrales uniformes.

Note 20 du Texte manuscrit.

Chapitre IV

Tentatives de Généralisation.

Reproduire ce chapitre conformément au texte imprimé en tenant compte de la
~~correction~~ ~~supplément~~ correction indiquée pages 158 et 159.