En général la position des points A_0 et B_0 dépendra de μ, de telle façon que $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ seront des fonctions de μ que l'on pourra développer suivant les puissances croissantes de ce paramètre.

Dire que la distance A_0B_0 est très petite d'ordre n, c'est dire que les différences

$$x_1 - y_1, \; x_2 - y_2, \; x_3 - y_3$$

peuvent se développer suivant les puissances de μ et que les développements commencent par des termes en μ^n.

Quand on remplacera alors dans les équations (1) $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ par leurs valeurs en fonctions de μ, on reconnaîtra que les développements de $x'_1 - y'_1$, $x'_2 - y'_2$, $x'_3 - y'_3$ commencent par des termes en μ^n et par conséquent que la distance A_1B_1 est très petite d'ordre n.

C. Q. F. D.

Théorème III. Si une courbe invariante C est quasi-fermée, de telle façon que la distance des points de fermeture A et B soit une quantité très petite du n^e ordre, et s'il existe un invariant intégral positif, la distance du point A à son conséquent A_1 et celle du point B à son conséquent B_1 sont des quantités très petites du n^e ordre.

Fig. 1.

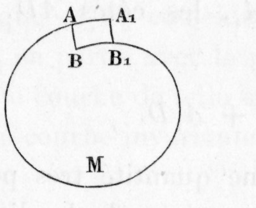
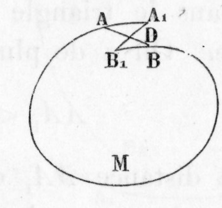


Fig. 2.



Je représente en effet la courbe C et sur cette courbe les deux points de fermeture A et B.

La courbe C étant invariante, les conséquents A_1 et B_1 de A et de B sont sur la courbe C ou sur son prolongement.

La distance des points A et B étant une quantité très petite du n^e ordre, je puis joindre ces deux points par un arc de courbe AB situé sur la portion de surface sans contact S, dont la longueur totale soit une quantité très petite du n^e ordre et qui ne coupe pas C.

Soit A_1B_1 un arc de courbe qui soit le conséquent de AB. D'après le lemme précédent, la longueur totale de $A_1 B_1$ sera encore une quantité très petite du n^e ordre.

Considérons l'aire α faisant partie de S et limitée par la courbe C et l'arc AB; sur la figure 1 c'est l'aire $ABB_1 MA$. Soit maintenant α_1 la conséquente de l'aire α. Cette conséquente sera limitée par la courbe C et l'arc $A_1 B_1$; sur la figure 1 ce sera l'aire $AA_1 B_1 MA$.

S'il y a un invariant intégral positif, il existera une certaine intégrale

$$\int MHd\omega$$

qui devra avoir la même valeur si on l'étend à tous les éléments $d\omega$ de l'aire α, ou à tous les éléments de sa conséquente α_1.

Si la disposition est celle de la figure 1, c'est à dire si les arcs AB et $A_1 B_1$ ne se coupent pas et que l'aire α_1 se compose de l'aire α, plus l'aire $ABA_1 B_1$, il faut que l'intégral

$$\int MHd\omega$$

étendue à l'aire $ABA_1 B_1$ soit nulle. Mais cela est impossible puisque tous les éléments de cette intégrale sont positifs.

Il faut donc que les arcs AB et $A_1 B_1$ se coupent en un point D, et que la disposition soit celle de la figure 2.

Cela posé, dans le triangle ADA_1, les côtés AD et $A_1 D$ sont très petits du n^e ordre. On a de plus:

$$AA_1 < AD + A_1 D.$$

Par conséquent la distance AA_1 est une quantité très petite du n^e ordre.

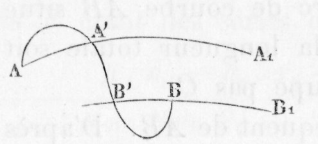
Il en est de même pour la même raison de la distance BB_1.

C. Q. F. D.[1]

---

[1] Vu l'importance de ce théorème, je crois devoir insister quelque peu. Le point essentiel de la démonstration qui précède est le suivant.

Si les deux arcs AB, $A_1 B_1$ ne se coupent pas, le polygone curviligne fermé $AA_1 B_1 B$ est convexe et ses côtés ne se coupent pas, de telle façon que l'aire $AA_1 B_1 B$ est tout entière de même signe et ne se compose pas de parties positives et de parties négatives.



En effet, AA_1 ne peut couper BB_1 sans quoi la courbe invariante serait fermée. AB ne peut couper non plus la

Remarque. On peut à un certain point de vue regarder une courbe fermée comme un cas particulier d'une courbe quasi-fermée; aussi n'est-il pas inutile de faire remarquer que le raisonnement précédent ne s'applique pas au cas où la courbe invariante est fermée, mais seulement au cas où elle est quasi-fermée.

Le corollaire suivant fera comprendre l'importance du théorème III.

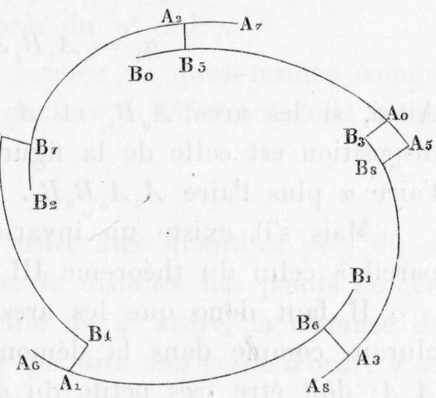
Corollaire. Si on a démontré qu'une courbe invariante C est quasi-fermée de telle sorte que la distance des points de fermeture A et B est une quantité très petite du n^e ordre *au moins*, si l'on sait de plus que la distance du point A à son conséquent est une quantité finie ou une quantité très petite du $n - 1^e$ ordre *au plus*, si enfin il y a un invariant intégral positif, la courbe C est fermée.

En effet, si elle était seulement quasi-fermée, la distance de A à son conséquent devrait être du n^e ordre.

Le théorème III est susceptible de plusieurs généralisations.

Première extension du théorème III.

Fig. 3.



Soit $A_0 B_0$ une portion quelconque de courbe tracée sur S et que je puis supposer prolongée un peu au delà de A_0 et B_0. Soient ensuite $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, ..., les conséquentes successives de $A_0 B_0$.

Supposons que $A_n B_n$ coïncide en partie avec $A_0 B_0$, en partie avec le prolongement de cette courbe de telle sorte que $A_0 B_0$ soit une courbe invariante du n^e ordre.

C'est ainsi que sur la figure 3 j'ai représenté, pour fixer les idées, $A_5 B_5$ comme coïncidant avec $A_0 B_0$ et son prolongement.

---

courbe C, car si par exemple AB coupait AA_1 en A' et le prolongement de BB_1 en B' comme l'indique la figure ci-contre, on prendrait pour points de fermeture A' et B' au lieu de A et de B.

Si AB ne coupe pas C, $A_1 B_1$ ne coupera pas non plus C qui est sa propre conséquente.

Les mêmes observations s'appliquent à la première extension du théorème III. On verrait de la même façon que le polygone curviligne $A_0 B_3 B_8 A_5$ (fig. 3) est convexe si $A_0 B_3$ et $A_5 B_8$ ne se coupent pas.