les F étant des séries développées suivant les puissances de:

$$\mu\,,\ x_1 - a_1\,,\ x_2 - a_2\,,\ x_3 - a_3\,,\ y_1 - a_1\,,\ y_2 - a_2\,,\ y_3 - a_3.$$

Les quantités F_1, F_2, etc. sont finies; si donc $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$ et $x_3 - y_3$ sont des quantités très petites d'ordre n, il en sera de même de $x_1' - y_1'$, $x_2' - y_2'$, $x_3' - y_3'$.

C. Q. F. D.

Théorème III. Soit $A_1 AMB_1 B$ une courbe invariante, de telle façon que A_1 et B_1 soient les conséquents de A et B.

Je suppose que les arcs AA_1 et BB_1 soient très petits (c'est à dire tendent vers o avec μ) mais que leur courbure soit finie.

Je suppose que cette courbe invariante et la position des points A et B dépendent de μ suivant une loi quelconque. Je suppose qu'il existe un invariant intégral positif. Si la distance AB est très petite du n^e ordre et que la distance AA_1 ne soit pas très petite du n^e ordre, l'arc AA_1 coupe l'arc BB_1.

Fig. 1

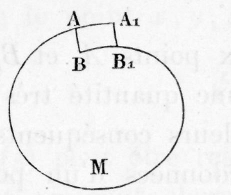
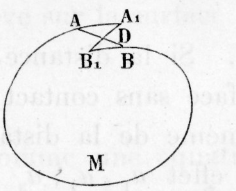


Fig. 2



Je puis toujours joindre les points A et B par un arc de courbe AB situé tout entier sur la portion de surface sans contact S et dont la longueur totale soit du même ordre de grandeur que la distance AB, c'est à dire une quantité très petite du n^e ordre. Soit A_1B_1 un arc de courbe qui soit le conséquent de AB, il sera aussi très petit du n^e ordre d'après le lemme II.

Voici maintenant les diverses hypothèses que l'on peut concevoir:

1ère hypothèse. Les deux arcs AA_1 et BB_1 se coupent. Je me propose d'établir que c'est cette hypothèse qui est réalisée.

2e hypothèse. Le quadrilatère curviligne AA_1B_1B est tel que les quatre arcs qui lui servent de côtés n'ont d'autre point commun que les quatre sommets A, A_1, B et B_1. C'est le cas de la figure 1.

3^e hypothèse. Les deux arcs AB et A_1B_1 se coupent. C'est le cas de la figure 2.

4^e hypothèse. L'un des arcs AB ou A_1B_1 coupe l'un des arcs AA_1 ou BB_1; mais les arcs AA_1 et BB_1 ne se coupent pas, non plus que les deux arcs AB et A_1B_1.

S'il y a un invariant positif il existera d'après le paragraphe précédent une certaine intégrale

$$\int MHd\omega$$

dont tous les éléments seront positifs et qui devra avoir la même valeur pour l'aire ABB_1MA et pour sa conséquente AA_1B_1MA.

Cette intégrale étendue à l'aire

$$ABA_1B_1 = AA_1B_1MA - ABB_1MA$$

doit donc être nulle et comme tous les éléments de l'intégrale sont positifs, la disposition ne peut être celle de la figure 1 où l'aire ABA_1B_1 est convexe.

La seconde hypothèse doit donc être rejetée.

La disposition ne peut non plus être celle de la figure 2.

En effet dans le triangle ADA_1, les distances AD et A_1D sont très petites du n^e ordre car elles sont plus petites que les arcs AD et A_1D, lesquels sont plus petits que les arcs AB et A_1B_1 qui sont du n^e ordre. De plus on a:

$$AA_1 < AD + A_1D.$$

La distance AA_1 devrait donc être une quantité très petite du n^e ordre, ce qui est contraire à l'énoncé du théorème.

La 3^e hypothèse doit donc être rejetée.

Je dis que la 4^e hypothèse ne peut non plus être acceptée. Supposons en effet par exemple que l'arc AB coupe l'arc AA_1 en un point A'. Soit ANA_1 la portion de l'arc AB qui va de A en A'; soit APA' la portion de l'arc AA_1 qui va de A en A'.

Je dis qu'on pourra remplacer l'arc $ANA'B$ par l'arc $APA'B$; et que le nouvel arc $APA'B$ sera comme l'arc primitif $ANA'B$ une quantité très petite du n^e ordre.

En effet l'arc ANA' est plus petit que AB, il est donc du n^e ordre;

la distance AA' est donc elle-même du n^e ordre; l'arc APA' est plus petit que AA_1 qui est très petit, c'est à dire qui tend vers o avec μ; l'arc APA' est donc très petit et sa courbure est finie; on peut donc assigner une limite au rapport de l'arc APA' à sa corde AA'; ce rapport est fini et AA' est du n^e ordre; donc APA' est du n^e ordre, c. q. f. d.

D'ailleurs le nouvel arc $APA'B$ ne coupe plus l'arc AA_1, il a seulement avec lui une partie commune APA'.

On retombe donc sur la 2^e hypothèse qui a déjà été rejetée.

La $1^{\text{ère}}$ hypothèse est donc seule acceptable et le théorème est démontré.

Remarque. — Nous avons supposé dans l'énoncé du théorème que les arcs AA_1 et BB_1 sont très petits et que leur courbure est finie. En réalité nous ne nous sommes servis de cette hypothèse que pour montrer que si la corde AA' est très petite du n^e ordre, il en est de même de l'arc APA'.

Le théorème sera donc encore vrai quand même l'arc AA_1 ne serait pas très petit et sa courbure finie, pourvu qu'on puisse assigner une limite supérieure au rapport d'un arc quelconque (faisant partie de AA_1 ou de BB_1) à sa corde.

CHAPITRE III.

Théorie des solutions périodiques.

§ 9. *Existence des solutions périodiques.*

Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

où les X sont des fonctions des x et d'un paramètre μ. Les X pourront aussi dépendre de t, mais ce seront alors des fonctions périodiques de cette variable et la période sera 2π.