

Introduction.

Le travail qui va suivre et qui a pour objet l'étude du problème des trois corps est un remaniement du mémoire que j'avais présenté au Concours pour le prix institué par Sa Majesté le Roi de Suède. Ce remaniement était devenu nécessaire pour plusieurs raisons. Pressé par le temps, j'avais dû énoncer quelques résultats sans démonstration; le lecteur n'aurait pu, à l'aide des indications que je donnais, reconstituer les démonstrations qu'avec beaucoup de peine. J'avais songé d'abord à publier le texte primitif en l'accompagnant de notes explicatives; mais j'avais été amené à multiplier ces notes de telle sorte que la lecture du mémoire serait devenue fastidieuse et pénible.

J'ai donc préféré fondre ces notes dans le corps de l'ouvrage, ce qui a l'avantage d'éviter quelques redites et de faire mieux ressortir l'ordre logique des idées.

Je dois beaucoup de reconnaissance à M. PHRAGMÉN qui non seulement a revu les épreuves avec beaucoup de soin, mais qui, ayant lu le mémoire avec attention et en ayant pénétré le sens avec une grande finesse, m'a signalé les points où des explications complémentaires lui semblaient nécessaires pour faciliter l'entière intelligence de ma pensée. Je lui dois la forme élégante que je donne au calcul de S_i^m et de T_i^m à la fin du § 12. C'est même lui qui, en appelant mon attention sur un point délicat, m'a permis de découvrir et de rectifier une importante erreur.

Dans quelques-unes des additions que j'ai faites au mémoire primitif, je me borne à rappeler certains résultats déjà connus; comme ces résultats sont dispersés dans un grand nombre de recueils et que j'en fais un fréquent usage, j'ai cru rendre service au lecteur en lui épargnant de fastidieuses recherches; d'ailleurs je suis souvent conduit à appliquer ces théorèmes sous une forme différente de celle que leur auteur leur avait d'abord donnée et il était indispensable de les exposer sous cette nouvelle forme. Ces théorèmes acquis, dont quelques-uns sont même classiques

sont développés, à côté de quelques propositions nouvelles, dans le chapitre 1^{er} (1^{ère} partie).

Je suis bien loin d'avoir résolu complètement le problème que j'ai abordé. Je me suis borné à démontrer l'existence de certaines solutions particulières remarquables que j'appelle solutions périodiques, solutions asymptotiques, et solutions doublement asymptotiques. J'ai étudié plus spécialement un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles.

Comme on le voit, ces résultats ne nous apprennent que peu de chose sur le cas général du problème; mais ce qui peut leur donner quelque prix, c'est qu'ils sont établis avec rigueur, tandis que le problème des trois corps ne paraissait jusqu'ici abordable que par des méthodes d'approximation successive où l'on faisait bon marché de cette rigueur absolue qui est exigée dans les autres parties des mathématiques.

Mais j'attirerai surtout l'attention du lecteur sur les résultats négatifs qui sont développés à la fin du mémoire. J'établis par exemple que le problème des trois corps ne comporte, en dehors des intégrales connues, aucune intégrale analytique et uniforme. Bien d'autres circonstances nous font prévoir que la solution complète, si jamais on peut la découvrir, exigera des instruments analytiques absolument différents de ceux que nous possédons et infiniment plus compliqués. Plus on réfléchira sur les propositions que je démontre plus loin, mieux on comprendra que ce problème présente des difficultés inouïes, que l'insuccès des efforts antérieurs avait bien fait pressentir, mais dont je crois avoir mieux encore fait ressortir la nature et la grandeur.

J'ai fait voir également que la plupart des séries employées en mécanique céleste et en particulier celles de M. LINDSTEDT qui sont les plus simples, ne sont pas convergentes. Je serais désolé d'avoir par là jeté quelque discrédit sur les travaux de M. LINDSTEDT ou sur les recherches plus profondes de M. GYLDÉN. Rien ne serait plus éloigné de ma pensée. Les méthodes qu'ils proposent conservent toute leur valeur pratique. On sait en effet le parti qu'on peut tirer dans un calcul numérique de l'emploi des séries divergentes et la série fameuse de STIRLING en est un

exemple frappant. C'est grâce à une circonstance analogue que les développements usités en mécanique céleste ont rendu déjà de si grands services et sont appelés à en rendre de plus grands encore.

L'une des séries dont je ferai usage plus loin et dont je démontrerai d'ailleurs la divergence, offre une grande analogie avec un développement proposé par M. BOHLIN à l'Académie de Stockholm le 9 mai 1888. Comme son mémoire n'a été imprimé que quelques mois plus tard, je n'en avais pas connaissance à l'époque de la fermeture du concours, c'est à dire le 1^{er} juin 1888. Je n'ai donc pas cité le nom de M. BOHLIN, je m'empresse de lui rendre ici la justice qui lui est due. (Cf. Supplément aux comptes rendus de l'Académie de Stockholm, Tome 14 et *Astronomische Nachrichten*, N° 2883.)