$$\text{Const.} = 0$$

und man hat daher für jeden Werth von u

13) $$\sum_{\lambda=0}^{n} \xi_\lambda^2 = 1.$$

Da alsdann keine der Grössen $\xi_0, \ldots \xi_n$ ihrem absoluten Betrag nach grösser als 1 werden kann, so existirt *ein* die Differentialgleichungen (10) befriedigendes System regulärer und reeller Functionen

14) $$\xi_0 = \psi_0(u), \ldots \xi_n = \psi_n(u)$$

deren Argument jeden beliebigen reellen Werth annehmen kann. Setzt man dann

15) $$t - t_0 = \int_0^u (1 + \xi_0)^m du$$

so wird t eine reelle Function von u, welche beständig wächst, wenn u beständig wachsend das Interwall

$$-\infty \,.\,. + \infty$$

durchläuft. Dieselbe nähert sich daher, wenn u beziehlich den Grenzen $-\infty$, $+\infty$ unendlich nahe kommt, zwei bestimmten Grenzen T_1, T_2, zwischen denen die Constante t_0 liegt, und es ist u eine Function von t, welche stetig wachsend von $-\infty$ zu $+\infty$ übergeht, wenn t stetig wachsend das Interwall $T_1 \ldots T_2$ durchläuft.

Setzt man dann

16) $$x_\lambda = \frac{\xi_\lambda}{1 + \xi_0}, \quad \lambda = 1, \ldots n$$

unter der Voraussetzung, es seien die Werthe, welche $\xi_0, \ldots \xi_n$ für $t = t_0$ annehmen, so gewählt, dass für diesen Werth von t die Gleichungen (16) bestehen, so sind $x_1, \ldots x_n$ die den Differentialgleichungen (1) unter den festgestellten Bedingungen genügenden Functionen von t.

Erster Teil des Berichts von Weierstrass über die Poincaré'sche Preisarbeit.

Von den ausgeschriebenen vier Preisfragen hat nur die erste Bearbeiter gefunden. Dieselbe war gestellt worden in der Hoffnung, dass sie sich mit den gegenwärtig uns zu Gebote stehenden Hülfsmitteln werde erledigen lassen. Diese Hoffnung gründete sich auf folgende Erwägungen.

In einem frei sich bewegenden Systeme materieller Punkte, welche einander nach dem NEWTON'schen Gesetze anziehen, kann sich kein Punkt im Verlaufe einer endlichen Zeit unendlich weit von dem Schwerpunkte entfernen. Dagegen ist es möglich, dass der Abstand zweier Punkte unendlich klein werde, wenn sich die Zeit einer bestimmten endlichen (positiven oder negativen) Grenze nähert. Es lässt sich jedoch zeigen, dass dies ein Ausnahmefall ist, der nur unter ganz besonderen Umständen eintreten und daher füglich unberücksichtigt bleiben kann. Unter dieser Voraussetzung sind aber die Coordinaten der einzelnen Punkte, wie sich aus bekannten functionentheoretischen Sätzen ergiebt, während eines Zeitraums von unbegrenzter Dauer eindeutige und stetige analytische Functionen der Zeit; und solche Functionen können stets, und zwar auf mannigfaltige Weise in Reihen von der in der Preisfrage geforderten Beschaffenheit dargestellt werden. Es stand also fest, dass die Lösung des vorgelegten Problems möglich sei. Dass sie aber auch ausführbar sein werde, liess sich freilich nicht a priori annehmen. Indessen konnte selbstverständlich nicht die vollständige Entwickelung der Reihen, um die es sich handelt, sondern nur die Auffindung und Beschreibung eines zur successiven Bildung ihrer Glieder dienenden Verfahrens verlangt werden, und dass dies keine die Kräfte der Analysis übersteigende Aufgabe sei, dafür sprach — wie in den der Preisfrage beigegebenen Erläuterungen hervorgehoben worden ist — was wir von den auf die Integration der dynamischen Differentialgleichungen sich beziehenden Untersuchungen DIRICHLET's wissen. Denn so unvollständig dies leider auch ist, soviel geht doch jedenfalls daraus hervor, dass sich mittels der von DIRICHLET erdachten Methode, wenn wir im Besitze derselben wären, für jede der zu entwickelnden Functionen ein angenäherter Ausdruck in der Art müsste herstellen lassen, dass der Unterschied zwischen ihm und der Function in einem festgesetzten, beliebig langen Zeitintervall eine vorgeschriebene, beliebig klein anzunehmende Grenze nicht überschritte.

Dann aber würde man auch im Stande sein, die Function durch eine unbedingte und gleichmässig konvergierende Reihe darzustellen, also das vorgelegte Problem in der vorgeschriebenen Form zu lösen.

Indessen machen sich, wenn aus der Lösung des Problems für unsere Einsicht in die wahre Natur der Bewegungen der Himmelskörper eine wesentliche Förderung erwachsen soll, noch andere, jedenfalls nicht leicht zu erfüllende Forderungen geltend. Unter der im Vorstehenden angegebenen Voraussetzung ist die Bewegung des betrachteten Systems von ewiger Dauer, und es kann der Abstand je zweier Punkte im Verlaufe einer *endlichen* Zeit weder unendlich gross noch unendlich klein werden.

Soll dies aber auch für einen unendlich langen Zeitraum gelten, so müssen

Bedingungen erfüllt sein, welche sich bisher noch nicht genügend haben feststellen lassen, deren Erforschung aber stets als eine der wichtigsten Aufgaben der Mechanik des Himmels betrachtet worden ist und darum auch von jedem Bearbeiter der Preisfrage als nächster Gegenstand der Untersuchung hätte in's Auge gefasst werden müssen. Wenn auch nicht zu erwarten, dass die schwierige Frage sich vollständig werde erledigen lassen, so durfte man doch hoffen, dass man wenigstens in Betreff der Stabilität unseres Planetensystems zu einem sichern Resultate gelangen werden. In Bezug auf den dabei einzuschlagenden Weg liess sich im voraus auch nicht einmal eine Vermuthung aussprechen. Möglicherweise könnte man zum Ziele kommen, wenn man, die Stabilität des Systems *voraussetzend*, die zu entwickelnden Functionen durch Reihen, in denen jedes Glied eine beständig endlich bleibende und stetige Function der Zeit sein müsste, darzustellen versuchte, und, wenn dies gelänge, die Convergenz der Reihen zu beweisen im Stande wäre. In der That haben namhafte Astronomen und Mathematiker in neuer Zeit diesen Gedanken verfolgt und sind zu dem Ergebnisse gekommen, dass die auf dem Schwerpunkt der Sonne bezogenen Coordinaten der Planeten oder auch die veränderlichen Bahnelemente derselben durch Reihen von der Form

$$\sum_{(\nu_1, \nu_2, \ldots)} \{C_{\nu_1 \nu_2 \ldots} \sin (c_0 + \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 + \cdots) t\} \qquad \nu_1, \nu_2, \ldots \text{ ganze (positive oder negative) Zahlen}$$

darstellbar seien, wo t die Zeit, und $c_1, c_2, \ldots, C_{\nu_1 \nu_2 \ldots}$ von t unabhängige Grössen bedeuten.

Indessen konnte nur nachgewiesen werden, dass den Differentialgleichungen der Bewegung in dem betrachteten Falle unter gewissen Voraussetzungen durch Reihen von der angegebenen Form *formell* genügt werden kann; ob aber diese Reihen convergent und die wahren Ausdrücke der darzustellenden Grössen seien, war zur Zeit, als die Preisaufgabe ausgeschrieben wurde, eine unerledigte Frage, auf die notwendig eingegangen werden musste.

In dem Vorstehenden habe ich die Gesichtspunkte angedeutet, welche bei der Prüfung der eingegangenen, unter N:r 7, 9, 10 verzeichneten Concurrenzschriften für mich massgebend gewesen sind.